数理解析研究所講究録
第465巻 1982年 46-53

Canonical moduleについて

愛媛大 理　　青山陽一

Y. Aoyama, *Some basic results on canonical modules*, Preprint.
の解説を行なった。その内容についてはすでに「第3回可換環セミナー報告集」(pp. 132～143)に書いたので，ここでは補足的なこと及び上記Preprint中Remark 4.5.として述べた小駒氏の結果と証明を書くこととしたい。上記Preprintを引用するときは[Y]で示す。このノートを通して$(A, \mathfrak{m})$はcanonical module Kを持つd次元の局所環(ネーター的)であるとする。完備化を$\hat{}$で示す。ネーター環R上の加群Mとその部分加群Nに対し，$U_M(N) = \cap Q$ (QはNのMにおける$\dim M/Q = \dim M/N$なる準素成分全体を動く)とおく。他の記号はだいたい慣用されているものであるから説明は省く。

(イ). Aの素イデアルで$\dim A/\mathfrak{p} = d$なる$\mathfrak{p}$をとれば，$\frac{A}{\mathfrak{p}}$は忠実なcanonical moduleを持つ。従って$A/\mathfrak{p}$はunmixedであり，$A/U_A(0)$も

unmixed である。(cf. [Y, (1.8)]) このことより判る素イデアル鎖条件については Nagata *Local Rings* §34, Seydi *Bull. Soc. Math. France* 98 (1970) 9~31 等を参照して下さい。また unmixed でない局所整域(その例は Nagata *Local Rings* A1 Example 2 で与えられている)は canonical module を持たないことが判る。これが [Y, P.6] に "... *there is a local ring which does not have a canonical module.*" と書いた根拠である。(素イデアル鎖条件に関して Ratliff *Amer. Math Monthly* 88-3 (1981) 169~198 も参照されるとよいかも知れない)

(ロ). [Y, Proof of Theorem 4.2] の Case (I) の別証明を渡辺敬一氏が示されたので, それを紹介し, それより生ずる事柄を書く。

「$(R, \mathfrak{p}) \to (S, \mathfrak{q})$ を flat local hom. of complete local rings, $\dim R = \dim S = n$, T を (f.g.) R-module, $T \otimes_R S \cong K_S$, S は (S_2) $\Rightarrow$ $T \cong K_R$ 」

(Proof) S は (S_2) だから, $S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(K_S, K_S) \cong \mathrm{Hom}_S(H^n_{\mathfrak{q}}(K_S), E_S(S/\mathfrak{q}))$。従って $H^n_{\mathfrak{p}}(T) \otimes_R S \cong H^n_{\mathfrak{q}}(T \otimes_R S) \cong E_S(S/\mathfrak{q})$。故に $H^n_{\mathfrak{p}}(T) \cong E_R(R/\mathfrak{p})$。$T$ は (S_2) で $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(T)$ $\dim R/\mathfrak{p} = n$ だから, [Y, (1.11.2)] より $T \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(T, K_R), K_R) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(H^n_{\mathfrak{p}}(T), E_R(R/\mathfrak{p})), K_R) \cong \mathrm{Hom}_R(R, K_R) \cong K_R$。 (q.e.d.)

上の証明に関連して次が成立することを注意しておく。

Proposition. (1) 次は同値:(a) A が (S_2)。(b) $H^d_{\mathfrak{m}}(K) \cong E_A(A/\mathfrak{m})$。(c) f.g. A-module M で $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \cong E_A(A/\mathfrak{m})$ となるものが存在する。

(2) T が (S_2) な f.g. A-module で, $H^d_{\mathfrak{m}}(T) \cong E_A(A/\mathfrak{m})$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(T)$ $\dim A/\mathfrak{p} = d$ なら, $T \cong K$。

上の証明より，[Y, §3 & §4] は [Y, (2.3), (2.4) & (2.11)] に依存しないことが判る。むしろ，[Y, Theorem 2.3. & Corollary 2.4.] は [Y, §4] からの帰結ということになる。

(ハ). この項では A は *unmixed* (i.e. ann K = $U_A(0) = 0$) であるとする。$H = \mathrm{End}_A(K)$ とおく。次のことが [Y, Proof of Theorem 4.2] の中で示されている。([Y, Theorem 3.2] も参照)

「H は *module finite* な A の (S_2)-拡大環 $\subseteq Q(A)$ で，$\dim H/A \leq d-2$ if $A \neq H$」

