

Index of Reducibility of Parameter
Ideals of a Local Ring, II

日本大学文理学部 後藤四郎
静岡薬科大学 鈴木直義

30. 序:

第3回可換環論セミナー(1981年11月4日~7日)に於て、表記題名の準備中の論文を紹介する講演をしました。その直後に、いくつかの本質的な発展がありました。それらを中心に、今回の研究集会で、3回に渡り講演上せていただき、参加諸氏から、率直な御意見をいただきました。本論に入る前に、長時間の講演に熱心に付き合い、講演者にとって、貴重な御意見、御助言をいただきましたことに、深く感謝いたします。本稿では、講演の全内容を詳述することはありませんので [0] を読んでいただくこととして、又上述の可換環セミナー報告集に書いたことは省略させていただきます。その続きとして、その付記に述べた事項について説明させていただきます。

尚、今回の研究集会では、この講演に関連して、「可約指数について」と題して、青山陽一氏が、歴史的な背景として、沢山の文献をしらべあげた結果を報告されました。Gorenstein環 ないしは、Cohen-Macaulay環が可換環論の中で、徐々に一定の位置を占め始めた時期に、idealの既約性をめぐる議論がどのようにからんできたのかを知る上で、非常に参考になりました。

以下、特にことわらないうえに、 (A, \mathfrak{M}) は Noetherian 局所環とします。

§1. quasi-Buchsbaum 加群の Index of reducibility について.

(1.1) 定義. \mathfrak{a} を A の \mathfrak{M} -primary ideal, M を有限生成 A -加群とする. \mathfrak{a} の M での Index of reducibility を次のように定義する.

$$N_A(\mathfrak{a}; M) := \dim_{\mathfrak{M}} ((\mathfrak{a}M; \mathfrak{M}) / \mathfrak{a}M),$$

即ち, A -加群 $M/\mathfrak{a}M$ の socle の次元である. socle の次元はしばしば登場するので, $\nu(\)$ であらわすことにする.

我々の主な目的は, \mathfrak{a} として, M の parameter ideal of

(つまり、最小生成系の個数 $\mu_A(\mathfrak{q})$ が M の次元に一致する ideal \mathfrak{q} で $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$ となるもの) について、 $N_A(\mathfrak{q}; M)$ の上限が有限な値をもつか否かである。そこで、さらに次の定義をする: $\mathcal{I}_A(M) := \sup \{ \mathcal{I}^c(M/\mathfrak{q}M); \mathfrak{q} \text{ は } M \text{ の parameter ideal} \}$.

又、より一般に、 $n \geq \dim M$ に対して、

$$\mathcal{I}_n(M) := \sup \{ \mathcal{I}^c(M/N); N \text{ は } M \text{ の部分加群で、} \mu_A(N) \leq n \text{ かつ } \ell_A(M/N) < \infty \}.$$

既に [1] で述べた結果の主なものをまとめると次のようになる。

(1.2) 定理 (i) ((1.3)[1]). $\dim M = 1$ のとき、 $\sup_n \mathcal{I}_n(M) < \infty$.

従って、特に、 $\dim A = 1$ ならば $\mathcal{I}(A) < \infty$.

(ii) ((1.2)[1]). $\dim M = 2$ とすると、任意の n に対して、

$\mathcal{I}_n(M) < \infty$. 特に、 $\dim A = 2$ ならば $\mathcal{I}(A) < \infty$.

(iii) ((1.8)[1]). $\dim A = 3$ で \hat{A} が (S_2) を満たすときは、 $\mathcal{I}(A) < \infty$.

(1.3) 定理 ((1.5)[1]). 有限生成 A -加群 M が、有限生成な local cohomologies をもつとする (i.e., $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ は有限生成, $\forall i < \dim(M)$).

すると、 $\mathcal{I}(M) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(M) + \mu_A(K_{\hat{A}})$.

