数理解析研究所講究録
第464巻 1982年 96-137

Lambシフトの数学的基礎について

東京工業大学理学部数学科　　新井朝雄

1. はじめに

よく知られているように，量子電磁力学(QED)—電子場(一般には電荷をもった素粒子の場)と電磁場との相互作用を記述する場の量子論—は，実験値をきわめて高い精度で予言する.(1) このこととゲージ不変性の原理にもとづくその理論構成の美しさ，単純さによって，QEDは素粒子物理学の現実的な基礎理論のひとつと考えられている.

そうしたQEDの輝かしい成功のひとつにLambシフトの理論がある. Lambシフトとは，実験的には，水素原子のふたつの励起状態 $2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ との間のエネルギー準位の差のことをいう.(2) これは，1947年に，従来の光学的方法では到達し得なかったマイクロ波の技術による精密な測定の結果，LambとRetherfordによって発見された.

水素原子のエネルギー準位に対するそれまでの理論的説明

は，定常的なSchrödinger方程式とDirac方程式とによるものであった．前者は正確に解くことができ，エネルギー準位に対するBohrの公式を与える．これは，しかし，いわば第1近似にすぎない．後者は，電子を相対論的にあつかうことによって前者による理論を改良したものであり，Bohrの公式だけでは説明できないエネルギー準位の2次的微細構造をよい精度で説明する．しかし，Lambシフトをも含む微細構造を説明するまでには到らなかった．(3)

Lambシフトの理論的説明を最初におこなったのはBethe[8]であった．彼は，Lambシフトは，電子の量子化された電磁場との相互作用に起因するものと考え，さらに，その相互作用によって生じる電子の電磁的質量はすでに観測質量の中に含まれているべきであるという質量のくりこみの概念を導入し，形式的な摂動計算によって，実験値をみごとに説明した．彼の計算は，電子を非相対論的にあつかうものであったが――そのために相互作用する光子の運動量を物理的に妥当な上限，すなわち，電子の静止質量以下に押えなければならなかった――，それまで，発散の困難に悩んでいたQEDをくりこみの概念を導入することによって再生させ得る可能性を指摘した点において，重要な意味をもった．実際，その後のTomonaga, Schwinger, Feynmanによるくりこみ理論の展開によって，QED

は再び命をふきかえし，Lambシフトの計算も相対論的に精密化され，また，多くのほかの現象にも適用されて，その“正しさ”が実証されていったのであった．

ところが，Lambシフトを含むこうした数々の成功にもかかわらず，QEDに対する厳密な数学的基礎づけはいまだにできてはいない.(4) Lambシフトのような系の物理的性質を数学的にきちんと議論する以前の基本的な枠組さえ，数学的に厳密な形では構成されていないのが現状である．物理量の値を具体的に求める通常の計算はすべて，形式的な枠組の中での，数学的基礎づけを欠く形式的摂動論にたよっているにすぎず，また，無限大の量をあたかも有限のごとくとりあつかうくりこみ理論も数学的には大いに問題があるといわねばならない．そんなわけで，（時空4次元の相対論的）QEDの厳密な数学的基礎づけは，構成的場の量子論のひとつの目標となっている.(5)

この小論では，ひとまず相対論的共変性は犠牲にして，Bethe［8］の理論およびこれに続くいくつかの非相対論的理論（［25］,［30］）の厳密な数学的基礎づけを目標とし，非相対論的なQEDに注意を限って，Lambシフトおよびこれに関連した数学的問題を議論したい．

そこでまず，Lambシフトについての数学的問題の要点を与

えておこう。

その第1は，Betheの計算もそうであるが，Lambシフトを，量子化された電磁場との相互作用によって生じる，非摂動系=原子のハミルトニアンの点スペクトルのずれとしてとらえ―したがって，暗に相互作用系のハミルトニアンも点スペクトルをもつものと仮定して―形式的摂動論を適用している点である．しかし，原子の励起状態が有限の寿命をもつという実験的事実―これは，光の自然放出によるもので，スペクトル線の自然幅の存在に対応している―に照らして考えるならば，また，QEDが"正しい"理論であると仮定するならば，相互作用系のハミルトニアンは，基底状態に対応する点スペクトル以外には点スペクトルをもたないことが期待され，したがって，Lambシフトは点スペクトルのずれとしては記述できないであろうことが予想される．そして，もしこうした予想が正しいとすれば，形式的摂動論によるLambシフトの計算は―その摂動級数の収束性の問題は別としても―何らかの再解釈をすることなしにはそのままでは意味をなさないであろう．実際，原子が調和振動子型である場合には，いま述べた予想の正しいことが示されるのである（3.2節を見よ）．

第2の問題として，いま少しふれたが，光の自然放出の問題がある．光の自然放出は，原子の励起状態の間の遷移をひき起こし

励起状態に有限の寿命を与えるものである．その遷移確率の計算には，時間依存型の形式的摂動論が使われる．しかし，上に述べたように，相互作用系では，励起状態に対応する点スペクトルの存在は期待しがたいので，そうした計算の数学的に厳密な意味づけが必要とされる．これは，一般化すれば時間依存型の形式的摂動論の数学的基礎づけの問題である．

以上の2点がLambシフトに関連した問題の主要な点である．

最後にこの小論の構成を述べよう．まず第2節では，一般性をもたせるために，非相対論的QEDの一般的な数学的枠組を与える．最初に述べたように，QEDは電子場と電磁場との相互作用を記述する場の量子論であるが，非相対論的なQEDは電子場を非相対論的にあつかうものである．すなわち，相互作用のないときの電子場は自由なde Broglie場の方程式（自由な1個の電子の状態ベクトルに対するSchrödinger方程式と同じ形の方程式）にしたがい，[6] 相互作用はゲージ不変性の原理によって導入される．[7] 電磁場の量子化にあたっては，Coulombゲージを用いる．また，相互作用を数学的にきちんと定義するために大きな運動量をもった光子の，相互作用への寄与は小さくなるようにする．すなわち光子の運動量の紫外切断（ultraviolet cutoff）を行なう．相互作用系の状態ベクトルのHilbert空間は，電子のFock空間と光子のそれとのテンソル積であるが，電荷の保存という超選択則[8]によって，全Hilbert空間は電荷演算子Qの固

有空間$\mathcal{H}^{(Z)}$ $(Z=0,1,2,\cdots)$—電荷Zのセクターとよばれる—の直和に分解される（すなわち，$\Psi\in\mathcal{H}^{(Z)}$に対して$Q\Psi=Z\Psi$）．全ハミルトニアンは$\mathcal{H}^{(Z)}$によって約され，$\mathcal{H}^{(Z)}$上にZ電子の相互作用ハミルトニアンが定義される．Lambシフトの理論の数学的基礎づけは，Betheの理論の観点からは，1電子の相互作用ハミルトニアンの解析によって遂行されねばならない．第3節では，1電子のハミルトニアンに注意を限って，いくつかの厳密な結果を述べる：3.1節では，電子が置かれているポテンシャルがCoulombポテンシャルをも含む一般の場合について，3.2節では，そのポテンシャルが調和振動子型の場合についての結果を与える．後者の場合，双極近似を用いることによって，場の方程式を正確に解くことができて，ハミルトニアンのスペクトルおよびLambシフトの数学的構造を明らかにすることができる．最後の節では，まだ解決されていないいくつかの興味ある問題を提出する．付録においては，ボソンFock空間とそれに関連した基本的事実を与える．

2．非相対論的量子電磁力学の一般的な数学的枠組

非相対論的QEDは，電子場を非相対論的にあつかう．すなわち，相互作用のないときの電子場$\psi(\vec{x},t)$は，de Broglie場の方程式

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta_x}{2m_0} \right)\psi(\vec{x},t) = 0, \qquad (\vec{x},t) \in R^3 \times R^1, \tag{2.1}$$

にしたがい,[1] 同時刻反交換関係[2]

$$\{\psi(\vec{x},t),\ \psi^*(\vec{y},t)\} = \delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.2}$$

$$\{\psi(\vec{x},t),\ \psi(\vec{y},t)\} = \{\psi^*(\vec{x},t),\ \psi^*(\vec{y},t)\} = 0 \tag{2.3}$$

をみたす, 演算子値超関数である. ここで, $m_0 > 0$ は電子の裸の質量で, 記号 $\{\ ,\ \}$ は

$$\{A, B\} = AB + BA \tag{2.4}$$

によって定義される. このような場 $\psi(\vec{x},t)$ とそれが作用するHilbert空間を数学的に厳密な形で構成することは容易である(後述参照).

