数理解析研究所講究録
第 465 巻 1982 年 54-60

Noether 環はいつ忠実加群に埋蔵されるか

東京理科大学大学院　山岸規久道

§1. 序.

可換環 A と A 上の有限生成忠実加群 M を考える。自然数 r に対して，M の r 重直和を M^r で表わす。M の生成系 $\{x_i\}_{i=1}^n$ をとり，写像 $f: A \to M^n$ を $f(a) = (ax_1, \cdots, ax_n)$ と定めると，M の忠実性から f は単射な A-線型写像である。従って，n 以上のすべての自然数 r に対して，環 A は r 重直和 M^r に部分加群として含まれることがわかる。A が整域であるならば，特に $r = 1$ とでき，A は M 自身に含まれる。

しかし，一般には環 A がいつも M 自身に含まれるとは限らない。これについての反例は (3.1)，(3.2) で述べる。与えられた環 A がいつも有限生成忠実 A-加群に含まれるのはどのようなときであろうか。この問題を Noether 環について議論するのが本稿の目的である。

定理を簡潔に述べるために新しく２つ記号を用意する。
M は A-加群とし，$\mathfrak{p}$ は A の素イデアルとする。このとき，

$$tM = \{ x \in M \mid [0 \underset{A}{:} x] \neq (0) \},$$
$$M[\mathfrak{p}] = [0 \underset{M_\mathfrak{p}}{:} [0 \underset{A_\mathfrak{p}}{:} \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}]] \cap M$$

と定める。

<u>定理.</u> A は Noether 環とする。次の条件は同値である。

(1) $\dim_{A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}} [0 \underset{A_\mathfrak{p}}{:} \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}] = 1 \quad (\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A)$.

(2) すべての有限生成忠実 A-加群が A を部分加群として含む。

(3) すべての A-加群 M に対して，

$$tM = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A} M[\mathfrak{p}] .$$

A の素因子が極小なものばかりであるとき，条件 (1) と (2) は同値であることが [3, Theorem] で述べられている。この場合条件 (1) は A の全商環が Gorenstein であるということに他ならない。

以後 A は可換な Noether 環とする。

§2. 定理の証明。

補題. (2.1). すべての有限生成忠実A-加群がAを部分加群として含むものとせよ。SはAの積閉集合とする。このとき，すべての有限生成忠実$S^{-1}A$-加群が環$S^{-1}A$を部分加群として含む。

命題. (2.2). $(A, \mathfrak{m})$は局所環とし，$\dim_{A/\mathfrak{m}} [0 \underset{A}{:} \mathfrak{m}] \geqq 2$とする。このとき，環$A$を部分加群として絶対に含まないような有限生成忠実$A$-加群が存在する。

次の補題は[1, Hilfssatz 1]を改良したものである。そして，その証明は同様に行なわれる。

補題. (2.3). MはA-加群とし，$\{N_1, \cdots, N_s\}$は真に小さいMの部分加群の族とする。さらに，次の条件を満たす素イデアルの族$\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s\}$が存在する。

(i) $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s$は互いに異なる。

(ii) $\mathfrak{p}_i M \subseteq N_i \quad (1 \leqq i \leqq s)$.

(iii) $N_i A_{\mathfrak{p}_i} \cap M = N_i \quad (1 \leqq i \leqq s)$.

このとき，$M \neq N_1 \cup \cdots \cup N_s$.

系. (2.4). M は有限生成忠実 A-加群とする。このとき，$M \neq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A} M[\mathfrak{p}]$.

定理の証明.