後藤氏より，この性質で H が特徴付けられることを注意された。即ち，

「B が *module finite* な A の (S_2)-拡大環 $\subseteq Q(A)$ で，$\dim B/A \leq d-2$ if $A \neq B$ なるものであれば，$B \cong H$ as A-*algebras*」

(Proof) $L = \mathrm{Hom}_A(B, K)$ とおくと，L は B の *canonical module* (i.e. $\forall \mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$ $L_{\mathfrak{P}}$ は $B_{\mathfrak{P}}$ の *canonical module*) である。(cf. [Y, Theorem 3.2 & its Proof]) B は (S_2) だから $B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(L, L)$。$0 \to A \to B \to B/A \to 0$ *exact*, $\dim B/A \leq d-2$ より，$0 = \mathrm{Hom}_A(B/A, K) \to \mathrm{Hom}_A(B, K) = L \to \mathrm{Hom}_A(A, K) \cong K \to \mathrm{Ext}_A^1(B/A, K) = 0$ *exact*。これより $\varphi : H \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(L, L)$ を得るが，φ は A-*algebra hom.* であり，$\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq \mathrm{Hom}_B(L, L) \subseteq \mathrm{Hom}_A(L, L)$ だから，主張を得る。(q.e.d.)

Note. $B \subseteq Q(A)$ を仮定しないときは，$\forall \mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(B)$ $\mathrm{ht}\,\mathfrak{n} = d$ を仮定すれば，同様のことが成立する。

(二). この項では [Y, Remark 4.5] に述べた小駒氏の結果と証明を紹介する。(小駒氏のご厚意に感謝致します。)

Proposition 1. (Grothendieck - Ogoma) R をネーター環, M を n 次元の f.g. R-module とし, 次の3つを仮定する: (1) $\mathrm{Supp}(M/U_M(0))$ の極大鎖はすべて長さ n。 (2) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M/U_M(0))$ $\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} \geq \min\{2, \dim M_{\mathfrak{p}}\}$。 (3) M は次元 $<n$ の直和因子を持たない。

このとき, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ $\dim R/\mathfrak{p} = n$ 。

(Proof) (Ogoma) $M \supset (0) = N_1 \cap \cdots \cap N_t$ を準素分解とし, $\dim M/N_i = n \Leftrightarrow i \leq s$ $(1 \leq s \leq t)$ とする。$s < t$ と仮定する。$U = U_M(0) = N_1 \cap \cdots \cap N_s$, $N = N_{s+1} \cap \cdots \cap N_t$ とおく。完全列 $0 \to M \to M/U \oplus M/N \to M/U+N \to 0$ が存在する。仮定(3)より $U + N \neq M$。$\mathfrak{p}$ を $M/U+N$ の minimal prime とする。$\dim M_{\mathfrak{p}} \geq 1$ である。$\dim M_{\mathfrak{p}} \geq 2$ なら, 完全列と仮定(2)より $\operatorname{depth}(M/U \oplus M/N)_{\mathfrak{p}} = 0$ となり矛盾 ($\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(M/U) \cup \mathrm{Ass}(M/N)$)。故に $\dim M_{\mathfrak{p}} = 1$ 。仮定(1)より $\dim R/\mathfrak{p} = n - 1$ 。$\mathfrak{p}$ に含まれる M/N の minimal prime $\mathfrak{q}$ をとる。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ である。故に $\dim R/\mathfrak{q} \geq \dim R/\mathfrak{p} + \operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{q} = n-1+1 = n$, 矛盾。従って $s = t$, 即ち $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ $\dim R/\mathfrak{p} = n$ 。 (q. e. d.)

(EGA IV (5.10.9) 及び Hartshorne Amer. J. Math. 84 (1962) 497~508 を参照。小駒氏のは未発表。)

Proposition 2. d 次元の f.g. A-module M に対し, 次は同値:

(a) $h_M : M \xrightarrow{\text{nat.}} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, K), K)$ が同型。

(b) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\hat{M}/U_{\hat{M}}(0))$ $\mathrm{depth}\, \hat{M}_{\mathfrak{p}} \geq \min\{2, \dim \hat{M}_{\mathfrak{p}}\}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(M)$ $\dim A/\mathfrak{p} = d$。

(c) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M/U_M(0))$ $\mathrm{depth}\, M_{\mathfrak{p}} \geq \min\{2, \dim M_{\mathfrak{p}}\}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(M)$ $\dim A/\mathfrak{p} = d$。

Mが次元$<d$の直和因子を持たなければ，(b)(c)において"$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(M)$ $\dim A/\mathfrak{p} = d$"は要らない。