ここで、 $h^i(M) := \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^i(M))$, $K_{\hat{A}} := \text{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^d(M), E_A(\hat{A}/\mathfrak{m}))$ かつ

$d = \dim M$ とする。

以上の結果をふまえて、以下新たに証明された事実を述べることにする。まず、(1.3) は次のようなより精密な評価に発展した。

(1.4) 定理. 有限生成 A -加群 M が有限生成な local cohomologies をもつとき、($d = \dim M$ として)

$$\Gamma_A(M) \cong \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \mathcal{H}^i(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

従って、 $\mathcal{H}^i(H_{\mathfrak{m}}^d(M)) = \mu_A(K_{\mathfrak{m}})$ に注意すると、もし任意の $i < \dim M$ に対して、

$$\mathcal{H}^i(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) = 0$$

が成立するとき、

$$\Gamma_A(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(M) + \mu_A(K_{\mathfrak{m}}).$$

この証明は、 $\dim M$ に関する帰納法による。その際次の2つの重要な事実を援用する。

(1.5) Proposition. (c.f. (1.6) [1]). M が有限生成 A -加群で、 $d = \dim M > 0$, a を M -regular element とする。すると十分大なる全ての n に対して、

✕

$$\text{Hom}_A(A/a^n A, H_{a^n A}^i(M/a^n M)) \longrightarrow \text{Hom}_A(A/a^n A, H_{a^n A}^{i+1}(M))$$

は、 $\forall i \geq 1$ に $\forall n \geq 1$, surjective である。

特に、 M が有限生成 local cohomologies をもつ場合は、

$$\mathcal{F}(H_{a^n A}^i(M/a^n M)) = \mathcal{F}(H_{a^n A}^i(M)) + \mathcal{F}(H_{a^n A}^{i+1}(M)),$$

$i = 1, 2, \dots, d-1, \forall n \geq 0$. (a は必ずしも M -regular で

(注意) (1.5) の第 2 の主張は、必ずしも、有限生成 local cohomologies をもつ加群でなくとも成立するように思える。

(1.6) Proposition. M を有限生成 local cohomologies をもつ有限生成 A -加群 とする。 $d = \dim M \geq 1$, a を M の parameter (i.e., $\dim M/aM < \dim M$ となる A の元) とすると、十分大きな $n \geq 0$ に対して、

$$\mathcal{F}(M/a^n M) = \mathcal{F}(M) + \mathcal{F}(H_{a^n A}^1(M))$$

が成立する。

(1.5) の略証. $a_1 = a, a_2, \dots, a_d$ を M の s.o.p. とし、 $\underline{a}^n = \{a_1^n, \dots, a_d^n\}$ とすると、

$$\varinjlim H^i(\underline{a}^n; M) = H_{\underline{a}^n}^i(M),$$

ただし、 $H^i(\underline{a}^n; M) = H_{d-i}(\underline{a}^n; M)$ は、 \underline{a}^n で生成された M 上の Koszul homology である。

$n \gg 0$ とすると, 各 $H_{\text{lim}}^i(M)$ の socle は $H^i(\underline{a}^n; M)$ の socle の limit map による image となるように出来る. かかる n に対して, $x_i = a_i^n$ ($i = 1, \dots, d$) とする. 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^i(\underline{x}; M) & \rightarrow & H^i(\underline{x}; M/x_1M) & \xrightarrow{\delta} & H^{i+1}(\underline{x}; M) & \rightarrow 0 \quad : \text{exact} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & H_{\text{lim}}^i(M) & \rightarrow & H_{\text{lim}}^i(M/x_1M) & \rightarrow & H_{\text{lim}}^{i+1}(M) & \xrightarrow{x_1} \quad : \text{exact} \end{array}$$

我々の主張の証明には, $H^{i+1}(\underline{x}; M)$ の socle が δ による $H^i(\underline{x}; M/x_1M)$ の socle から写ってくることを示せば十分である. $x_1 = a_1^n$ が M -regular であることから, 次の lemma により δ は split することになり, 証明は完了する.

