数理解析研究所講究録
第464巻 1982年 83-95

散乱状態の特徴付けについて

東大 教養　北田 均

時間に依存するポテンシャルを持った Schrödinger 方程式

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}(t)+H(t)u(t)=0, & u(0)=f\in L^2=L^2(R^N) \\ H(t)=H_0+V(t,x), & H_0=-\frac{1}{2}\Delta \end{cases}$$

に対してその散乱状態fの空間を、解 $u(t)$ の時間-空間における振舞いによって定義することを考える。$H(t)$ が時間に依存しない、即ち $H(t)=H$ の時は自己共役作用素 H の絶対連続ないし連続スペクトル空間 $\mathcal{H}_{ac}(H)$ 又は $\mathcal{H}_c(H)$ という自然な散乱状態の空間があった。しかしハミルトニアンが時間に依存する場合はこのような特徴付けは不可能に近いであろう。但し $H(t)$ が時間に関して periodic な場合はそのような特徴付けは可能である。

動機付けを与えるため時間に依存しないハミルトニアン H を考える。次のことが容易にわかる：

$$f\in \mathcal{H}_{ac}(H) \Longrightarrow \underset{t\to\pm\infty}{w\text{-}\lim}\, e^{-itH}f=0,$$

$$f\in \mathcal{H}_p(H)\setminus\{0\} \Longrightarrow \underset{t\to\pm\infty}{w\text{-}\lim}\, e^{-itH}f \text{ は存在しない。}$$

普通のSchrödinger作用素$H=H_0+V(x)$の場合　Hの特異連続スペクトル空間$\mathcal{H}_{sc}(H)=\{0\}$であるから，上のことから

(2)　　$f\in\mathcal{H}_{ac}(H)=\mathcal{H}_c(H) \iff \underset{t\to\pm\infty}{w\text{-}\lim}\, e^{-itH}f=0$

が得られる。そこでこの右辺の条件で時間に依存するハミルトニアン$H(t)$に対する散乱状態の空間を定義して，それが(修正)波動作用素の値域と一致することを示そうというのが我々の目的である。

なお時間に依存しない場合の$\mathcal{H}_{ac}(H)$, $\mathcal{H}_c(H)$, $\mathcal{H}_p(H)$の特徴付けはRuelle [1], Amrein-Georgescu [2] らによって与えられている。また時間に関してperiodicな場合についてはVeselićのpreprint [3] があるが，これは一部に誤りを含んでいる。以前我々はKitada-Yajima [4]において上記(2)の右辺の条件より強い条件によって散乱状態の空間$\mathcal{H}^{\pm}_{scat}(s)$を定義し，$\mathcal{R}(W^{\pm}(s))=\mathcal{H}^{\pm}_{scat}(s)$を示した。そして時間に関してperiodicな場合のVeselićのcriterionを用いて

(3)　　$\mathcal{R}(W^{\pm}(s))=\mathcal{H}_c(U(s+\omega,s))$　　(ωは周期)

を示した($U(s+\omega,s)$は$H(t)$の生成するunitary group)。しかしこの方法では$U(t,s)$がVeselićのcriterionを満たす事を示すのに少々手間がかかる。(Kitada-Yajima [4]中ではこれには触れていない。) 今回の特徴付けを使えばVeselićの途中結果を用いて(3)が直接示される。

さて簡単のためポテンシャル $V(t,x)$ に次の仮定をおく。

<u>仮定</u>　$V(t,x)$ は $(t,x)\in R^{1+N}$ について連続な実数値関数で、t をとめたとき x について C^∞ で、ある $\exists\varepsilon>0$ に対して

(4)　$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \leqq C_\alpha \langle x\rangle^{-|\alpha|-\varepsilon}, \qquad \langle x\rangle=\sqrt{1+|x|^2}$$

をみたすとする

このとき $\{H(t)\}=\{H_0+V(t,x)\}$ は次の性質をみたす unitary propagator $\{U(t,s)\}$ を生成することは知られている：

(5)
$$\begin{cases} U(t,r)U(r,s)=U(t,s), \quad U(s,s)=I, \\ \begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)f+H(t)U(t,s)f=0 \\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)f-U(t,s)H(s)f=0 \end{cases} \qquad (f\in\mathcal{S}=\mathcal{S}(R^N)). \end{cases}$$