電子場 $\psi(\vec{x},t)$ と電磁場(輻射場) $\vec{A}(\vec{x},t)$ との相互作用は, ゲージ不変性の原理にもとづいて導入される.[3] したがって, 非相対論的QEDにおける場の方程式は, 形式的には, 次の形で与えられる:

$$\left\{ i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m_0}\left(-i\vec{\nabla}_x + e\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2 \right\}\psi(\vec{x},t) = \{-eA_0(\vec{x},t) + V(\vec{x})\}\psi(\vec{x},t), \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x \right)\vec{A}(\vec{x},t) + \vec{\nabla}_x \frac{\partial A_0(\vec{x},t)}{\partial t} = \vec{j}(\vec{x},t). \tag{2.6}$$

ここで，

$$A_0(\vec{x},t) = -\int d\vec{y}\,\frac{e\,\psi^*(\vec{y},t)\,\psi(\vec{y},t)}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}, \tag{2.7}$$

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \frac{ie}{2m_0}\{(\vec{\nabla}_x - ie\vec{A}(\vec{x},t))\psi^*(\vec{x},t)\cdot\psi(\vec{x},t) - \psi^*(\vec{x},t)(\vec{\nabla}_x + ie\vec{A}(\vec{x},t))\psi(\vec{x},t)\}, \tag{2.8}$$

$-e<0$は電子の電荷であり，$V(\vec{x})$は古典的な外場（たとえば，Coulombポテンシャル）を表わす実数値関数である．なお，電磁場のゲージ条件として，Coulomb ゲージ

$$\vec{\nabla}_x\cdot\vec{A}(\vec{x},t) = 0 \tag{2.9}$$

をとった．

$\psi(\vec{x},t)$は，(2.2)，(2.3)と同じ反交換関係をみたすものとし，$\vec{A}(\vec{x},t)$は，交換関係

$$[A_\mu(\vec{x},t),\ \frac{\partial}{\partial t}A_\nu(\vec{y},t)] = i\{\delta_{\mu\nu} - \Delta_x^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{2.10}$$

$$[A_\mu(\vec{x},t),\ A_\nu(\vec{y},t)] = [\frac{\partial}{\partial t}A_\mu(\vec{x},t),\ \frac{\partial}{\partial t}A_\nu(\vec{y},t)] = 0, \tag{2.11}$$
$$\mu,\nu = 1,2,3,$$

をみたすとする．ここで，$[\ ,\ ]$は

$$[A,B] = AB - BA \tag{2.12}$$

によって定義される．また，$A_\mu(\vec{x},t)$と$\psi(\vec{y},t)$，$\psi^*(\vec{y},t)$との交換

関係および $\frac{\partial}{\partial t}A_\mu(\vec{x},t)$ と $\psi(\vec{x},t)$, $\psi^*(\vec{x},t)$ との交換関係は 0 とする。

非相対論的 QED の数学的基礎づけには，まず，上述のような性質をもつ，演算子値超関数としての場とそれが作用する Hilbert 空間を厳密な仕方で構成することが必要である．Lamb シフトのような，物理的性質を論じるのは，それからあとのこととしなければならない．

そこで，まず，自由な，相互作用のない電子場の理論から始めよう．状態ベクトルの Hilbert 空間として，電子の Fock 空間

$$\mathcal{F}_{el} = \bigoplus_{Z=0}^{\infty} \mathcal{F}_{el}^{(Z)} \tag{2.13}$$

をとる．ここで，

$$\mathcal{F}_{el}^{(Z)} = \begin{cases} \bigotimes_{as}^{Z} L^2(R^3) & (Z \geqq 1) : L^2(R^3) \text{の} Z \text{個の反対称テンソル積} \\ \mathbb{C} & (Z=0) : \text{複素数全体.} \end{cases} \tag{2.14}$$

$\mathcal{F}_{el}^{(Z)}$ は Z電子空間とよばれる．

時刻0の電子場 $\psi(f)$, $\psi^*(f)$ ($f \in L^2(R^3)$) は，$\Psi \in \mathcal{F}_{el}$ に対して，漸化的に次のように定義される：

$$(\psi(f)\Psi)^{(Z)}(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_Z) = \sqrt{Z+1}\int d\vec{x}\, f(\vec{x})\Psi^{(Z+1)}(\vec{x}, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_Z) \quad (Z \geqq 0) \tag{2.15}$$

$$(\psi^*(f)\Psi)^{(Z)}(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_Z) = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{j=1}^{Z} (-1)^{j-1} f(\vec{x}_j)\Psi^{(Z-1)}(\vec{x}_1, \cdots, \hat{\vec{x}}_j, \cdots, \vec{x}_Z) \quad (Z \geqq 1) \tag{2.16}$$

$$(\psi^*(f)\Psi)^{(0)} = 0. \tag{2.17}$$

ここで，(2.16)の右辺にあらわれる $\hat{\vec{x}}_j$ は $\vec{x}_j$ をのぞくことを示す記号である．$\psi(f)$, $\psi^*(f)$ は，$\mathcal{F}_{el}$ 上の有界演算子であり，

$$(\Phi, \psi(f)\Psi) = (\psi^*(\bar{f})\Phi, \Psi), \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{F}_{el}, \tag{2.18}$$

$$\{\psi(f), \psi^*(g)\} = \langle f, g \rangle \tag{2.19}$$

$$\{\psi(f), \psi(g)\} = \{\psi^*(f), \psi^*(g)\} = 0 \tag{2.20}$$

$$\|\psi(f)\Psi\| \leqslant \|f\|_{L^2(R^3)} \|\Psi\| \tag{2.21}$$

をみたす．ここで，

$$\langle f, g \rangle = \int d\vec{x}\, f(\vec{x}) g(\vec{x}). \tag{2.22}$$

これらのことは，定義から，容易に証明される．特に，(2.21)から，写像 $\mathcal{S}(R^3) \ni f \longrightarrow \psi(f)$ は演算子値超関数を与える．その記号的核を $\psi(\vec{x})$，すなわち，

$$\psi(f) = \int d\vec{x}\, \psi(\vec{x}) f(\vec{x}) \tag{2.23}$$

とすれば，記号的な演算子としての $\psi(\vec{x})$ の作用は，

$$(\psi(\vec{x})\Psi)^{(Z)}(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_Z) = \sqrt{Z+1}\,\Psi^{(Z+1)}(\vec{x}, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_Z) \quad (Z \geq 0), \tag{2.24}$$

$$(\psi^*(\vec{x})\Psi)^{(Z)}(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_Z) = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{j=1}^{Z} (-1)^{j-1} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)\, \Psi^{(Z-1)}(\vec{x}_1, \cdots, \hat{\vec{x}}_j, \cdots, \vec{x}_Z) \quad (Z \geq 1), \tag{2.25}$$

$$(\psi^*(\vec{x})\Psi)^{(0)} = 0, \tag{2.26}$$

となる．

<u>自由な電子場のハミルトニアン</u> $H_{0,el}$ は，

$$H_{0,el} = \bigoplus_{Z=0}^{\infty} H_{0,el}^{(Z)} \qquad (2.27)$$

によって定義される．ここで，$H_{0,el}^{(Z)}$ は，$\mathcal{F}_{el}^{(Z)}$ において

$$H_{0,el}^{(Z)} = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{Z} \frac{\Delta_{x_j}}{2m_0} & (Z \geq 1) \\ 0 & (Z=0) \end{cases} \qquad (2.28)$$

によって定義される正値な自己共役演算子である．したがって $H_{0,el}$ は，その自然な定義域上で正値な自己共役演算子となる．(2.24)，(2.25) によって，$H_{0,el}$ は，記号的に，

$$H_{0,el} = -\int d\vec{x}\, \psi^*(\vec{x}) \frac{\Delta_x}{2m_0} \psi(\vec{x}) \qquad (2.29)$$

と書くことができる．

定義から，容易に，交換関係

$$[H_{0,el}, \psi(f)]\Psi = \psi\left(\frac{\Delta f}{2m_0}\right)\Psi, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \Psi \in D(H_{0,el}), \qquad (2.30)$$

を導くことができる．自由な電子の Heisenberg 場 $\psi_{free}(f,t)$ は

$$\psi_{free}(f,t) = e^{itH_{0,el}}\psi(f)e^{-itH_{0,el}} \qquad (2.31)$$

によって定義されるが，(2.30) を用いると

$$\psi_{free}(f,t) = \psi(e^{it\Delta/2m_0} f), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \qquad (2.32)$$

となることが示される．したがって，$\psi_{free}(f,t)$，$f\in\mathcal{S}(R^3)$，はtについて強微分可能であって，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{free}(f,t)=\psi_{free}\left(-\frac{\Delta f}{2m_0},t\right) \tag{2.33}$$

となる．テスト関数fをはずした形で書けば，これは，方程式(2.1)にほかならない．$\psi_{free}(f,t)$が，演算子値超関数として，(2.2)，(2.3)をみたすことも容易に確かめられる．こうして，量子化された自由な電子場$\psi_{free}(f,t)$を得ることができた．

電子場に付随したもうひとつの重要な演算子として<u>電荷演算子</u>Qがある．これは，

$$(Q\Psi)^{(Z)}(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_Z)=Z\,\Psi^{(Z)}(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_Z)\quad(Z\geq 0) \tag{2.34}$$

