数理解析研究所講究録
第465巻 1982年 67-79

完全交叉環におけるZariski-Lipmanの予想について

名大(理)　　吉野 雄二

Lipmanは，その論文［L］の中で次の様な問題を考え始めた。

(*)　Aが標数0の体k上のlocalityのとき，$Der_k(A)$が，A上freeならば，Aはregularか？

いわゆる，Zariski-Lipman予想である。

これに関して，次の場合にはすでに肯定的に知られている。

(1)　1次元の場合　(Lipman［L］)

(2)　hypersurfaceの場合　(Scheja-Storch［SS-1］)

(3)　graded case　(Hochster［H-2］)

ここでは，次に調べるべきは，完全交叉な(以下C-Iと略す.)局所環であるという信念に基づき考察を進めたい。

Hochsterが［H-1］の中で，graded C-Iの場合のZ-L予想を証明できた根拠は，次の2つの事実にあるように思われる。

(1)　0次元C-Iのsocleは，Jacobianを使って書くことができること。

(2)　Euler derivationが存在すること。

本稿では，§1でこの主張(1)が局所環の場合にも成立することを示す。更に，§2では，Euler derivationの存在を仮定せずに話がどこまで進むかについて考える。

但し，Z-L予想を考える上で，局所環は完備化しても，かまわないということを注意しておこう。したがって，以下では，もっぱら，完備な局所環に話を限って論ずることにする。

§1.

この節の目標は，次の定理を示すことにある。

<u>定理 1.</u>　kを標数0の体，$B = k[[x_1, \cdots, x_n]]/(f_1, \cdots, f_n)$が，0次元のC-Iのとき，Bのsocleは，$J = \det\left(\partial f_i/\partial x_j\right)$で生成される。

これを，証明するために，多少の準備が要る。

<u>命題 1.</u>　kを標数0の体，Bをk上finiteなlocal ringとする。このとき，トレース $Sp := Sp_k^B$ が，$\mathrm{Hom}_k(B, k)$ のsocleを生成する。

（証）　$\mathrm{Hom}_k(B, k)$ の socle は，k 上 1 次元であることに注意する。そこで，$Sp \neq 0$ かつ $\mathfrak{m}_B \cdot Sp = 0$ をいえばよい。$Sp \neq 0$ は，標数が 0 より明らか。$\mathfrak{m}_B \cdot Sp = 0$ をいうためには，$\forall x \in \mathfrak{m}_B$ と $\forall y \in B$ について，$x \cdot Sp(y) = Sp(xy) = 0$ をいえばよい。即ち，$Sp(\mathfrak{m}_B) = 0$ をいえばよいのだが，これは $\mathfrak{m}_B$ の元が巾零であることから導びかれる。▨

以下 A を Noether 環，B を A 上の *finite projective algebra* とする。この時，同型 $\varphi : \mathrm{Hom}_A(B, B) \longrightarrow B^* \otimes_A B$ があることは，よく知られている。但し，$B^* = \mathrm{Hom}_A(B, A)$。また，$x \in B$ に対して，$Sp(x) \in A$ は次の様に定義される。

$\mu_x \in \mathrm{Hom}_A(B, B)$ を x による *homothety*，そして，

$$\varphi(\mu_x) = \sum_i b_i^* \otimes b_i \quad (b_i^* \in B^*,\ b_i \in B)$$

とするとき，$Sp(x) := \sum_i b_i^*(b_i)$.

$Sp \in \mathrm{Hom}_A(B, A)$ である。

<u>注意</u>　次は同値である。

(1)　$\mathrm{Hom}_A(B, A) = B \cdot Sp$.

(2)　B は A 上 *unramified*（ie $\Omega_{B/A} = 0$）

（証）A の各点での fiber で考えてよいから，始めから A は，体としてよい。しかし，その時には，よく知られている。▨

定義（Scheja-Storchの三角，cf. [SS-2]）

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\kappa"'] & & B \\ \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B, A), B) \arrow[urr, "\nu"'] & & \end{tikzcd}$$

を次のように定義する。

$$\begin{cases} \mu\left(\sum b \otimes b'\right) := \sum bb' \\ \kappa\left(\sum b \otimes b'\right)(\phi) := \sum \phi(b)\, b' \quad \left(\phi \in \mathrm{Hom}_A(B, A)\right) \\ \nu(\psi) := \psi(s_p) \end{cases}$$

補題 1. (1) κは同型である。

(2) $B^e = B \otimes_A B$, $I = \mathrm{Ker}\,\mu$, $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_{B^e} I \subset B^e$ とおくとき，同型射 κによって，$\mathfrak{a}$は，$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(B, A), B)$ の submodule $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B, A), B)$ と同型である。

(証) (1) は well known.