$\chi_{\{|x|\leqq r\}}$，$\chi_{\{|D|\leqq a\}}$ は集合 $\{x\,|\,|x|\leqq r\}$，$\{\xi\,|\,|\xi|\leqq a\}$ の特性関数による，それぞれ座標および運動量空間における掛け算作用素を表わすとする。

<u>定義1</u>　i) $f\in\tilde{\mathcal{H}}^{\pm}_{scat}(s)$

$\Longleftrightarrow$　$\exists\{\tau_n^\pm\}\longrightarrow\pm\infty\ (n\to\infty)$　s.t.

$$\begin{cases} a)\ \forall r>0,\ \lim_{n\to\infty}\|\chi_{\{|x|\leqq r\}}U(\tau_n^\pm,s)f\|=0, \\ b)\ \exists a>0,\ \lim_{n\to\infty}\|\chi_{\{|D|\leqq a\}}U(\tau_n^\pm,s)f\|=0. \end{cases}$$

ii) $\mathcal{H}^\pm_{scat}(s)$ は $\tilde{\mathcal{H}}^\pm_{scat}(s)$ の closed linear hull.

これは Kitada-Yajima の $\mathcal{H}^\pm_{scat}(s)$ の定義と同値である (cf. Kitada-Yajima, Definition 1.1)。

定義2 i) $f \in \tilde{\mathcal{H}}^{\pm}_{w}(\nu)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a) & \underset{t \to \pm\infty}{w\text{-}\lim}\, U(t,\nu) f = 0, \\ b) & \exists a > 0,\ \lim_{t \to \pm\infty} \| \chi_{\{|p| \leq a\}} U(t,\nu) f \| = 0. \end{cases}$$

ii) $\mathcal{H}^{\pm}_{w}(\nu) = \overline{\tilde{\mathcal{H}}^{\pm}_{w}(\nu)}$.

定義3 i) $f \in \tilde{\mathcal{H}}^{\pm}_{w\rho}(\nu)$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \{\tau_n^{\pm}\} \to \pm\infty\ (n \to \infty),\ \exists a > 0 \ \text{s.t.}$$

$$\begin{cases} a) & \underset{n \to \infty}{w\text{-}\lim}\, U(\tau_n^{\pm},\nu) f = 0, \\ b) & \lim_{n \to \infty} \| \chi_{\{|p| \leq a\}} U(\tau_n^{\pm},\nu) f \| = 0. \end{cases}$$

ii) $\mathcal{H}^{\pm}_{w\rho}(\nu)$ は $\tilde{\mathcal{H}}^{\pm}_{w\rho}(\nu)$ の closed linear hull.

注意 条件b)について: Yafaev [5] は条件a)をみたすがb)を満たさない f の存在する short-range potential $V(t,x)$ を作った。しかしこの f は $t \to \pm\infty$ の時エネルギーはどんどん0に集まってしまう(勿論 a)をみたすから少しずつではあるが $|x| \to \infty$ に逃げてはいく)。このような f は,従って,観測にはかからないであろう。さらにいえば, scattering operator を用いて散乱を議論する場合, $\mathcal{R}(W_{\pm})$ にはいらない f は考えなくてもよいので, Yafaev の f は考慮の外においてよいだろう。我々の場合条件b)によりこのような f は 排除されている。

注意 容易にわかるように

(6) $$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{scat}}(s)\subset\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{in},s}(s),\quad \mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{in}}(s)\subset\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{in},s}(s).$$

また，時間によらない，または時間に関してperiodicなポテンシャルの場合条件b)は不要となる。即ち仮定のもとに，b)はa)より従う。(Kitada-Yajima 参照)

さて結果を述べるため記号を導入する。$\chi_0\in C^\infty(R^N)$ を $\chi_0(x)=1$ $(|x|\geqq 2)$, $=0$ $(|x|\leqq 1)$ ととり，$\rho\in(0,1)$ に対して

(7) $$V_{\rho;s}(t,x,\xi)=\chi_0(\rho x)\,\chi_0\!\left(\frac{\log\langle t-s\rangle}{\langle t-s\rangle}x\right)V(t,x)$$