によって定義される．すなわち，Qは多電子系の全電荷の絶対値を固有値とする演算子であって，$\mathcal{F}_{el}^{(Z)}$は，Qの固有値Zに属する固有空間である．Qは，記号的には，

$$Q=\int d\vec{x}\,\psi^*(\vec{x})\psi(\vec{x}) \tag{2.35}$$

で与えられる．

次に，電磁場に関する基本的な事柄を述べよう．状態ベクトルのHilbert空間として，<u>Coulombゲージにおける，光子のFock空間</u>

$$\mathcal{F}_{em}=\mathcal{F}_b\otimes\mathcal{F}_b \tag{2.36}$$

をとる．ここで，$\mathcal{F}_b$はボソンFock空間である（付録を参照）．

光子の生成演算子 $a^{(r)*}(f)$ および消滅演算子 $a^{(r)}(f)$，$r=1,2$，$f\in L^2(\mathbf{R}^3)$，は

$$a^{(1)\#}(f) = a^{\#}(f)\otimes I,\quad a^{(2)\#}(f) = I\otimes a^{\#}(f), \tag{2.37}$$

によって定義される．ここで，$a^{\#}(f)$は，ボソンの生成演算子または消滅演算子を表わす．$a^{(r)\#}(f)$は，有限光子ベクトルの空間

$$\mathcal{F}_{em,0} = \mathcal{F}_0\otimes\mathcal{F}_0 \tag{2.38}$$

上で定義され（$\mathcal{F}_0$は$\mathcal{F}_b$における有限粒子ベクトルの空間），それを不変にし，

$$(a^{(r)}(f)\Phi, \Psi) = (\Phi, a^{(r)*}(\bar{f})\Psi),\quad \Phi,\Psi\in\mathcal{F}_{em,0}, \tag{2.39}$$

$$[a^{(r)}(f), a^{(s)*}(g)] = \delta_{rs}\langle f, g\rangle \tag{2.40}$$

$$[a^{(r)}(f), a^{(s)}(g)] = [a^{(r)*}(f), a^{(s)*}(g)] = 0 \tag{2.41}$$

をみたす．

時刻0の電磁場（輻射場）$\vec{A}(f)$は，

$$A_\mu(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{2}\left\{a^{(r)*}\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}e_\mu^{(r)}\right) + a^{(r)}\left(\frac{\tilde{\hat{f}}}{\sqrt{\omega}}e_\mu^{(r)}\right)\right\} \tag{2.42}$$

$$\mu=1,2,3,\quad \hat{f}/\sqrt{\omega}\in L^2(\mathbf{R}^3),$$

によって定義される．ここで，$\hat{f}$はfのFourier変換で

$$\tilde{\hat{f}}(\vec{k}) = \hat{f}(-\vec{k}). \tag{2.43}$$

$\omega(\vec{k})$は，運動量$\vec{k}$の，1個の自由な光子のエネルギーである：

$$\omega(\vec{k}) = |\vec{k}|. \tag{2.44}$$

ベクトル $\vec{e}^{(r)}(\vec{k}) \in \mathbf{R}^3$ は，光子の偏極ベクトルで，

$$\left.\begin{aligned} &|\vec{e}^{(r)}(\vec{k})| = 1, \quad \vec{e}^{(1)}(\vec{k}) \times \vec{e}^{(2)}(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|, \\ &\vec{e}^{(r)}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{e}^{(r)}(\vec{k}) = (-1)^{r-1} \vec{e}^{(r)}(-\vec{k}), \quad r = 1, 2, \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

をみたすものとし，$\vec{k}$ の大きさに依らず，方向のみに依るとする．

自由な電磁場のハミルトニアン $H_{0,em}$ は，$H_{0,b}$ を質量0の，自由な中性スカラー場のハミルトニアン（付録参照）とするとき，

$$H_{0,em} = H_{0,b} \otimes I + I \otimes H_{0,b} \tag{2.46}$$

として定義される．$H_{0,em}$ は，正値な自己共役演算子である．

付録において与えられた評価 (A.18)，(A.19) を用いると，不等式

$$\| a^{(r)}(f) \Psi \| \leq \left\| \frac{f}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| H_{0,em}^{1/2} \Psi \|, \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} &\| a^{(r)*}(f) \Psi \| \leq \left\| \frac{f}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| H_{0,em}^{1/2} \Psi \| + \| f \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| \Psi \|, \\ &\qquad r = 1, 2, \quad f, f/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbf{R}^3), \\ &\qquad \Psi \in D(H_{0,em}^{1/2}) \end{aligned} \tag{2.48}$$

を示すことができる（[2, Lemma 3.1]）．これらの不等式を使えば，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ におけるあるセミノルム $|||\cdot|||$ が存在して，

$$\begin{aligned} &\| A_\mu(f) \Psi \| \leq |||f||| \, \| (H_{0,em} + 1)^{1/2} \Psi \|, \\ &\qquad \mu = 1, 2, 3, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3), \ \Psi \in D(H_{0,em}^{1/2}) \end{aligned} \tag{2.49}$$

となることがわかる．したがって，$A_\mu(f)$は演算子値超関数である．その記号的核を$A_\mu(\vec{x})$，すなわち，

$$A_\mu(f)=\int d\vec{x}\,A_\mu(\vec{x})f(\vec{x}) \tag{2.50}$$

とすれば，(2.42)から，

$$A_\mu(\vec{x})=\sum_{r=1}^{2}\int d\vec{k}\,\frac{e_\mu^{(r)}(\vec{k})}{\sqrt{2(2\pi)^3|\vec{k}|}}\left\{a^{(r)*}(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}}+a^{(r)}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}}\right\} \tag{2.51}$$

となる.[4] ただし，$a^{(r)\#}(\vec{k})$は，$a^{(r)}(f)$の記号的核である：

$$a^{(r)}(f)=\int d\vec{k}\,a^{(r)}(\vec{k})f(\vec{k}). \tag{2.52}$$

以上の準備のもとに，相互作用のはいった理論の構成に進もう．状態ベクトルのHilbert空間$\mathcal{H}$は，電子のFock空間と光子のそれとのテンソル積である：

$$\mathcal{H}=\mathcal{F}_{el}\otimes\mathcal{F}_{em}. \tag{2.53}$$

$\mathcal{F}_{el}$ ($\mathcal{F}_{em}$)で稠密に定義された可閉演算子 A (B)は，$A\otimes I$ ($I\otimes B$)として，$\mathcal{H}$において稠密に定義された閉演算子へと自然に拡張される．その拡張も単に同じ記号A(B)で書くことにする．

$\mathcal{H}$はQの固有空間$\mathcal{H}^{(Z)}$の直和に分解される：

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{Z=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(Z)}. \qquad (2.54)$$

ここで,

$$\mathcal{H}^{(Z)} = \mathcal{F}_{el}^{(Z)} \otimes \mathcal{F}_{em}. \qquad (2.55)$$

分解(2.54)は，電荷の保存というひとつの超選択則 の表現である. $\mathcal{H}^{(Z)}$ を超選択セクター または 電荷Zのセクター とよぶ.

相互作用系の全ハミルトニアン H は

$$H = \bigoplus_{Z=0}^{\infty} H^{(Z)} \qquad (2.56)$$

によって定義される. ここで, $H^{(Z)}$ は, $\mathcal{H}^{(Z)}$ における演算子で, 形式的に,

$$H^{(0)} = 0 \qquad (2.57)$$

$$H^{(1)} = \frac{1}{2m_0} :(-i\vec{\nabla}_x + e\vec{A}_p(\vec{x}))^2: + V(\vec{x}) + H_{0,em}, \qquad (2.58)$$

$$H^{(Z)} = \sum_{j=1}^{Z} \left\{ \frac{1}{2m_0} :(-i\vec{\nabla}_{x_j} + e\vec{A}_p(\vec{x}_j))^2: + V(\vec{x}_j) \right\} + \sum_{1 \leq j < k \leq Z} \frac{e^2}{4\pi |\vec{x}_j - \vec{x}_k|} + H_{0,em}, \quad (Z \geq 2) \qquad (2.59)$$

として与えられる. ここで, $\vec{A}_p(\vec{x})$ は, $\vec{A}(\rho)$ において, $\hat{\rho}(\vec{k})$ を $\hat{\rho}(\vec{k}) \times \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x})$ で置き換えることによって得られる演算子であり,

記号的には，

$$\vec{A}_\rho(\vec{x}) = \int d\vec{y}\, \rho(\vec{x}-\vec{y})\vec{A}(\vec{y}) \tag{2.60}$$

によって定義されるものである．ρはR^3上の実数値関数で，ここでは，簡単のため，

$$\left.\begin{array}{l} \rho \text{ は } |\vec{x}| \text{ のみに依存する } \mathcal{S}(R^3) \text{ の関数で} \\ \hat{\rho} > 0, \quad \int \rho(\vec{x})d\vec{x} = 1 \end{array}\right\} \tag{2.61}$$

と仮定する．ρは，物理的には，電磁場と相互作用する電子の"ひろがり"を記述するものであり，運動量空間で考えるならば，$\hat{\rho}$は，電子の，大きな運動量をもった光子との相互作用を小さくする働きをする．すなわち，$\hat{\rho}$は光子の運動量の紫外切断(ultraviolet cutoff)関数である．また，$:\ :$はWick積(5)を表わす．