(1.7) Lemma. M が有限生成 A -加群, $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ を A の要素の系列とする. 特に, x_1 は M -regular とする. すると, 次の完全系列は split する.

$$0 \longrightarrow H_p(\underline{x}; M) \longrightarrow H_p(\underline{x}; M/x_1M) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(\underline{x}; M) \longrightarrow 0.$$

証明. まず, $K_*(x_2, \dots, x_r; M)$ の differential map を e_* であらわすと, $K_p(x_2, \dots, x_r; M) = K_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M) \oplus K_p(x_2, \dots, x_r; M)$ で, $K_*(x_1, \dots, x_r; M)$ の differential map d_* は,

↓

$(u, v) \in K_p(\underline{x}; M) = K_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M) \oplus K_p(x_2, \dots, x_r; M)$ に対して,

$$d_p(u, v) = (-e_{p-1}(u), x_1 u + e_p(v))$$

で与えられることに注意する。 M のかわりに $M/x_1 M$ によって考える場合, differential map は \bar{e} であらわし, $(u, v) \in K_p(\underline{x}; M)$ の $K_p(\underline{x}; M/x_1 M)$ での image は (\bar{u}, \bar{v}) 等であらわすこととする。

まず, connecting homomorphism を具体的に表わす。

$(\bar{u}, \bar{v}) \in Z_p(\underline{x}; M/x_1 M)$ に対して, $[\bar{u}, \bar{v}]$ でその homology class をあらわすことにすると,

$$\delta([\bar{u}, \bar{v}]) = [s, t]:$$

ただし, $(s, t) \in Z_{p-1}(\underline{x}; M)$ は, (\bar{u}, \bar{v}) の cycle conditions

$$-e_{p-1}(u) = x_1 s,$$

$$x_1 u + e_p(v) = x_1 t$$

により決る。一方, x_1 が $M/x_1 M$ を満たすことから

$$H_p(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M) = H_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M) \oplus H_p(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M)$$

であり, 実は, さらに, 次の同型が存在する:

$$\lambda: H_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M) \longrightarrow H_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_r; M).$$

実際, まず, $\bar{\beta} \in Z_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M)$ に対して, $-\bar{e}_{p-1}(\bar{\beta}) = 0$

だから,

$$e_{p-1}(\beta) = x_1 d \in x_1 K_{p-2}(x_2, \dots, x_r; M).$$

すると, $x_1(-d) + e_{p-1}(\beta) = 0$. さらに,

$$x_1 e_{p-2}(d) = e_{p-2}(x_1 d) = e_{p-2} \circ e_{p-1}(\beta) = 0.$$

7

x_1 は M -regular であるから $e_{p-2}(\alpha) \in K_{p-3}(x_2, \dots, x_r; M) \cong M^{\binom{r}{p-2}}$ であるから $e_{p-2}(\alpha) = 0$ を得る. (ただし, $p=2$ の場合は, 無条件に $e_{p-2}(\alpha) = 0$).

従って, $(-\alpha, \beta) \in Z_{p-1}(x_1, \dots, x_r; M)$. 従って,

$$\lambda([\bar{\beta}]) = [-\alpha, \beta] \in H_{p-1}(x_1, \dots, x_r; M)$$

とある. Well-defined であること: $\bar{\beta} = \bar{e}_p(\bar{\sigma})$ ($\exists \sigma \in K_p(x_2, \dots, x_r; M)$)

とすると, $\beta - e_p(\sigma) = x_1 \mu \in x_1 K_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M)$, 又,

$$x_1 \alpha = e_{p-1}(\beta) = x_1 e_{p-1}(\mu).$$

x_1 が M -regular であるから $\alpha = e_{p-1}(\mu)$. 従って, $(-\alpha, \beta) = d_p(\mu, \sigma)$.