および

(8) $$H_{\rho;s}(t,x,\xi)=\frac{1}{2}|\xi|^2+V_{\rho;s}(t,x)$$

とおく。容易にわかるように

(9) $$|\partial_x^{\alpha}V_{\rho;s}(t,x)|\leqq C_\alpha\,\rho^{\varepsilon_0}\langle t-s\rangle^{-|\alpha|-\varepsilon_0}\qquad(\varepsilon_0=\varepsilon/3).$$

よって $\rho\in(0,1)$ が十分小さい時，次のHamilton-Jacobi方程式

(10) $$\begin{cases}\partial_t\varphi^{\pm}(s,t;y,\xi)=H_{\rho;s}(t,\nabla_y\varphi^{\pm}(s,t;y,\xi),\xi),\\ \varphi^{\pm}(s,s;y,\xi)=y\cdot\xi\end{cases}$$

は $t\geqq s$ に対し global な一意解 $\varphi^{\pm}$ をもつ。これを用いて

(11) $$W(s,t;\xi)=\varphi^{\pm}(s,t;0,\xi)$$

および

(12) $$U_D(t,s)=\mathcal{F}^{-1}\exp\{-iW(s,t;\xi)\}\mathcal{F}\qquad(\mathcal{F}\text{ は Fourier 変換})$$

とおく。このとき modified wave operator $W_D^{\pm}(s)$ を

(13) $$W_\pm(s) = \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\ U(t,s)^{-1} U_0(t,s)$$

とおく。この存在については例えば Kitada-Yajima, §3 を参照。

<u>定理1</u> <u>仮定</u>のもとに、任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して、

(14) $$\mathcal{H}^\pm_{scat}(s) = \mathcal{H}^\pm_{\infty}(s) = \mathcal{H}^\pm_{\infty,0}(s) = \mathcal{R}(W_\pm(s)).$$

<u>定理2</u> <u>仮定</u>をみたす periodic ポテンシャル：$V(t+\omega,x)=V(t,x)$ に対し、

(15) $$\mathcal{R}(W_\pm(s)) = \mathcal{H}_c(U(s+\omega,s)) = \mathcal{H}_{ac}(U(s+\omega,s)),\ s \in \mathbb{R}.$$

とくに $\mathcal{H}_{sc}(U(s+\omega,s)) = \{0\}$.

但し、$\mathcal{H}_c(T)$, $\mathcal{H}_{ac}(T)$, $\mathcal{H}_{sc}(T)$ は unitary operator T に対する連続スペクトル、絶対連続スペクトル、特異連続スペクトル空間。

<u>定理2の証明</u>（定理1を仮定して）

$U = U(s+\omega,s)$ と書く。

(16) $$\mathcal{R}(W_\pm(s)) \subset \mathcal{H}_{ac}(U) \subset \mathcal{H}_c(U)$$

は明らかだから、定理1より、

(17) $$\mathcal{H}_c(U) \subset \mathcal{H}^\pm_{\infty,0}(s)\ (= \mathcal{R}(W_\pm(s)))$$

を示せば十分。$f \in \mathcal{H}_c(U)$ とすると Veselić の途中結果に

任意のコンパクト作用素 K に対し，

(18) $$\lim_{T\to\pm\infty}\frac{1}{T}\int_s^{s+T}\|K\,U(t,s)f\|^2\,dt=0$$

が成り立つ。ここで $K=\langle x\rangle^{-1}\langle p\rangle^{-1}$ として，整数列 $n_k^\pm\to\pm\infty$ $(k\to\infty)$ で，

(19) $$\operatorname*{w-lim}_{k\to\infty} U^{n_k^\pm} f=0$$

をみたすものの存在がいえる。従って，定義3の条件a)がいえた。

条件b)： $\Gamma_{\theta_0}=\{e^{i\theta}\mid \theta_0\le\theta\le 2\pi-\theta_0\}$ $(\theta_0\in[0,\pi])$

とおき，

(20) $$\tilde{\mathcal{H}}_c(U)=\{\rho(U)f\mid f\in\mathcal{H}_c(U),\ \rho\text{ は }\Gamma_0\text{ 上の連続関数で } \rho=1 \text{ on } \Gamma_{\theta_0},\ =0 \text{ on } \Gamma_0\setminus\Gamma_{\theta_0/2}\ (\exists\,\theta_0\in(0,\pi))\}$$