(Proof) 後半はProposition 1より明らか。($A/U_A(0)$の極大な素イデアル鎖はすべて長さdである。) (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)はよい。

(c)$\Rightarrow$(a)： dに関する帰納法。$d=0$のとき明らか。$d=1$のときMはCohen-Macaulayであるからよい。(Aの代わりに$A/U_A(0) \cap \mathrm{ann} M$で考えてよい。) $d>1$, $d-1$まで正しいとする。$\mathrm{Ker}\, h_M = U_M(0) = 0$。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(K) \cap \mathrm{Supp}(M)$をとる。$M_{\mathfrak{p}}$も$M$と同様の仮定を満たす。[Y, Corollary 4.3]より$K_{\mathfrak{p}}$は$A_{\mathfrak{p}}$のcanonical moduleだから，帰納法により$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$なら$h_{M_{\mathfrak{p}}}$は同型。従って$C = \mathrm{Coker}\, h_M$とおけば$C_{\mathfrak{p}} = 0$ for $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$。$0 \to M \xrightarrow{h_M} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M,K),K) \longrightarrow C \longrightarrow 0$ exactで，C以外の項はdepth ≥ 2。故に$C=0$。

(別証 by Ogoma, [Y, Corollary 4.3]を使わない) $\mathrm{Ker}\, h_M = U_M(0) = 0$である。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$で$\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \leq 1$なるものをとり，$\mathfrak{q}$を$\mathfrak{p}\hat{A}$のminimal primeとする。$\mathrm{ht}\, \mathfrak{q} = \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \leq 1$だから，$\hat{M}_{\mathfrak{q}}$はCohen-Macaulayで$K_{\mathfrak{q}}$は$\hat{A}_{\mathfrak{q}}$のcanonical module。従って$h_{\hat{M}_{\mathfrak{q}}}$は同型。故に$h_{M_{\mathfrak{p}}}$も同型。$C = \mathrm{Coker}\, h_M$とおく。今示したことより，$\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \leq 1$に対し$C_{\mathfrak{p}} = 0$。仮定より，$\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \geq 2$に対し$\mathrm{depth}\, C_{\mathfrak{p}} > 0$。次の補題より$C=0$。(q.e.d.)

Lemma (Ogoma). Rをネーター環，Mをf.g. R-moduleとする。素

イデアル P に対し，$ht\,P \leq 1$ なら $M_P = 0$，$ht\,P \geq 2$ なら $\operatorname{depth} M_P > 0$ $\Rightarrow M = 0$。

Corollary to Proposition 2.　次は同値：

(a) $A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(K, K)$。

(b) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(\hat{K})$ に対し $\operatorname{depth} \hat{A}_{\mathfrak{p}} \geq \min\{2, \dim \hat{A}_{\mathfrak{p}}\}$。

(c) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(K)$ に対し $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}} \geq \min\{2, \dim A_{\mathfrak{p}}\}$。

($\operatorname{Supp}(K) = V(U_A(0))$ である。)

ここで，この系の [Y, Corollary 4.3] を使った証明(Propositions 1 & 2 を使わない。但し，小駒氏の手法と同様だが)

(Proof) (c)$\Rightarrow$(a) のみを示せばよい。d に関する帰納法。$d \leq 1$ なら A は Cohen-Macaulay だからよい。$d > 1$，$d-1$ まで正しいとする。$A \supset (0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ を準素イデアル分解で，$\dim A/\mathfrak{q}_i = d \Leftrightarrow i \leq s$ $(1 \leq s \leq t)$ とする。$\mathfrak{a} = U_A(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s$，$\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_{s+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ とおく。また $C = \operatorname{Coker} h_A$ とおく。$0 \to \mathfrak{a} \longrightarrow A \xrightarrow{h_A} \operatorname{Hom}_A(K,K) \longrightarrow C \to 0$ exact。$\mathfrak{p}$ を極大でない素イデアルとする。$K_{\mathfrak{p}} \neq 0$ なら [Y, Corollary 4.3] より $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module である。従って帰納法により $C_{\mathfrak{p}} = 0$ を得る。故に $\ell(C) < \infty$。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(K) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ をとる。[Y, Corollary 4.3] より $K_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module であるから，帰納法により $h_{A_{\mathfrak{p}}}$ は同型である。従って $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 0$, 即ち，$\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{b}$ if $s < t$。故に $s < t$ とすると，$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ は $\mathfrak{m}$-primary である。$0 \to A \to A/\mathfrak{a} \oplus A/\mathfrak{b} \longrightarrow A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \longrightarrow 0$ exact で，$\operatorname{depth} A \geq 2$，$\operatorname{depth} A/\mathfrak{a} \oplus A/\mathfrak{b} \geq 1$ だ

から矛盾。故に $s=t$, 即ち $\mathfrak{a}=0$。 $0 \to A \to \mathrm{Hom}_A(K,K) \to C \to 0$ exact で, C 以外の項は $\mathrm{depth} \geq 2$。故に $C=0$。 (q.e.d.)