(2) $x = \sum b_i \otimes b_i' \in B^e$ について，

$\kappa(x) \in \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B, A), B)$

$\Leftrightarrow$ $\forall b \in B$ と $\forall \phi \in \mathrm{Hom}_A(B, A)$ について，

$$\sum \phi(b b_i) b_i' = \sum \phi(b_i)\, b b_i'$$

$\Leftrightarrow$ $\kappa((b \otimes 1)x) = \kappa((1 \otimes b)x)$ $(\forall b \in B)$

$\Leftrightarrow$ $x(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = 0$ $(\forall b \in B)$ $\Leftrightarrow$ $x \in \mathfrak{a}$. ▨

補題 2. Scheja-Storchの三角は，$\mathfrak{a}$に制限すると

可換である。即ち、

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\kappa"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & B \\
\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(B,A),B) \arrow[urr, "\nu"'] & &
\end{tikzcd}$$

(証明は、計算だけなので省略する。)

さて、 $B = A[\![X_1 \cdots X_n]\!]/(f_1 \cdots f_n)$ が relatively C-I (ie, BはA上 finite projective で、$\{f_1 \cdots f_n\}$ が regular sequence.) とする。この時、

$$f_i \otimes 1 - 1 \otimes f_i = \sum a_{ij}\,(X_j \otimes 1 - 1 \otimes X_j)$$

$$(a_{ij} \in A[\![\underline{X}]\!] \,\hat{\otimes}_A\, A[\![\underline{X}]\!])$$

$$\Delta := \det(a_{ij}) \in B^e$$

とおくと、 $\Delta \in \mathfrak{A}$ かつ、 $\mu(\Delta) = J \left(:= \det\left(\partial f_i/\partial X_j\right)\right)$

となる。したがって、補題2. より次を得る。

<u>系.</u> 上の状況のもとで、 $J = \kappa(\Delta)\cdot(S_p)$

更に、次のことが成立する。

<u>命題2.</u> BがA上 relatively C-I とする。このとき、$\mathrm{Hom}_A(B, A)$ は rank 1 の B-free module なので、その生成元を τ とする。すると、

$$S_p = u \cdot J \cdot \tau$$

(但し、Jは上記の如く、$J = \det\left(\partial f_i/\partial X_j\right)$)が成り立つ。
u は B の unit である。

(証)　上の記号をそのまま使う。先ず，$\mathfrak{a} = \Delta \cdot B^e$ となることを示そう。これは，ring $C := B \hat{\otimes}_A A[[\underline{X}]]$ の中で，ideal $(1\otimes f_1, \ldots, 1\otimes f_n, \Delta)C$ と $(1\otimes x_1, \ldots, 1\otimes x_n)C$ は，$(1\otimes f_1, \ldots, 1\otimes f_n)C$ 上 algebraic に link していることから従う。さて，$\mathfrak{a} = \Delta \cdot B^e$ と補題 1.(2) より，$u' := \kappa(\Delta)(\eta)$ は B の unit である。一方，上の系において，$S_p = c\eta$ $(c \in B)$ とすると，

$$J = \kappa(\Delta)(S_p) = \kappa(\Delta)(c\eta) = cu'$$

これより命題を得る。▨

命題 1. と 2. から定理 1. は容易に従う。実際，命題 2 より，同型 $B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(B, k)$ によって，J は，(unit を除けば) S_p に対応する。ところで，命題 1. より，S_p は $\mathrm{Hom}_k(B, k)$ の socle の生成元故，J は B の socle の生成元となる。

§2.