λ は injective である: $(-\alpha, \beta) = d_p(\mu, \sigma)$ とすると,

$$-\alpha = -e_{p-1}(\mu), \quad x_1 \mu + e_p(\sigma) = \beta. \quad \text{従って, 特に, } \bar{\beta} = \bar{e}_p(\bar{\sigma}).$$

λ は surjective である: $(\alpha, \beta) \in Z_{p-1}(x_1, \dots, x_r; M)$ に対して,

$$x_1 \alpha + e_{p-1}(\beta). \quad \text{従って, } \bar{\beta} \in Z_{p-1}(x_2, \dots, x_r; M/x_1 M).$$

λ の定義から, $\lambda([\bar{\beta}]) = [\alpha, \beta]$.

最後に, λ は, 下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc}
 H_p(\underline{x}; M/x_1 M) & \xrightarrow{\quad S \quad} & H_{p-1}(\underline{x}; M) \\
 \parallel & & \nearrow \lambda \\
 H_{p-1}(x_2, \dots, x_d; M/x_1 M) & & \\
 \oplus & & \\
 H_p(x_2, \dots, x_d; M/x_1 M) & & \\
 \uparrow & & \\
 H_{p-1}(x_2, \dots, x_d; M/x_1 M) & &
 \end{array}$$

実際, $[\bar{\beta}] \in H_{p+1}(x_2, \dots, x_r; M/a_1 M)$ に対して, $([\bar{\beta}], [\bar{\sigma}]) = [\bar{\beta}, \bar{\sigma}]$.

$$-e_{p+1}(\beta) = x_1 \alpha$$

$$x_1 \beta + e_p(\sigma) = x_1 \xi$$

とおくと, $e_{p+1}(\beta) = x_1 \alpha$ より, $-x_1 \alpha = x_1 \xi$ で $-\alpha = \xi$. 又,

$x_1 \beta = x_1 \xi$ より $\beta = \xi$ を得る. かくて,

$$S([\bar{\beta}, \bar{\sigma}]) = [\alpha, \xi] = [-\alpha, \beta] = \lambda[\bar{\beta}]. \quad (\text{Q. E. D.})$$

次に, (1.6) の証明に移るが, 本質的な部分は, [3] の proposition (3.1) の証明の修正である.

(1.6) の証明. まず, a の適当な巾を考えるとにより,

$$(0; a) = H_M^0(M)$$

としてよい. $\forall n \geq 2$ に対して, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_M^0(M) & \longrightarrow & M/a^n M & \xrightarrow{\pi} & M/(a^n M + H_M^0(M)) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \uparrow i & & \\ & & & & & & M/(aM + H_M^0(M)) & & \\ & & & & \swarrow j & & & & \end{array}$$

ここで, i と j は それぞれ 次のように定義する.

$$i(x \bmod aM + H_M^0(M)) = a^{n-1}x \bmod a^n M + H_M^0(M),$$

$$j(x \bmod aM + H_M^0(M)) = a^{n-1}x \bmod a^n M.$$

$\forall m \geq 1$ に対して, $(0; a^m) = H_M^0(M)$ であるから i が injective

なることは容易に検証される. $\text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, *)$ を作用させると,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, H_{\mathcal{N}}^0(M)) \rightarrow \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, M/a^m M) \longrightarrow \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, M/a^m M + H_{\mathcal{N}}^0(M))$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, j) & \nearrow \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, i) \\ & \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, M/a^m M + H_{\mathcal{N}}^0(M)) & \end{array}$$

$\forall m \geq 1$ に対して,

$$\text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, M/a^m M + H_{\mathcal{N}}^0(M)) \cong \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, H_{\mathcal{N}}^1(M))$$

が成立することを示せば, 所期の事実の全てが証明される.