外場$V(\vec{x})$に対しては，Coulombポテンシャルの場合が含まれるように

$$V \in L^\infty(R^3) + L^2(R^3) \tag{2.62}$$

と仮定しておく．

注意：ρは$H^{(2)}$が$\mathcal{H}^{(2)}$において，数学的にきちんと定義されるために必要とされる(後述参照)．場の方程式(2.5)，(2.6)のように，真に局所的，すなわち，同一時空点での場の相互作用を考えるならば，$\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$としなければならない．しかし，$\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$の場合，すなわち，局所場の理論は，現在までの

ところ，直接つくることはできず，まず，ρを含む"準局所的"理論をつくっておき，しかるのちに，$\rho(\vec{x})\to\delta(\vec{x})$の"極限"をとることによって，$\rho(\vec{x})=\delta(\vec{x})$の理論を定義するという手続きをふまなければならない．$\rho(\vec{x})\to\delta(\vec{x})$という"極限"をとるときに，くりこみが必要とされるのである．

ハミルトニアンHは，記号的には，

$$H=\int d\vec{x}\,\psi^*(\vec{x})\left\{\frac{1}{2m_0}:(-i\vec{\nabla}_x+e\vec{A}_\rho(\vec{x}))^2:+V(\vec{x})\right\}\psi(\vec{x})$$
$$+\frac{1}{2}\int d\vec{x}d\vec{y}\,\psi^*(\vec{x})\psi^*(\vec{y})\frac{e^2}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\psi(\vec{y})\psi(\vec{x})+H_{0,em}$$
(2.63)

と書くことができる．

ハミルトニアンHに対する第1の数学的問題は，それが本質的に自己共役かどうか，あるいは，少なくともひとつの自己共役拡張をもつかどうかを調べることである．

不等式(2.47)，(2.48)を使うと，$\hat{f}/\omega$，$\hat{f}/\sqrt{\omega}\in L^2(R^3)$となるような$f$に対して，

$$\|A_\mu(f)^2\Psi\|\leqslant\alpha(f)\|H_{0,em}\Psi\|+\beta(f)\|\Psi\|,\quad\Psi\in D(H_{0,em}),$$
(2.64)

$$\|\nabla_\mu\cdot A_\mu(f)\Psi\|\leqslant\gamma(f)\|(-\Delta+H_{0,em})\Psi\|+\delta(f)\|\Psi\|,$$
$$\Psi\in D(-\Delta)\cap D(H_{0,em})\subset\mathcal{H}^{(1)},\quad(2.65)$$

が示される．ここで，$\alpha(f), \beta(f), \gamma(f), \delta(f)$ は f に依存する正定数である．

$$V^{(Z)} = \sum_{j=1}^{Z} V(\vec{x}_j) \qquad (Z \geqq 1) \tag{2.66}$$

$$U^{(Z)} = \sum_{1 \leqq j < k \leqq Z} \frac{e^2}{4\pi |\vec{x}_j - \vec{x}_k|} \qquad (Z \geqq 2) \tag{2.67}$$

とおけば，

$$\| V^{(Z)} \Psi \| \leqq a \| H_{0,el}^{(Z)} \Psi \| + b \| \Psi \|, \quad \Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)}), \tag{2.68}$$

$$\| U^{(Z)} \Psi \| \leqq a \| H_{0,el}^{(Z)} \Psi \| + b \| \Psi \|, \quad \Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)}), \tag{2.69}$$

が成立する．ここで，$0 < a < 1$ ととることができる（たとえば，[26 , X.2] を見よ）．したがって，$H^{(Z)}$ $(Z \geqq 1)$ は，$D(H_{0,el}^{(Z)}) \cap D(H_{0,em})$ で定義され，しかも，対称な演算子であることがわかる．したがって，全ハミルトニアン H は，その自然な定義域上で対称な演算子である．

さて，$H^{(Z)}$ および H の自己共役性の問題に対しては，次の結果を証明することができる．

<u>定理 2.1.</u> V は，仮定 (2.62) に加えて，下に有界であるとしよう．このとき，$H^{(Z)}$ $(Z \geqq 1)$ は Friedrichs 拡張 $\hat{H}^{(Z)}$ をもち，ある定数 $c \geqq 0$ が存在して

$$\hat{H}^{(Z)} \geq -cZ \tag{2.70}$$

をみたす。さらに，

$$D((\hat{H}^{(Z)}+cZ)^{1/2}) = D(H_{0,el}^{(Z)\,1/2}) \cap D(H_{0,em}^{1/2}). \tag{2.71}$$

<u>証明</u>. $H^{(Z)}$ $(Z \geq 1)$ が Friedrichs 拡張をもち，それが (2.70) をみたすことは，$H^{(Z)}$ の下界性

$$H^{(Z)} \geq -(\alpha + \frac{e^2}{2m_0}\|\frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\omega}}\|^2_{L^2(R^3)})Z \tag{2.72}$$

からわかる．ここで，$V \geq -\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ とした．したがって，たとえば，$c = [\alpha + (e^2\|\hat{\rho}/\sqrt{\omega}\|^2_{L^2(R^3)}/2m_0)]$ とればよい．問題は (2.71) を示すことである．そのために，Friedrichs 拡張の方法にもどる．すなわち，2次形式

$$q(\Phi,\Psi) = (\Phi, H^{(Z)}\Psi) + (\alpha + \frac{e^2}{2m_0}\|\frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\omega}}\|^2_{L^2(R^3)})Z(\Phi,\Psi),$$
$$\Phi, \Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)}) \cap D(H_{0,em}), \tag{2.73}$$

を考え，その閉包を具体的に求める．(2.68), (2.69) とから，

$$\|(V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}\Psi\| \leq a\|H_{0,el}^{(Z)\,1/2}\Psi\| + b'\|\Psi\|, \tag{2.74}$$

$$\|U^{(Z)\,1/2}\Psi\| \leq a\|H_{0,el}^{(Z)\,1/2}\Psi\| + b'\|\Psi\|, \tag{2.75}$$
$$\Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)\,1/2})$$

が導かれる（[26, X.2, 定理X.18] の応用）．さて，$\Psi_n \in D(H_{0,el}^{(Z)})$

$\cap D(H_{0,em})$ が，$\Psi_n \to \Psi \in \mathcal{H}^{(Z)}$，$q(\Psi_n-\Psi_m, \Psi_n-\Psi_m) \to 0$ $(n,m\to\infty)$ をみたすとしよう．このとき，$(-i\nabla_{x_j,\mu}+eA_{\rho,\mu}(x_j))\Psi_n$，$(V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}\Psi_n$ $U^{(Z)\,1/2}\Psi_n$，$H_{0,em}^{1/2}\Psi_n$ は，いずれも，$\mathcal{H}^{(Z)}$ におけるCauchy列をなす．$(V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}$，$U^{(Z)\,1/2}$，$H_{0,em}^{1/2}$ は自己共役演算子，したがって，閉演算子であるので，$\Psi \in D((V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}) \cap D(U^{(Z)\,1/2}) \cap D(H_{0,em}^{1/2})$ であり，

$$(V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}\Psi_n \longrightarrow (V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}\Psi,\quad U^{(Z)\,1/2}\Psi_n \longrightarrow U^{(Z)\,1/2}\Psi \tag{2.76}$$

$$H_{0,em}^{1/2}\Psi_n \longrightarrow H_{0,em}^{1/2}\Psi \tag{2.77}$$

となる．(2.49)と(2.77)によって，$A_{\rho,\mu}(x_j)\Psi_n \to A_{\rho,\mu}(x_j)\Psi$，したがって，$-i\nabla_{x_j,\mu}\Psi_n$ もCauchy列をなし，$-i\nabla_{x_j,\mu}$ の閉性によって，$\Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)1/2})$ でもあること，および $-i\nabla_{x_j,\mu}\Psi_n \to -i\nabla_{x_j,\mu}\Psi$ となることがわかる．こうして，$\Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)1/2}) \cap D(H_{0,em}^{1/2})$ かつ $\hat{q}(\Psi_n-\Psi, \Psi_n-\Psi) \to 0$ であることがわかった．ここで，$\hat{q}$ は $D(H_{0,el}^{(Z)1/2}) \cap D(H_{0,em}^{1/2})$ 上の2次形式で，

$$\begin{aligned}\hat{q}(\Phi,\Psi) = \sum_{j=1}^{Z} \frac{1}{2m_0}\big((-i\vec{\nabla}_{x_j}+e\vec{A}_\rho(\vec{x}_j))\Phi, (-i\vec{\nabla}_{x_j}+e\vec{A}_\rho(\vec{x}_j))\Psi\big) \\ +\big((V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}\Phi, (V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}\Psi\big) \\ +(U^{(Z)\,1/2}\Phi, U^{(Z)\,1/2}\Psi)+(H_{0,em}^{1/2}\Phi, H_{0,em}^{1/2}\Psi), \\ \Phi,\Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)1/2}) \cap D(H_{0,em}^{1/2}).\end{aligned} \tag{2.78}$$