と定義すると，$\tilde{\mathcal{H}}_c(U)$ は $\mathcal{H}_c(U)$ で dense ゆえ，$\tilde{\mathcal{H}}_c(U)\subset\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ims}}(s)$ をいえば十分。

$\rho(U)f=f\in\tilde{\mathcal{H}}_c(U)$ として ρ は (20) のようなものとする。そして $\phi(\lambda)$ を $[\theta_0/2,\infty)$ の特性関数とし，$\psi(\lambda)=1-\phi(\lambda)$ とおくと，$\lambda\ge 0$ に対し，容易に $\psi(\lambda)=1-\phi(\lambda)=\psi(\lambda)(1-\rho(e^{-i\lambda}))$ がいえる。よって $U_0=e^{-i\omega H_0}$ とおくと，

(21) $$\begin{aligned}(1-\phi(H_0))\,U^{n_k^\pm}f&=\psi(H_0)(1-\rho(U_0))\,U^{n_k^\pm}f\\&=\psi(H_0)(\rho(U)-\rho(U_0))\,U^{n_k^\pm}f.\end{aligned}$$

ところが $\psi(H_0)(\rho(U)-\rho(U_0))$ は compact operator ゆえ (cf. Kitada-Yajima, Prop. 6.1)，定義3の条件b)がいえた。 □

<u>定理1の証明</u>　(6)より,

(22) $$\mathcal{H}^{\pm}_{\infty}(\rho) \subset \mathcal{R}(W^{\pm}(\rho))$$

と

(23) $$\mathcal{R}(W^{\pm}(\rho)) \subset \mathcal{H}^{\pm}_{scat}(\rho) \cap \mathcal{H}^{\pm}_{\infty}(\rho)$$

をいえばよい。$f \in \mathcal{R}(W^{\pm}(\rho))$ とすると,

(24) $$\| U(t,\rho)f - U_0(t,\rho)f \| \longrightarrow 0 \quad (t \to \pm\infty)$$

故に, $f \in \mathcal{F}^{-1}C_0^\infty(R^N \setminus \{0\})$ として, $U_0(t,\rho)f$ の漸近挙動を stationary phase method によって調べることにより, (23)がいえる。
よって, (22)を示せばよい。

C^∞関数 γ, ψ_+, ψ_- を

(25) $$\begin{cases} \gamma(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \geq 1 \\ 0 & |\xi| \leq 1/2 \end{cases}, & 0 \leq \gamma, \psi_+, \psi_- \leq 1, \\ \psi_+(\sigma) + \psi_-(\sigma) = 1, & \psi_+(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \geq \sigma_0 \\ 0 & -\sigma_0 \geq \sigma \end{cases} \quad (\exists \sigma_0 \in (0,1)) \end{cases}$$

ととり, $a > 0$ に対し,

(26) $$\begin{cases} \gamma_a(\xi) = \gamma(\xi/a), \\ g_{\pm,a}(\xi,y) = \gamma_a(\xi)\gamma(y)\psi_\pm(\cos(\xi,y)) + \frac{1}{2}\gamma_a(\xi)(1-\gamma(y)) \end{cases}$$

とおく。そして, $f \in \mathcal{S}$, $a > 0$ に対して,

(27) $$\begin{cases} P_{\pm,a}f(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} g_{\pm,a}(\xi,y) f(y)\, dy\, đ\xi, \\ E_{\pm,a}(t,\rho)f(x) = \iint e^{i(x\cdot\xi - \Phi^{\pm}(\rho,t;y,\xi))} g_{\pm,a}(\xi,y) f(y)\, dy\, đ\xi \end{cases}$$

とおく。但し, $đ\xi = (2\pi)^{-N}d\xi$. すると次の key estimate が成り立つ;

$$(28)\begin{cases} \|(D_t+H(t))E_{\pm,a}(t,s)K_{\varepsilon_1}^{-1}\| \leq C_a\langle t-s\rangle^{-1-\varepsilon_1}, & t \gtrless s, \\ E_{\pm,a}(s,s) = P_{\pm,a}. \end{cases}$$