完全系列

$$0 \rightarrow M/H_{\mathcal{N}}^0(M) \xrightarrow{a^m} M/H_{\mathcal{N}}^m(M) \longrightarrow M/a^m M + H_{\mathcal{N}}^0(M) \rightarrow 0$$

より, 次の完全系列を得る:

$$0 \rightarrow H_{\mathcal{N}}^0(M/a^m M + H_{\mathcal{N}}^0(M)) \rightarrow H_{\mathcal{N}}^1(M/H_{\mathcal{N}}^0(M)) \xrightarrow{a^m} H_{\mathcal{N}}^1(M/H_{\mathcal{N}}^0(M))$$

これに $\text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, *)$ を作用させると, 同型

$$\text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, H_{\mathcal{N}}^0(M/a^m M + H_{\mathcal{N}}^0(M))) \cong \text{Hom}_A(A/\mathcal{N}, H_{\mathcal{N}}^1(M/H_{\mathcal{N}}^0(M)))$$

を得る. $H_{\mathcal{N}}^1(M/H_{\mathcal{N}}^0(M)) \cong H_{\mathcal{N}}^1(M)$ に注意すると必要の同型

を得たことになる. (Q.E.D.)

(1.8) 注意. よく知られているように, Buchsbaum module M については,

$$(*) \quad \text{Ext}_R^i(M) = 0 \quad \text{for } \forall i \neq \dim M$$

が成立する. もちろん, (*) を満たす Buchsbaum ではない

環 (加群) は 十分沢山存在する, (例えば, [T] 例 1.4, p.61).

かかる加群は、次に述べるようなは、きりした特徴付けがある。

(1.9) 定理 + 定義. ([8] 又は [5]) M を有限生成 A -加群とすると、次の条件は同値である。

(i) $\forall i \neq \dim M$ に対して, $\text{Ext}_A^i(M) = 0$

(ii) \mathcal{M}_2 に含まれる, M の s.o.p. は全て, weak M -sequence を成す。

(iii) \mathcal{M}_2 に含まれる長さが $\dim M$ の weak M -sequence が存在する。

上記の同値条件を満す加群を quasi-Buchsbaum 加群と呼ぶこととする。環 A が A -加群として, quasi-Buchsbaum 加群のときに A を quasi-Buchsbaum 環と呼ぶ。

§2. 3次元の局所環 A の $\mathcal{L}(A)$ について.

既に [1] で, $\forall d \geq 4$ に対して, $\dim A = d$ で, $\mathcal{L}(A) = \infty$ となる環 A の例の構成法を述べた。従って, 本節では, まだ未解決のままであった, 一般の3次元の局所環 A に対する $\mathcal{L}(A) < \infty$ の証明を与える。即ち,

(2.1) 定理. (A, \mathcal{M}) が 3次元の Noetherian 局所環 ならば $\mathcal{L}(A) < \infty$.

まず 次の Lemma から始める。

//

(2.2) Lemma. C を有限生成 A -加群で $\dim C = 2$ とすると,
 $\sup\{\mathcal{J}(D)\}; D \text{ は } H_1(a,b;C) \text{ の homomorphic image で, } a,b \text{ は } C \text{ の s.o.p.}\} < \infty.$

証明. A は complete としてよい。 $U = U_C(0)$ を (1) の C の中で
 の準素分解の、次元が 2 の成分とする、(即ち、 $\dim C/U = 2$ かつ
 C/U は unmixed.)。このとき、 C/U は、有限生成な local cohomologies
 を持つ。又、 $\dim U \leq 1$ 。 a, b を C の s.o.p. とする。
 完全系列

$$0 \rightarrow U \rightarrow C \rightarrow C/U \rightarrow 0$$

より、 a, b に関する Koszul homology の exact sequence を得る:

$$H_1(a,b;U) \longrightarrow H_1(a,b;C) \xrightarrow{\pi} H_1(a,b;C/U) \longrightarrow \dots$$