によって定義される．一方，任意の $\Psi \in D(H_{0,el}^{(Z)1/2}) \cap D(H_{0,em}^{1/2})$ に対して

$\Psi_n \to \Psi$，$H_{0,el}^{(Z)1/2}\Psi_n \to H_{0,el}^{(Z)1/2}\Psi$，$H_{0,em}^{1/2}\Psi_n \longrightarrow H_{0,em}^{1/2}\Psi$ となる点列 $\{\Psi_n\} \subset D(H_{0,el}^{(Z)}) \cap D(H_{0,em})$ がとれる．このとき，(2.74),(2.75) (2.49) によって，$(V^{(Z)}+\alpha Z)^{1/2}(\Psi_n-\Psi) \to 0$，$U^{(Z)1/2}(\Psi_n-\Psi) \to 0$，$(-i\nabla_{x_j,\mu}+eA_{\rho,\mu}(x_j))(\Psi_n-\Psi) \to 0$ となるので，$q(\Psi_n-\Psi_m, \Psi_n-\Psi_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$ である．したがって，$\tilde{q}$ は q の閉包であることがわかる．ゆえに，$H^{(Z)}+C$ の Friedrichs 拡張は，閉2次形式 $\tilde{q}$ から定まる自己共役演算子である．したがって，(2.71) が成立する． ■

この定理から，ただちに次が得られる．

系 2.1. V は定理3.1と同じ仮定をみたすとする．このとき，H は自己共役拡張

$$\hat{H} = \bigoplus_{Z=0}^{\infty} \hat{H}^{(Z)} \tag{2.79}$$

をもつ．

注意．(1) ρ と Z に依存する正数 $r(\rho, Z)$ が存在して，$|e| < r(\rho, Z)$ ならば，$H^{(Z)}$ $(Z \geq 1)$ は，$D(H_{0,el}^{(Z)}) \cap D(H_{0,em})$ 上で自己共役であり，下に有界であることが示される（V の下界性の仮定は必要ない）．これは，不等式 (2.64)，(2.65)，(2.68)，(2.69) と Kato-Rellich の定理を応用することによって証明される．しかし，この証明では，$Z \to \infty$ のとき，$r(\rho, Z) \to 0$ となってしまうので，H の自己共役性はいえない．

(2) 双極近似のハミルトニアン H_{dp} は

$$H_{dp}=\bigoplus_{Z=0}^{\infty}H_{dp}^{(Z)} \tag{2.80}$$

$$H_{dp}^{(0)}=0$$

$$H_{dp}^{(1)}=\frac{1}{2m_0}:(-i\vec{\nabla}_x+e\vec{A}(\rho))^2:+V(\vec{x})+H_{0,em}, \tag{2.81}$$

$$H_{dp}^{(Z)}=\sum_{j=1}^{Z}\frac{1}{2m_0}:(-i\vec{\nabla}_{x_j}+e\vec{A}(\rho))^2:+V^{(Z)}+U^{(Z)}+H_{0,em},$$
$$(Z\geqq 2), \tag{2.82}$$

によって定義される。これに対しては，[3] と同様な仕方で，Vに対する仮定(2.62)のもとで，$H_{dp}^{(Z)}$ $(Z\geqq 1)$ は $D(H_{0,el}^{(Z)})\cap D(H_{0,em})$ 上で自己共役であり，下に有界であること，$H_{0,el}^{(Z)}+H_{0,em}$ の任意の核(core)上で本質的に自己共役であることがすべての e に対して証明できる．したがって，H_{dp} は本質的に自己共役である．

次に，相互作用場の構成を与えよう．Vは定理3.1の仮定をみたすとし，

$$\hat{H}_R^{(Z)}=\hat{H}^{(Z)}-E(\rho)Z \qquad \geqq 0 \tag{2.83}$$

とおく．ここで，$E(\rho)\geqq 0$ は，(2.70)をみたすCの下限である．そして，全ハミルトニアンを

$$\hat{H}_R=\bigoplus_{Z=0}^{\infty}\hat{H}_R^{(Z)} \tag{2.84}$$

と定義しなおす．$\hat{H}_R$ は正値な自己共役演算子である．このハミルトニアンを用いて，Heisenberg 場 ― 相互作用場 ― は，

$$\psi(f,t) = e^{it\hat{H}_R}\psi(f)e^{-it\hat{H}_R}, \tag{2.85}$$

$$\vec{A}(f,t) = e^{it\hat{H}_R}\vec{A}(f)e^{-it\hat{H}_R}, \quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \tag{2.86}$$

によって定義される．(2.49)を用いると，ある$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$のセミノルム$|||\cdot|||$が存在して，2次形式の意味で，

$$|A_\mu(f)| \leqq |||f|||\,(\hat{H}_R+1) \tag{2.87}$$

となることが示せるので，$\vec{A}(f,t)$は$D(\hat{H}_R^{1/2})$上で定義される．$\psi(f,t)$, $A_\mu(f,t)$ともに演算子値超関数であるが，その記号的核を$\psi(\vec{x},t)$, $A_\mu(\vec{x},t)$とすれば，それらは演算子値超関数の意味で，適当な定義域上で，$\rho(\vec{x})\to\delta(\vec{x})$の極限で(2.5), (2.6)に形式的に一致するような類似の場の方程式をみたすことが示される(ただし，(2.5)に対応する場の方程式の右辺に，$-E(\rho)\psi(\vec{x},t)$という補正項がつく)．

以上が非相対論的QEDの概略である．しかし，Lambシフトの理論の数学的基礎づけの問題は，Betheの理論の観点からは，全空間$\mathcal{H}$上で考える必要はなく，電荷1のセクター$\mathcal{H}^{(1)}$上で考えればよい．すなわち，ハミルトニアン$H^{(1)}$の解析が主な問題となる．

最後に，Lambシフトの問題のひとつの数学的特徴を述べておこう．1電子のくりこまれたハミルトニアン$H^{(1)}_{ren}$は

$$H^{(1)}_{ren} = \frac{1}{2(m-\delta m)}:(-i\nabla_x + e\vec{A}_\rho(\vec{x}))^2: + V(\vec{x}) + H_{0,em} \tag{2.89}$$

によって定義される．ここで，δmは質量のくりこみで，

$$\delta m = \frac{2}{3} e^2 \int d\vec{k} \, \frac{\hat{\rho}(\vec{k})^2}{|\vec{k}|^2} \tag{2.90}$$

によって与えられる．$H^{(1)}_{ren}$ は，$H^{(1)}$ において $m_0 \to m - \delta m$ とおきかえて得られるもので，$m > 0$ は電子の物理的(観測)質量を表わす。

注意：
$$\frac{1}{m-\delta m} = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\delta m}{m}\right)^n$$

と形式的に展開し，e^2 のオーダーまでとった，双極近似のハミルトニアン

$$H^{(1)\prime}_{ren} = \frac{1}{2m} :(-i\vec{\nabla}_x + e\vec{A}(\rho))^2: + V(\vec{x}) + H_{0,em} + \frac{\delta m}{2m^2}(-\Delta_x) \tag{2.91}$$

は，$\vec{A}(\rho)^2$ の項をのぞけば，Bethe [8] の計算に使われたハミルトニアンと同じである．ただし，V は Coulomb ポテンシャルとし，$\hat{\rho}(\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2} \chi_{[0,m]}(|\vec{k}|)$ にとる（$\chi_{[0,m]}$ は，閉区間 $[0, m]$ 上の定義関数）．

$H^{(1)}_{ren}$ は，

$$H^{(1)}_{ren} = H_0 + H_I + R, \tag{2.92}$$

$$H_0 = -\frac{\Delta_x}{2m} + V + H_{0,em} \tag{2.93}$$

$$H_I = \frac{e}{m}(-i\vec{\nabla}_x)\cdot\vec{A}_\rho(\vec{x}) + :\frac{e^2}{2m}\vec{A}_\rho(\vec{x})^2:, \tag{2.94}$$

$$R = \frac{\delta m}{2m(m-\delta m)} :(-i\vec{\nabla}_x + e\vec{A}_\rho(\vec{x}))^2: \tag{2.95}$$

という形に書くことができ，H_0 を非摂動系＝原子のハミルトニアン，

H_I を電子と場との相互作用，R をくりこみの補正項とみなせる．

いま，水素原子の場合のように，非摂動原子が

$$\sigma_d\left(-\frac{\Delta}{2m}+V\right)=\{E_n^{(0)}\}_{n=0}^{N}\quad(E_0^{(0)}<E_1^{(0)}<\cdots)\qquad(2.96)$$
$$(N=\infty \text{ も許す})$$

$$\sigma_{ess}\left(-\frac{\Delta}{2m}+V\right)=[a,\infty),\qquad(2.97)$$

というスペクトルの構造をもつとしよう．ここで，σ_d，σ_{ess} は，それぞれ，離散スペクトル，真性スペクトルを表わし，$a\geq\sup_n E_n$ で，$\sup_n E_n=\infty$ のときは，$\sigma_{ess}\left(-\frac{\Delta}{2m}+V\right)=\phi$ とする．このとき，

$$\sigma(H_0^{(1)})=[E_0^{(0)},\infty),\quad\sigma_p(H_0^{(1)})=\{E_m^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}\qquad(2.98)$$

となる．ここで，σ_p は点スペクトルを表わす．これは，$\sigma(H_{0,em})=[0,\infty)$，$\sigma_p(H_{0,em})=\{0\}$ であることおよび自己共役演算子のテンソル積についてのスペクトルの性質から導かれる．(2.98) において注目すべきことは，H_0 の点スペクトル ― 非摂動系＝原子のエネルギー準位 ― は連続スペクトルの中に埋めこまれているということである．したがって，$H_{ren}^{(1)}$ のスペクトル解析は，数学的には，連続スペクトルの中に埋めこまれた固有値に対する摂動の問題という形をとる．この問題は，一般的に解析することは難しく，これまでのところ，摂動の演算子が単純な場合とか，有限自由度の量子力学のいくつかのモデルにおいてのみ詳しく解析されているだけであり（たとえば，[9]，[14]，[15]，[28]，[27, XII. 6] を見よ），$H_{ren}^{(1)}$ に適用できるだけの一般論はつくられてはいないようである．われわれの

モデルのもつ難しさのひとつの点は，それが無限自由度の量子力学系に関するものであるということにある.