但し、 $K_\alpha = \langle x\rangle^{-\alpha}\langle D\rangle^{-\alpha}$、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/3 (>0)$. ((28)については Kitada [6], Appendix と同様。)

さて、(22) をいうには $f \in \tilde{\mathcal{H}}^+_{\infty}(s)$ に対し、

$$(29) \qquad \operatorname*{s-lim}_{t\to\infty} U_D(t,s)^* U(t,s) f$$

の存在をいえばよい(簡単のため $t\to\infty$ のみ考える)。$\{\tau_n\}$ と $a>0$ を定義3-1のようにとる。$P_a = P_{+,a}+P_{-,a}$ とおく時、

$$U(t,s)f = U(t,\tau_n)U(\tau_n,s)f$$

$$(30) \quad = U(t,\tau_n)(I-P_a)U(\tau_n,s)f$$

$$+U(t,\tau_n)P_{-,a}U(\tau_n,s)f \quad +U(t,\tau_n)P_{+,a}U(\tau_n,s)f$$

$$\equiv \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}$$

となる。

I: $I-P_a \leq \chi_{\{|\xi|\leq a\}}$ ゆえ、$\sup_{t\geq\tau_n}\|\mathrm{I}\| \to 0\ (n\to\infty)$.

II: $\|\mathrm{II}\| = \|P_{-,a}U(\tau_n,s)f\|$

$$\leq \|(P_{-,a}-P_{-,a}^*)U(\tau_n,s)f\|$$

$$(31) \quad +\|[U(\tau_n,s)E_{-,a}(s,\tau_n)-P_{-,a}]^*U(\tau_n,s)f\|$$

$$+\|E_{-,a}(s,\tau_n)^*\chi_{\{|x|\leq R\}}\|\,\|f\|+\|E_{-,a}(s,\tau_n)^*\|\,\|\chi_{\{|x|>R\}}f\|$$

但し、R は任意の正数。

a) $P_{-,a}-P_{-,a}^*$ は compact op. ゆえ、第1項 $\to 0\ (n\to\infty)$.

b) 第2項 $= \|K_{\varepsilon,1} T_a(s,\tau_n)^* U(\tau_n,s) f\|$. 但し,

(32) $$T_a(s,\tau_n) = [U(\tau_n,s)E_{-,a}(s,\tau_n) - P_{-,a}]K_{\varepsilon,1}^{-1}.$$

ここで

$$T_a(s,\tau_n) = \int_s^{\tau_n} \frac{d}{d\tau}[U(\tau_n,\tau)E_{-,a}(\tau,\tau_n)K_{\varepsilon,1}^{-1}]\,d\tau$$
$$= \int_s^{\tau_n} U(\tau_n,\tau)\cdot(D_\tau + H(\tau))E_{-,a}(\tau,\tau_n)K_{\varepsilon,1}^{-1}\,d\tau$$

ゆえ, (28)より,

(33) $$T_a(s) \equiv \lim_{n\to\infty} T_a(s,\tau_n) \in B(L^2,L^2)$$

が $B(L^2,L^2)$ で存在する。よって,

$$\text{第2項} \le \|K_{\varepsilon,1} T_a(s)^* U(\tau_n,s) f\|$$
(34) $$+ \|K_{\varepsilon,1}[T_a(s,\tau_n) - T_a(s)]^* U(\tau_n,s) f\|$$
$$\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

c) $R>0$ を十分大きくとると, $\|\chi_{\{|x|>R\}} f\| < \varepsilon$ ($\varepsilon>0$ Given).
また, $E_{-,a}(s,\tau_n)$ が $e^{-i(s-\tau_n)H_0}P_{-,a}$ のようなものである事より(詳しくは Kitada-Yajima, Prop. 4.5 のようにする),

(35) $$\|\chi_{\{|x|\le R\}} E_{-,a}(s,\tau_n)\| \le C\langle R\rangle\langle\tau_n - s\rangle^{-1}$$

が得られる。よって,

(36) $$\text{第}(3+4)\text{項} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

以上, a)−c)より,

(37) $$\sup_{t\ge\tau_n}\|\mathrm{II}\| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