D を $H_1(a,b;C)$ の任意の homomorphic image とする。適当な
 D'', D' により、次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(a,b;U) & \longrightarrow & H_1(a,b;C) & \longrightarrow & \mathcal{J}_m(\pi) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D'' & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D' \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\mathcal{F}(D)$ を上からおさえるには, $\mathcal{F}(D)$ と $\mathcal{F}(D')$ とをおさえるは十分である. まず, $\mathcal{J}_m(\mathbb{R}) \subset H_1(a, b; C/U)$ だから,

$$\mathcal{F}(D') \leq \mathcal{L}_A(\mathcal{J}_m(\mathbb{R})) \leq \mathcal{L}_A(H_1(a, b; C/U)) \leq 2h^0(C/U) + h^1(C/U).$$

一方, $Z_1(a, b; U) \subset U^{(2)}$ だから D'' は, $U^{(2)}$ の homomorphic image U/E の submodule となる. $\dim U \leq 1$ だから, (1.2) (i) を適用して, $\mathcal{F}(D') \leq \mathcal{F}(U/E)$ となる. (Q.E.D.)

上の証明の最後の部分は, 結局, 一般に, 次のことを主張することとなる.

(2.3) Lemma. N が有限生成 A -加群で, $\dim N = 1$ とする.

a_1, \dots, a_r を任意の A の要素とする. D が $H_r(a_1, \dots, a_r; N)$ の任意の homomorphic image とすると, $\mathcal{F}(D)$ には, a_1, \dots, a_r には依らない (r と r のみに依る) 上限が存在する.

では, 本節の目標である (2.1) の証明を始める.

A は complete としよ. $(0) = U \cap V$ を (0) の素分解で,

$\bar{A} = A/U$ は unmixed で 3次元, $A' = A/V$ は次元が ≤ 2 .

次の完全系列がある:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A} \oplus A' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

ここで, $C = A/(U+V)$ で, $\dim C \geq 2$. さて, $q = (a, b, c)$ を A の parameter ideal とする. Koszul homology の完全系列がある.

$$H_1(q; \bar{A} \oplus A') \longrightarrow H_1(q; C) \xrightarrow{\delta} A/q \longrightarrow \bar{A}/q\bar{A} \oplus A'/qA'$$

(1.2) (ii), (iii) により,

$$\mathcal{R}(\bar{A}/q\bar{A}) \leq \mathcal{R}(\bar{A}) < \infty \quad \text{かつ}$$

$$\mathcal{R}(A'/qA') \leq \mathcal{R}(A') < \infty.$$

従って, $\mathcal{R}(\text{Im } \delta)$ が q に依らない上限をもつことを示す. $\dim C \leq 1$ の場合は, (2.3) により, $\mathcal{R}(\text{Im } \delta)$ に上限があることがわかる. そこで, $\dim C = 2$ の場合を考える. $D := \text{Im } \delta$ とする. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_1(q; \bar{A} \oplus A') & \longrightarrow & (0; c)_{\bar{A} \oplus A' / (a, b)(\bar{A} \oplus A')} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{H_1(a, b; C)}{\cong H_1(a, b; C)} & \longrightarrow & H_1(q; C) & \longrightarrow & (0; c)_{C / (a, b)C} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & D'' & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

a, b は C の s.o.p. としよいかう, (2.2) により,
 $\mathcal{R}(D)$ は上限をもつ. 一方, もし, $H_1(\mathcal{O}_q; \bar{A} \oplus A)$ の
 最小生成系の個数に, q に依らない上限があるとすると, D
 は, C/E の submodule と見做せて, E の最小生成系
 の個数に, q に依らない上限 n があることになり,

$$\mathcal{R}(D) \leq \mathcal{R}(C/E) \leq \mathcal{R}_n(C) < \infty.$$

従って, $H_1(\mathcal{O}_q; \bar{A})$ と $H_1(\mathcal{O}_q; A)$ の A -加群としての最小
 生成系の個数に, q に依らない上限があることを示す.