3. 1電子問題におけるいくつかの結果

前節の終わりで述べたように，Lambシフトの問題のひとつの定式化は，電荷1のセクター上でなされる. 解析の基本的対象は(2.89)によって与えられた，くりこまれた，1電子に対するハミルトニアン $H^{(1)}_{ren}$ である.

3.1. 一般的な結果

赤外切断 $K>0$ を入れたハミルトニアン $H^{(1)}_{ren,K}$ を

$$H^{(1)}_{ren,K} = \frac{1}{2(m-\delta m(K))} :(-i\vec{\nabla} + e\vec{A}_\rho(\vec{x};K))^2: + V + H_{0,em} \tag{3.1}$$

によって定義する. ここで，$\vec{A}_\rho(\vec{x};K)$ は $\vec{A}_\rho(\vec{x})$ において，$\hat{\rho}(\vec{k})$ を $\hat{\rho}(\vec{k}) \times \chi_{[K,\infty)}(|\vec{k}|)$ ($\chi_{[K,\infty)}$ は $[K,\infty)$ 上の定義関数) で置きかえることによって得られる演算子，$\delta m(K)$ は δm において，$\hat{\rho}(\vec{k})$ を $\hat{\rho}(\vec{k}) \times \chi_{[K,\infty)}(|\vec{k}|)$ としたものである. $H^{(1)}_{ren,K}$ は，運動量の大きさが K よりも小さい光子の相互作用を切断したハミルトニアンである. このとき，$H^{(1)}_{ren,K}$ のスペクトルの基本的性質として，次の定理が得られる.

定理3.1. $m > \delta m$ とする. V は，仮定(2.62)をみたし，しかも，$-\frac{\Delta}{2m} + V$ のスペクトルの下部構造が(2.96)のようであるとし，各 $E_j^{(0)}$ の多重度を m_j とする. このとき，$E_j^{(0)} < E_0^{(0)} + K$ となる各 $E_j^{(0)}$ に対して，ρ, K に依存する正数 $r_j(\rho, K)$ が存在して，$|e| < r_j(\rho, K)$

ならば，$H^{(1)}_{ren,K}$ は，$E^{(0)}_j$ の近くに m_j 個の（必ずしも異なららない）固有値をもつ；それらの固有値は e について解析的である．さらに，

$$E_0(\rho, K) = \inf \sigma(H^{(1)}_{ren,K}) \tag{3.2}$$

とすれば，これは，$|e| < r_0(\rho, K)$ のとき，$H^{(1)}_{ren,K}$ の固有値であって，

$$\sigma(H^{(1)}_{ren,K}) = \sigma_{a.c.}(H^{(1)}_{ren,K}) = [E_0(\rho, K), \infty) \tag{3.3}$$

が成立する．ここで，$\sigma_{a.c.}(H^{(1)}_{ren,K})$ は，$H^{(1)}_{ren,K}$ の絶対連続スペクトルを表わす．

この定理の証明は，[20]，[16]，[1] によって展開された漸近場の方法 および 電子と質量0のボソンが相互作用する系の"衣をつけた1電子状態"（dressed one electron states）の証明（[10,11]）に使われるテクニックとを応用することによって達成される．詳細は [2]，[3] を見よ（これらの文献では，双極近似のハミルトニアンが使われているが，証明の方法は全く同様である）．

3.2. 調和振動子型原子の場合

この場合は，振動子のバネ定数を $\omega_0 > 0$ とすれば，

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \vec{x}^2 \tag{3.4}$$

である．この節では，双極近似を用いることにして，双極近似のハミルトニアンをあらためて H_{ren} と書くことにする：

$$H_{ren} = \frac{1}{2(m-\delta m)} :(-i\vec{\nabla} + e\vec{A}(\rho))^2: + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \vec{x}^2 + H_{0,em}. \tag{3.5}$$

また，

$$H_0 = \frac{-\Delta}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \vec{x}^2 + H_{0,em} \tag{3.6}$$

とおく.

注意: 双極近似を用いる本質的な点は, Hren に対する Heisenberg 方程式を正確に解けること—これは, Hren が力学変数について2次形式となることによる—, したがって, Hren の詳しいスペクトル解析が可能となる点にある.

Hren の自己共役性については, 次の定理が成立する.

定理3.2. H_{ren} は H_0 の任意の核上で本質的に自己共役である. 特に, $m > \delta m$ ならば, H_{ren} は $D(H_0)$ 上で自己共役であって, しかも, 下に有界である. $m < \delta m$ ならば, H_{ren} は下に有界ではない.

証明は [6] を見よ.

上の定理の最後の主張は, $m < \delta m$ の場合, Hren の基底状態が存在しないことを示す.

Hren のスペクトルについては, 次の定理が得られる.

定理3.3.

(1) $m > \delta m$ とし,

$$E_0 = \inf \sigma(H_{ren}) \tag{3.7}$$

とおく. このとき,

$$\sigma(H_{ren}) = \sigma_{a.c.}(H_{ren}) = [E_0, \infty), \quad \sigma_p(H_{ren}) = \{E_0\} \tag{3.8}$$

固有値 E_0 の多重度は1である.

(2) $m < \delta m$ ならば,

$$\sigma(H_{ren}) = \sigma_{a.c.}(H_{ren}) = \mathbb{R}^1, \quad \sigma_p(H_{ren}) = \phi. \tag{3.9}$$

証明は [6] を見よ.

$$E_n^{(0)} = (n + \frac{3}{2})\omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.10}$$

とおけば,

$$\sigma(H_0) = [E_0^{(0)}, \infty), \quad \sigma_p(H_0) = \{E_n^{(0)}\} \tag{3.11}$$

であるので, 定理3.3は, 電磁場の摂動のもとで, H_0のすべての点スペクトル ($m > \delta m$の場合は, 最小の点スペクトル以外の) が消えてしまうことを示している. したがって, 第1節で述べたように, Lambシフトを与える形式的摂動論は, そのままでは, 意味をなさず, 何らかの再解釈が必要となる.

そこで, まず, 形式的摂動論に関連したいくつかの事実を述べよう. $\Psi_{n,j}^{(0)}$, $n \geq 0$, $j = 1, \cdots, M_n \equiv (n+1)(n+2)/2$ (M_nは$E_n^{(0)}$の多重度) を固有値$E_n^{(0)}$に属するH_0の固有ベクトル, $\{P^{(0)}(E)\}$をH_0に対するスペクトル射影の族とし,

$$\varepsilon_{n,j}(z) = -(\Psi_{n,j}^{(0)}, H_I^{(1)}(H_0 - z)^{-1}(1 - P^{(0)}(E_n^{(0)}))H_I^{(1)}\Psi_{n,j}^{(0)}) \tag{3.12}$$

とおく. ここで,

$$H_I^{(1)} = \frac{e}{m}(-i\vec{\nabla}) \cdot \vec{A}(\rho) \tag{3.13}$$

である. $\varepsilon_{n,j}(z)$は, $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_0)$において解析的であり,

$$\mathcal{E}_{n,j} \equiv \lim_{\substack{z \to E_n^{(0)} \\ \mathrm{Im}\, z > 0}} \mathcal{E}_{n,j}(z), \qquad n \geq 0,\ j = 1, \cdots, M_n, \tag{3.14}$$

が存在することがわかる．そこで，

$$E_{n,j}^{(2)}(e) = E_n^{(0)} + \mathrm{Re}\, \mathcal{E}_{n,j} + (\Psi_{n,j}^{(0)}, H_I^{(2)} \Psi_{n,j}^{(0)}) + (\Psi_{n,j}^{(0)}, \frac{\delta m}{2m^2}(-\Delta) \Psi_{n,j}^{(0)}) \tag{3.15}$$