Note. h_M injective $\Leftrightarrow$ $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ $\dim A/\mathfrak{p} = d$

h_M surjective $\Leftrightarrow$ $M/U_M(0)$ (S_2)

(M は d 次元 f.g. A-module)

Appendix

青山の結果 [Y, (4.2)] は, canonical module の理論の中で, 存在定理について重要なものであるので, 予備知識をあまり必要としない証明を工夫したい。

Lemma. $(A, \mathfrak{m}) \longrightarrow (B, \mathfrak{n})$ は局所環の平たんな射で, $\mathfrak{m}B$ は $\mathfrak{n}$-準素となっているものとする。このとき, A-module T が存在して $B \otimes_A T$ が B の canonical module になれば, $\frac{B}{\mathfrak{m}B}$ は Gorenstein である。

証明. A, B は共に complete としてよい。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ を $\dim \frac{A}{\mathfrak{p}} = \dim A$ にとる。すると

$$
\begin{aligned}
K_{B/\mathfrak{p}B} &= \mathrm{Hom}_B(B/\mathfrak{p}B, K_B) \\
&= B/\mathfrak{p}B \otimes_{A/\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, T)
\end{aligned}
$$

であるので, $A/\mathfrak{p}$ を経由すると, A は整域であると仮定してよい。$\bar{A}$ を A の正規化とし $\bar{B} = \bar{A} \otimes_A B$ とおき, 自然な可換図形

$$\begin{tikzcd} \overline{A} \arrow[r] & \overline{B} \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

を考え，$I = \mathrm{Hom}_A(\overline{A}, T)$　$L = \mathrm{Hom}_B(\overline{B}, K_B)$ とおく。すると，$L = \overline{B} \underset{\overline{A}}{\otimes} I$ だから，$\overline{B} \underset{\overline{A}}{\otimes} \mathrm{Hom}_{\overline{A}}(I, I) = \mathrm{Hom}_{\overline{B}}(L, L)$ がえられる。一方で，$\mathrm{Ass}_A I = \mathrm{Ass}_A T = \{(0)\}$ で $\mathrm{rank}_A T = 1$ だから I は $\overline{A}$ にイデアルとして含まれる。よって，$\overline{A} \cong \mathrm{Hom}_{\overline{A}}(I, I)$. 故に，$\overline{B} \cong \mathrm{Hom}_{\overline{B}}(L, L)$. さて $d = \dim A$ とし $\overline{m}$ を $\overline{A}$ の極大イデアルとせよ。$M \in \mathrm{Max}\,\overline{B}$ とすると，$\dim \overline{B}_M = d$ だから $L_M \cong K_{(\overline{B}_M)}$. 故に，$\overline{B}_M \cong \mathrm{Hom}_{\overline{B}_M}(K_{(\overline{B}_M)}, K_{(\overline{B}_M)})$. これより

$$\begin{aligned} E_{(\overline{B}_M)} &= H^d_{M\overline{B}_M}(K_{(\overline{B}_M)}) \\ &= \overline{B}_M \underset{\overline{A}}{\otimes} H^d_{\overline{m}}(I) \end{aligned}$$

がえられ，従って $H^d_{\overline{m}}(I) \hookleftarrow \overline{A}/\overline{m}$ だから，$\overline{B}_M/\overline{m}\overline{B}_M$ は Gorenstein となる。$\overline{B}/\overline{m}\overline{B} = \overline{A}/\overline{m} \underset{A/m}{\otimes} B/mB$ より，B/mB は Gorenstein である。 //

[Y, (4.2)] は，A, B が共に complete で $\dim \frac{B}{mB} = 0$ のときに示せば十分だから，上の Lemma より $\frac{B}{mB}$ は Gorenstein である。従って $K_B \cong B \underset{A}{\otimes} K_A$ （c.f. [Y, (4.1)]）だから，$B \underset{A}{\otimes} K_A \cong B \underset{A}{\otimes} T$. よって $T \cong K_A$ （c.f. E.G.A., Ch. IV (2.5.8)）。

（後藤 四郎）