(1) ⇒ (3) M は A-加群とする。$x \in tM$ とする。$[0 \underset{A}{:} x]A_{\mathfrak{p}} \neq (0)$ となる $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A$ が存在する。このような $\mathfrak{p}$ の中で height が一番小さいものをあらためて $\mathfrak{p}$ とする。$\mathfrak{p}$ に真に含まれるすべての $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, A$ に対して，$[0 \underset{A}{:} x]A_{\mathfrak{q}} = (0)$ となるから，$\ell_{A_{\mathfrak{p}}}([0 \underset{A}{:} x]A_{\mathfrak{p}}) < \infty$. よって，

$$[0 \underset{A}{:} x]A_{\mathfrak{p}} \cap [0 \underset{A_{\mathfrak{p}}}{:} \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}] \neq (0) .$$

(1) から $\dim_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} [0 \underset{A_{\mathfrak{p}}}{:} \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}] = 1$ なので，

$$[0 \underset{A}{:} x]A_{\mathfrak{p}} \supset [0 \underset{A_{\mathfrak{p}}}{:} \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}] .$$

故に $x \in M[\mathfrak{p}]$. 即ち

$$tM \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A} M[\mathfrak{p}] .$$

逆の包含関係は明らかであるから (3) を得る。

(3) ⇒ (2) M は有限生成忠実 A-加群とする。

(3) と 系 (2.4) から, $M \neq tM$. 元 $x \in M \setminus tM$ をとると, $A \cong Ax \subset M$.

(2) ⇒ (1)　$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A$ とする。補題 (2.1) から局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ も定理の条件 (2) をみたす。命題 (2.2) によって, $\dim_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} [0 :_{A_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}] = 1$ でなければならない。

§3. 例.

(3.1) ([2], Theorem 2). $s \geqq 4$ とする。このとき $\dim_{A/\mathfrak{m}} [0 :_A \mathfrak{m}] = s$ でありかつ $l_A(M) < l_A(A)$ であるような Artin 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と有限生成忠実 A-加群 M が存在する。もちろん, この M は環 A を含まない。

(3.2). $(A, \mathfrak{m})$ は Artin 局所環とし, $E_A(A/\mathfrak{m})$ は $A/\mathfrak{m}$ の injective envelope とする。$E_A(A/\mathfrak{m})$ は有限生成忠実 A-加群である。$E_A(A/\mathfrak{m})$ が A を含むための必要十分条件は $\dim_{A/\mathfrak{m}} [0 :_A \mathfrak{m}] = 1$, 即ち A は Gorenstein ということである。

(3.3) ([後藤四郎]). $k[[X_1, \cdots, X_n]]$ は体 k

上の形式的巾級数環とする。

$$A = k[[X_1, \cdots, X_n]] \ltimes k$$

はイデアル化とする。 このとき A はすべての有限生成忠実 A-加群に部分加群として含まれる。

(3.4). $d > m \geqq 0$. $k[[X_0, X_1, \cdots, X_d]]$ は体 k 上の形式的巾級数環とする. 各 $0 \leqq s \leqq d-m$ に対して,

$$I_s = (X_0^2, \cdots, X_{s-1}^2) + (X_s)$$

$$P_s = (X_0, \cdots, X_s)$$

とおく。 $I = \bigcap_{s=0}^{d-m} I_s$, $A = k[[X_0, X_1, \cdots, X_d]]/I$ と定めれば次の事柄が成立する。

(i) $\dim A = d$, $\operatorname{depth} A = m$.

(ii) $\operatorname{Ass} A = \{ P_s/I \mid 0 \leqq s \leqq d-m \}$.

(iii) $\dim_{A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}} [0 :_{A_\mathfrak{p}} \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}] = 1 \quad (\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A)$.

(iii) より, A はすべての有限生成忠実 A-加群に含まれる。

後記. 以上の結果をもとに論文 [4] を作成中です。また この研究をつづけるにあたっては, 後藤四郎氏と彼のセミナー

の方々から有益な助言を数多くたまわりました。ここに深く感謝の意を表明したいと思います。

References

[1] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z., 84 (1964), 80--87.

[2] T. H. Gulliksen, On the length of faithful modules over Artinian local rings, Math. Scand., 31 (1972), 78--82.

[3] K. Yamagishi, A note on a faithful module, TRU Mathematics, 17-1 (1981), 153--157.

[4] -------- , Embedding of Noetherian rings into faithful modules, in preparation.