とおく．ここで，

$$H_I^{(2)} = \frac{e^2}{2m} : \vec{A}(p)^2 :. \tag{3.16}$$

$E_{n,j}^{(2)}(e)$ は，"摂動されたエネルギー準位" に対する，e^2 のオーダーまでの，形式的摂動展開である（たとえば，[19，第2章]）．このオーダーまでの "エネルギー準位のずれ"（Lamb シフト）は

$$\delta E_{n,j}^{(2)}(e) = E_{n,j}^{(2)}(e) - E_n^{(0)} \tag{3.17}$$

によって与えられる．一方，時間依存型の形式的摂動論（"黄金法則"）（たとえば，[22]）は，

$$\Gamma_n^{(2)} \equiv -2\, \mathrm{Im}\, \mathcal{E}_{n,j} > 0 \tag{3.18}$$

を，$\Psi_{n,j}$ の ― e^2 のオーダーまでの ― "崩壊確率" として与える．この崩壊は，光の自然放出によるものである．

さて，Heisenberg 場

$$\vec{A}(f,t) = e^{itH_{ren}} \vec{A}(f) e^{-itH_{ren}}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),\ t \in \mathbb{R}^1, \tag{3.19}$$

$$\vec{x}(t) = e^{itH_{ren}} \vec{x} \, e^{-itH_{ren}}, \tag{3.20}$$

$$\vec{p}(t) = e^{itH_{ren}} (-i\vec{\nabla}) \, e^{-itH_{ren}}, \tag{3.21}$$

に対して，2点τ－関数（$m > \delta m$の場合）

$$\tau_{\mu\nu}^{(h)}(t-s) = (\Omega, T[x_\mu(t) x_\nu(s)]\Omega), \tag{3.22}$$

$$\tau_{\mu\nu}^{(EM)}(f, g\,; t-s) = (\Omega, T[A_\mu(f,t) A_\nu(g,s)]\Omega), \tag{3.23}$$

$$\tau_{\mu\nu}^{(EM,h)}(f\,; t-s) = (\Omega, T[A_\mu(f,t) p_\nu(s)]\Omega) \tag{3.24}$$

を考える．ここで，Ωは H_{ren} の基底状態，$T(\cdot)$は時間順序積を表わす：

$$T(A(t)B(s)) = \theta(t-s)A(t)B(s) + \theta(s-t)B(s)A(t). \tag{3.25}$$

（$\theta(\cdot)$は Heaviside 関数）

$\tau_{\mu\nu}^{(EM)}(f, g\,; t)$は，各$t$に対して，$\mathcal{S}(R^3) \times \mathcal{S}(R^3)$上の連続線形汎関数であり，したがって，$\mathcal{S}(R^6)$上のそれに拡張され，$\tau_{\mu\nu}^{(EM,h)}(f;t)$は，$\mathcal{S}(R^3)$上の連続線形汎関数である．それらの核を$\tau_{\mu\nu}^{(EM)}(\vec{x}, \vec{y}\,; t)$，$\tau_{\mu\nu}^{(EM,h)}(\vec{x}\,; t)$と書き，その$t$についての Fourier 変換を$\hat{\tau}_{\mu\nu}^{(EM)}(\vec{x}, \vec{y}\,; E)$，$\hat{\tau}_{\mu\nu}^{(EM,h)}(\vec{x}\,; E)$とする．また，

$$\mathbb{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \}, \tag{3.26}$$

$$\Pi_- = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z < 0 \} \tag{3.27}$$

とおく．このとき，次の定理を得る([6])．

定理3.4. $m > \delta m$とし，ρは，仮定(2.61)に加えて，

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\rho}(|\vec{k}|) \text{は } \Pi_- \text{の上へ解析接続をもち} \\ \qquad \hat{\rho}(z) = O(|z|^{-3/2}) \ (|z| \to \infty) \end{array}\right\} \tag{3.28}$$

をみたすとしよう. このとき, $\hat{\tau}_{\mu\nu}^{(h)}(E)$, $\hat{\tau}_{\mu\nu}^{(EM)}(\vec{x},\vec{y};E)$, $\hat{\tau}_{\mu\nu}^{(EM,h)}(\vec{x};E)$ は ($\vec{x},\vec{y}$; 固定) Eの関数として, $(0,\infty)$から$\mathbb{C}_+$へ有理型の解析接続をもち, ある定数$\lambda>0$が存在して, $|e|<\lambda$ならば, これらの接続関数は, 共通に, Π_-においてただひとつの1位の極$\xi(e)$をもつ. $\xi(e)$はeの解析関数で, $e\to 0$のとき, $\xi(e)\to\omega_0$となる. $\xi(e)$のTaylor展開を

$$\xi(e)=\omega_0+a_1e+a_2e^2+\cdots,\quad |e|<\lambda$$

とすれば, 次が成立する.

(1) $a_1=0$, $\mathrm{Im}\,a_2<0$.

(2) $\Gamma_n^{(2)}(e)=-2ne^2\,\mathrm{Im}\,a_2$, $n\geq 0$

(3) $\delta E_{n,j}^{(2)}(e)=\delta E_{0,1}^{(2)}(e)+ne^2\,\mathrm{Re}\,a_2$, $n\geq 0$, $j=1,\cdots,M_n$.

この定理は, "エネルギーのずれ" (Lambシフト) と "崩壊確率" に対する形式的摂動展開が——少なくともeの2次のオーダーまでは——2点τ-関数のエネルギー変数についての解析性を通して意味づけられることを示している.(1)

注意: 一般のn点τ-関数は, 2点τ-関数の積の和として書けるので, 2点τ-関数について議論しておけば十分である.

4. おわりに

おわりにあたって, いくつかの問題を述べておく.

(1) ハミルトニアン$H^{(2)}$の解析

定理2.1よりさらに強く，$H^{(2)}$の本質的自己共役性はいえるか．また，$H^{(2)}$のスペクトルの性質はどうか．$H^{(2)}$で定義される系の統計力学はどのようなものか（これについては，Fröhlich - Park [13]の研究がある）．$\rho \to \delta(x)$の極限はとれるか．

(2) くりこまれたハミルトニアン $H^{(1)}_{ren}$ ((2.89))のさらに詳しい解析．

$V=0$の場合に，"衣をつけた1電子状態" (dressed one electron states)の存在を証明し，散乱理論を構成できるか．その際に，散乱の全断面積は，低エネルギー極限で，Thomsonの断面積となるか．これに対して，双極近似の場合については，Arai [7]の研究がある．

Vが調和振動子型でない場合についても，定理3.4と同様なことがいえないか．

* * *

付録． ボソンFock空間に関連した基本的な事実

1. $L^2(R^3)$上のボソンFock空間 $\mathcal{F}_b$：

$$\mathcal{F}_b = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_b^{(n)}, \tag{A.1}$$

ここで，

$$\mathcal{F}_b^{(n)} = \begin{cases} \bigotimes_s^n L^2(R^3) & (n \geq 1)：L^2(R^3)\text{の}n\text{個の対称テンソル積} \\ \mathbb{C} & (n=0)：\text{複素数全体} \end{cases} \tag{A.2}$$

$\mathcal{F}_b^{(n)}$は，nボソン空間とよばれる．

2. ボソン消滅演算子 (annihilation operator) $a(f)$ および生成演算子 $a^*(f)$：

$f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\Phi = \{\Phi^{(n)}\} \in \mathcal{F}$ に対して，

$$(a(f)\Phi)^{(n)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \sqrt{n+1}\int d\vec{k}\, f(\vec{k})\, \Phi^{(n+1)}(\vec{k}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n),\quad n \geq 0 \tag{A.3}$$

$$(a^*(f)\Phi)^{(n)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} f(\vec{k}_j)\, \Phi^{(n-1)}(\vec{k}_1, \dots, \hat{\vec{k}}_j, \dots, \vec{k}_n),\quad n \geq 1, \tag{A.4}$$

$$(a^*(f)\Phi)^{(0)} = 0. \tag{A.5}$$

として定義される．ここで，(A.4)の右辺において，$\hat{\vec{k}}_j$ は $\vec{k}_j$ をのぞくことを示す記号である．

$$\mathcal{F}_0 = \{\Phi \in \mathcal{F} \mid \text{十分大きな } n \text{ すべてに対して } \Phi^{(n)} = 0\} \tag{A.6}$$

は，有限粒子ベクトルの空間とよばれ，$\mathcal{F}_b$で稠密である．

$a(f)$と$a^*(f)$は，$\mathcal{F}_0$上で定義される可閉演算子であり，$\mathcal{F}_0$を不変にし，

$$(a(f)\Phi, \Psi) = (\Phi, a^*(\bar{f})\Psi),\quad \Phi, \Psi \in \mathcal{F}_0, \tag{A.7}$$

$$[a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle \tag{A.8}$$

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0 \tag{A.9}$$

をみたす．ここで，

$$[A, B] = AB - BA. \tag{A.10}$$

3. 粒子数演算子(number operator) N :

$$(N\Phi)^{(n)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = n\,\Phi^{(n)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n),\quad n \geq 0. \tag{A.11}$$

Nは，その自然な定義域上で，正値な自己共役演算子である．

Schwarzの不等式を使って，次の不等式を得ることができる：

$$\| a(f)\Psi \| \leq \| f \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| N^{\frac{1}{2}}\Psi \|, \tag{A.12}$$

$$\| a^*(f)\Psi \| \leq \| f \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| (N+1)^{1/2}\Psi \|, \quad \Psi \in \mathcal{F}_0. \tag{A.13}$$