さて, まず \bar{A} は, 3-dimensional unmixed がからう [2] の結果
 より, 次の完全系列が存在する.

$$0 \longrightarrow \bar{A} \xrightarrow{f} B \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

ここで, B は 3次元 (S_2) 環, 従って, 有限生成な local
 cohomologies をもつ. 又 $\dim F \leq 1$ で, f は finite map..

q に関する Koszul homology の完全系列を考える:

$$H_2(\mathcal{O}_q; F) \xrightarrow{\lambda} H_1(\mathcal{O}_q; \bar{A}) \xrightarrow{\pi} H_1(\mathcal{O}_q; B)$$

$$\text{まず, } \mu_A(\mathcal{O}_m \pi) = l_A(\mathcal{O}_m \pi / \mathfrak{m}(\mathcal{O}_m \pi)) \leq l_A(\mathcal{O}_m \pi) \leq l_A(H_1(\mathcal{O}_q; B))$$

で, 右端は, B の local cohomologies の長さによって決まる上限を
 もつ.

次に, $\mathcal{O}_m \lambda$ について考える. まず $\dim F = 0$ のときは,

$$\mu_A(H_2(q; F)) \leq \rho_A(H_2(q; F)) \leq 3 \rho_A(F).$$

$\dim F = 1$ のときは, $\mu_A(D_m \lambda) = \delta^r(D_m \lambda / \mathcal{N}(D_m \lambda))$ で, (2.3) を
便える. かくて, $\mu_A(H_1(q; A))$ は q によらない上限をもつ.

最後に, $\dim A' = 2$ の場合, $H_1(q; A')$ の最小生成系
の個数の上限をみつける. ($\dim A' \leq 1$ の場合は, (2.3) を使って
直ちに出来る.) (かくるに, このとき, A' は *uniformly coherent*
であるので, $\mu_{A'}(\text{Ker}(A'^p \rightarrow A'))$ には, p のみによって決
る上限があり, ([4] の 8.3 (p.23), 2.2 (p.53) を参照), 特に,

$$Z_1(q; A') = \text{Ker}(A'^3 \rightarrow A')$$

だから, $\mu_A(H_1(q; A')) \leq \mu_A(Z_1(q; A'))$ より, 全ての要
求は満足されて, 証明は完了する.

以上, 概略ながら, $L(A)$ の有限性について, 最新の結
果を述べて来た. もちろん, $L(A) < \infty$ となる環の完全
な特徴付けや, さらに, *constant* な *index of reducibility* をもつ
ような環の特徴付け等, 今後解決すべき問題は沢山あります.
それらについても, 継続して, 研究を続けるつもりであり
ます.

(1982年3月)

REFERENCES

- [0] S. Goto and N. Suzuki, "Index of reducibility of parameter ideals of a local ring." in preparation.
- [1] 後藤 = 鈴木 "Index of reducibility of parameter ideals of a local ring." 第3回可換環論報告集(1981)pp.187-197.
- [2] Y. Aoyama, "Some basic results on canonical modules." preprint.
- [3] S. Goto, "Approximately C.-M. rings." to appear in J. of Algebra.
- [4] J.D. Sally, "Numbers of generators of ideals in local rings." Lect. notes in pure and applied mathematics vol. 35(1978) Dekker.
- [5] N. Suzuki, "On the system of parameters for Buchsbaum modules and the generalized modules." 第2回可換環論シンポジウム報告集(1980) pp.165-178.
- [6] S. Goto, "Every Noetherian uniformly coherent ring has dimension at most 2." preprint.
- [7] 後藤 二郎, "Buchsbaum 局所環について" 数理解析研究所講究録 374 「可換環論の研究」 1980年2月.
- [8] J. Stückrad, P. Schenzel und W. Vogel, "Theory der Buchsbaum-Moduln." Preprint der Sektion Mathematik Nr.23/24, Martin-Luthar-Univ.