III $\quad \| \mathrm{III} - E_{+,a}(t,\tau_n) U(\tau_n, 0) f \|$

$$\leq \| U(t,\tau_n) [P_{+,a} - U(\tau_n, t) E_{+,a}(t,\tau_n)] K_{\varepsilon_1}^{-1} K_{\varepsilon_1} U(\tau_n, 0) f \|$$

ゆえ, 上のb)で用いた (28)を用いて,

$$\leq C \| K_{\varepsilon_1} U(\tau_n, 0) f \| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

をうる。

以上 I—III より,

(38) $\sup_{t \geq \tau_n} \| U(t,0) f - E_{+,a}(t,\tau_n) U(\tau_n, 0) f \| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

他方で,

(39)
$$U_0(t,0)^* E_{+,a}(t,\tau_n) g(x) = \iint e^{i[x\cdot\xi + W(s,t;\xi) - \phi^+(\tau_n,t;y,\xi)]} g(y)\, dy\, d\xi$$

と

(40) $\exists \lim_{t \to \infty} [W(s,t;\xi) - \phi^+(\tau_n, t; y, \xi)] \quad (\forall y, \xi \in R^N)$

より, (cf. Kitada–Yajima, Prop. 2.8)

(41) $\exists\, s\text{-}\lim_{t \to \infty} U_0(t,0)^* E_{+,a}(t,\tau_n) = Z_{+,a}(\tau_n, 0).$

よって, (38)と合わせて,

(42) $\sup_{t \geq \tau_n} \| U_0(t,0)^* U(t,0) f - Z_{+,a}(\tau_n, 0) U(\tau_n, 0) f \| \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$

これは, (29)の存在を示す。 $\square$

注意 定理1の(14)は, 次との仮定をみたすポテンシャル $V(t,x)$に対しては, t-independentの場合のような特異連続

部分のないことを示していると考えられる。(t-independent でいえば、 $\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}_{\text{点}\infty}(\mu) = \text{閉}(W_{\text{点}}(\mu))$ ($\mathcal{H}_{ac}$ なのだから。)

注意　以上で我々は"散乱状態"の特徴付けを行なったが、"固有状態"に対してはまだ何も行われていない。t-independent または t-periodic な場合については Ruelle [1], Amrein-Georgescu [2] または Veselić [3] がある。これを t-dependent に拡張することで、また、それを用いて t-independent の場合の固有値を space-time behavior of the particle によって計算することができれば、従来の Schrödinger 方程式を離れた、量子力学の定式化ができたと考えてよいだろう。標語的にいえば、Feynman の "space-time approach to the quantum mechanics" を徹底させることは一つの問題でありうると筆者は思う。

注意　前に Veselić の誤りについて述べたが、Veselić の preprint では abstract part には全く誤りはない。ただ、それを実際の Schrödinger 作用素に適用するとき、ポテンシャルが時間に関して periodic を仮定したとき、

$$(43) \qquad \sup_{t,\mu \in \mathbb{R}} \| U(t,\mu) \|_{H^2 \to H^2} < \infty$$

を用いて、 $f \in \mathcal{H}_c(U(s+w,s))$ ならば、 f は 定義1の i), a) をみたすことを導いている。(43) は t-independent の場合は trivial だが、 t-periodic の場合 (勿論 t-dependent のときも) 自明ではない。(43) を例えば t-periodic ポテンシャル

に対して適当な仮定のもとに示すことは一つの未解決な問題である。

文献

[1] D. Ruelle, A remark on bound states in potential-scattering theory, Nuovo Cimento, 61A (1969), 655–662.

[2] W. O. Amrein and V. Georgescu, On the characterization of bound and scattering states in quantum mechanics, Helv. Phys. Acta, 46 (1973), 635–658.

[3] K. Veselić, On the characterization of the bound and the scattering states for time-dependent Hamiltonians, preprint, Dortmund (1979).

[4] H. Kitada and K. Yajima, A scattering theory for time-dependent long-range potentials, in printing, Duke Math. J. (June, 1982).

[5] D. R. Yafaev, On the violation of unitarity in time-dependent potential scattering, Soviet Math. Dokl., 19 (1978), 1517–1521 (English trans. from Russian).

[6] H. Kitada, Time-decay of the high energy part of the solution for a Schrödinger equation, preprint (1982).