4. 質量 $m \geq 0$ の，自由な中性スカラー場に対するハミルトニアン $H_{0,b}$:

$$(H_{0,b}\Psi)^{(n)}(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\vec{k}_j^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \right) \Psi^{(n)}(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_n) \tag{A.14}$$

$$(H_{0,b}\Psi)^{(0)} = 0. \tag{A.15}$$

$H_{0,b}$ は自己共役であり，そのスペクトルは，

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(H_{0,b}) = \{0\} \cup [m, \infty), \quad \sigma_p(H_{0,b}) = \{0\} \\ \sigma_{a.c.}(H_{0,b}) = [m, \infty) \end{array} \right\} \tag{A.16}$$

で与えられる．なお，固有値 0 の多重度は 1 で，それに対応する，$H_{0,b}$ の，ノルム 1 の固有ベクトルを Fock 真空とよぶ．これを Ω_0 と記せば，

$$\begin{array}{l} \Omega_0^{(n)} = 0; \quad n \geq 1, \\ \Omega_0^{(0)} = 1. \end{array} \tag{A.17}$$

次の不等式が成立する（[2, Lemma A.1]）．

$$\| a(f)\Psi \| \leq \left\| \frac{f}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| H_{0,b}^{1/2} \Psi \|, \tag{A.18}$$

$$\| a^*(f)\Psi \| \leq \left\| \frac{f}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| H_{0,b}^{1/2}\Psi \| + \| f \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \| \Psi \|, \tag{A.19}$$

$$f,\ f/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbf{R}^3), \quad \Psi \in D(H_{0,b}^{1/2}).$$

ここで，

$$\omega(\vec{k}) = (\vec{k}^2 + m^2)^{1/2}. \tag{A.20}$$

132

注意: $m \neq 0$ のときは, $f \in L^2(R^3)$ ならば, $f/\sqrt{\omega} \in L^2(R^3)$ であるが, $m = 0$ のときは, 必ずしもそうにはならない.

注

第1節

(1) 文献[21]を見よ.

(2) $2S_{1/2}$の方が$2P_{1/2}$にくらべて,約1000メガヘルツ高い.最近の実験値に対しては,文献[21]を見よ.

(3) de Broglie流の物質波動場の理論(これは,純然たる古典論である)の観点からすれば,Dirac方程式は――確率解釈を許す状態ベクトルに対する方程式ではなく――古典電子場に対する場の方程式である.したがって,Dirac方程式を用いた,水素原子のエネルギー準位の計算は,Coulombポテンシャルという外場と相対論的な電子場との相互作用系に対する古典場の理論であって,それによって,Lambシフトが説明できないことは,古典場の理論の限界を示すひとつの例といえるであろう.実際,QEDは,古典電子場と電磁場との相互作用系を"量子化"したものであり,これによってはじめてLambシフトを説明できたのである.なお,物質波動場の理論が純然たる古典論であること,特に物質場の方程式(たとえば,1電子問題に対するSchrödinger方程式と形を同じくする,古典的なde Broglie場の方程式)と純粋に量子論的な,状態ベクトルに対するSchrödinger方程式との概念的区別は,朝永振一郎「量子力学II」,1952,みすず書房に,ていねいに説明されている.

(4) ここでの話は,時空4次元での,相対論的QEDについてである.時空2次元のQEDについては,いくつかの厳密な結果が得られている.たとえば,[17,18],[12],[29]を見よ.

(5) 構成的場の量子論については,たとえば,[23]を見よ.

(6) 相対論的QEDではDirac方程式である.

(7) 電荷をもった素粒子の場と電磁場との相互作用をゲージ不変性の原理によって導入する仕方については, たとえば, [24, 3,4節]を見よ.

(8) 超選択則については, ボゴリューボフ他「場の量子論の数学的方法」(東京図書, 1972)の2章1.3節を参照.

第2節

(1) $\hbar$ (Planck定数) $= c$ (真空中の光速度) $=1$ の単位系で考える. また, 電磁単位は, 有理化されたGauss単位系を用いる.

(2) 簡単のため, 電子のスピンは無視する.

(3) 第1節の注(7).

(4) これが物理の文献にあらわれる, 標準的な形である.

(5) Wick積は, 生成演算子と消滅演算子の積

$$A^{(r_1,\cdots,r_n)}(f_1,\cdots,f_n) = a^{(r_1)\#}(f_1)\,a^{(r_2)\#}(f_2)\cdots a^{(r_n)\#}(f_n)$$

に対して,

$$:A^{(r_1,\cdots,r_n)}(f_1,\cdots,f_n): = [A^{(r_1,\cdots,r_n)}(f_1,\cdots,f_n)\text{の中に含まれる生成演算子の積}] \times [A^{(r_1,\cdots,r_n)}(f_1,\cdots,f_n)\text{の中に含まれる消滅演算子の積}]$$

によって定義され, $a^{(r)*}(f)$ と $a^{(r)}(f)$ の多項式に対しては, 線形性によって拡張する. われわれの場合,

$$:(-i\vec{\nabla} + e\vec{A}_p(\vec{x}))^2: = (-i\vec{\nabla} + e\vec{A}_p(\vec{x}))^2 - e^2\left\|\frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\omega}}\right\|^2_{L^2(R^3)}$$

となる.

第3節

(1) 一次元調和振動子と質量0のスカラー場とが相互作用しているモデルについても同様の結果が成立する. [4], [5]を見よ.

REFERENCES

1. S. Albeverio, An introduction to some mathematical aspects of scattering theory in models of quantum fields, in Scattering Theory in Mathematical Physics (J.A.Lavita and J.P.Marchand eds.),Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1974, 299-281.

2. A. Arai, Some rigorous results of nonrelativistic quantum electrodynamics, preprint (Univ. of Tokyo), 1980.

3. A. Arai, Self-adjointness and spectrum of Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics, J.Math.Phys., 22(1981), 534-537.

4. A. Arai, On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. I, J.Math.Phys., 22(1981), 2539-2548.

5. A. Arai, On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. II, J.Math.Phys., 22(1981), 2549-2552.

6. A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a harmonic oscillator atom interacting with a quantized electromagnetic field, to appear in J.Math. Phys.

7. A. Arai, A note on scattering theory in nonrelativistic quantum electrodynamics, preprint (Tokyo Institute of Technology), 1982.

8. H.A. Bethe, the electromagnetic shift of energy levels, Phys.Rev., 72(1947), 339-341.

9. K.O. Friedrichs, On the perturbation of continuous spectra, Commun.Pure Appl.Math., 1(1948), 361-406.

10. J. Fröhlich, Existence of dressed one electron states in a class of persistent models, Fortsch.Phys., 22(1974), 159-198.

11. J.Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless scalar bosons, Ann.Inst.Henri Poincaré, Sec.A, 19(1973), 1-103.

12. J. Fröhlich and E. Seiler, The massive Thirring-Schwinger model (QED_2): convergence of perturbation theory and particle, Helv.Phys.Act., 49(1976), 889-924.

13. J. Fröhlich and Y.M. Park, Correlation inequalities and the thermodynamic limit for classical and quantum countinuous systems, II Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics, preprint (I.H.E.S.), 1980.

14. J.S. Howland, Perturbations of embedded eigenvalues, Bull.A.M.S., 78(1972), 280-283.

15. J.S. Howland, Puiseux series for resonances at an eigenvalue, Pac.J.Math., 55 (1974), 157-176.

16. R. Hoegh-Krohn, On the spectrum of the space cut-off :P(ϕ): Hamiltonian in two space-time dimensions, Commun.Math.Phys., 21(1971), 256-260.

17. K.R. Ito, Construction of two-dimensional quantum electrodynamics, J.Math. Phys., 21(1980), 1473-1494.

18. K.R. Ito, Construction of Euclidean $(QED)_2$ via lattice gauge theory, Commun. Math.Phys., 83(1982), 537-561.

19. T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, 2nd ed., 1976.

20. Y. Kato and N. Mugibayashi, Regular perturbation and asymptotic limits of operators in quantum field theory, Progr.Theor.Phys., 30(1963), 103-133.

21. 木下東一郎, 量子電磁力学の現状, 江沢・恒藤 編「量子物理学の展望 上」(岩波, 1977) の 12章.

22. L. Landau and E. Lifshitz, Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1958.

23. 麦林布道, 場の理論, 江沢・恒藤 編「量子物理学の展望 下」(岩波, 1978) の 30章.

24. 中西襄, 「場の量子論」培風館, 1975.

25. E.A. Power and S. Zienau, Coulomb gauge in non-relativistic quantum electrodynamics and the shape of spectral lines, Trans.R.Phil.Soc.London, A251 (1959), 427-454.

26. M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics Vol.II, Academic, New York, 1975.

27. M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics Vol.IV, Academic, New York, 1978.

28. B. Simon, Resonances in N-body quantum systems with dilatation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory, Ann.Math., 97(1973), 247-274.

29. D.H. Weingarten and J.L.Challifour, Continuum limit of QED_2 on a lattice, Annals of Phys., 123(1979), 61-101.

30. T.A. Welton, Some observable effects of quantum mechanical fluctuations of the electromagnetic field, Phys.Rev., 74(1948), 1157-1167.