この節では，もし次の予想が正しければ，一般の C-I local ring における Z-L 予想も正しいことを示そう。

<u>予想 (**)</u>　k を標数 0 の体，$A = k[[x_1 \cdots x_n]]/(f_1, \ldots, f_{n-2})$ を <u>2 次元</u>の C-I local ring で，A はその subring C

と $\mathbb{C}$ 上 analytic independent な元 z によって，$A \cong \mathbb{C}[[z]]$ となることは，決してないとする。このとき，$\mathrm{Der}_k(A)$ の極小生成元の1つである derivation D で，A の parameter ideal を stable とするものが存在する？

f_i 達が homogeneous ならば，D として Euler derivation をとればよいことは，すぐ分る。

さて，上の予想(**)が Z-L 予想を導くことを示すために，いくつか必要な準備をしておこう。

$k \to A$ を一般に ring homomorphism とする。A-module M に対して，

$$\mathcal{D}_k^A(M) := \{ f \in \mathrm{Hom}_k(A, M) \mid f(abc) + abf(c) = bf(ac) + af(bc),\ \forall a, b, c \in A \}$$

とおく。

$\mathrm{Hom}_k(A, M)$ には，両側から A が作用する，即ち，$A^e := A \otimes_k A$ -加群であることに注意しよう。この時，

<u>補題 1.</u> (1) $\mathcal{D}_k^A(M)$ は $\mathrm{Hom}_k(A, M)$ の A^e-submodule である。

(2) $\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(A, M) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ m & \mapsto & (a \mapsto am) \end{array}$ によって，M は $\mathrm{Hom}_k(A, M)$

の A^e- submodule である。

(3) $\mathrm{Der}_k(A, M)$ は $\mathrm{Hom}_k(A, M)$ の左-A submod. である。

さて，$\mu : A^e \longrightarrow A$ を $\mu(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i b_i$
$I := \mathrm{Ker}\,\mu$ とおく。次の事柄は殆んど明白である。

補題 2. 左 A-modules として，

$$\mathcal{D}_k^A(M) \cong M \oplus \mathrm{Der}_k(A, M).$$

補題 3. A^e-modules として，

$$\mathcal{D}_k^A(M) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e/I^2, \mathrm{Hom}_k(A, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(A^e/I^2, M)$$

定義 $A_k^\Omega := A^e/I^2 = A \ltimes \Omega_{A/k}$

$\mathcal{D}_k^A(M)$ は，A_k^Ω-module で，作用は次のように定義されることを注意しておこう。

$$\begin{cases} a \oplus db \in A_k^\Omega = A \ltimes \Omega_{A/k} \\ m \oplus D \in \mathcal{D}_k^A(M) = M \oplus \mathrm{Der}_k(A, M) \end{cases}$$

に対して，$(a \oplus db)(m \oplus D) = \{am + D(b)\} \oplus aD$

注意. A が k 上 analytic の時には，

$$A^e = A \hat{\otimes}_k A$$

$\Omega_{A/k}$ = the universal finite module of differentials of A over k.

として，上の事は全て成立する。

さて，$A \cong A_k^\Omega / 0 \ltimes \Omega_A$ によって $\overbrace{A_k^\Omega}^{A\text{は}}$ の factor ring とみることができる。

<u>補題 4.</u> A の ideal $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a} = \{D(x) \mid D \in Der_k(A), x \in A\}$ とおくと，A−module として次の同型がある。

$$\mathcal{D}_k^A(A) \otimes_{A^\Omega} A \cong A/\mathfrak{a} \oplus Der_k(A)$$

以下では，kを標数0の体，$R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$
$A = R/(f_1 \cdots f_r)$; $(n-r)$次元の C I とする。
$dx_1, \ldots, dx_n$ を $A_k^\Omega = A \ltimes \Omega_{A/k}$ の元と考える。
更に，$\mathfrak{j}_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right) \in A^n \subset (A^\Omega)^n$ とする。また，任意に与えられた derivation $D \in Der_k(A)$ に対して，

$$S(D) := A \oplus A \cdot D \subseteq \mathcal{D}_k^A(A)$$

とおく。$S(D)$ は，$\mathcal{D}_k^A(A)$ の A_k^Ω −submodule である。

A_k^Ω − module $S(D)$ の $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ に関する Koszul complex $K_\bullet(dx_1 \cdots dx_n ; S(D))$ を考えると $\mathfrak{j}_i \otimes 1$ $\left(\in (A_k^\Omega)^n \otimes_{A^\Omega} S(D)\right)$ 達は，1次の cycle を与えるから，

$$(\mathfrak{j}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{j}_r) \otimes 1 \in H_r(dx_1, \ldots, dx_n : S(D))$$

を考えることができる。

<u>補題 5</u>　$D \in \mathrm{Der}_k(A)$ に対して、A の parameter 系 $\underline{y} = (y_1, \dots, y_{n-r})$ が存在して、$D(\underline{y}) \subseteq \underline{y}A$ となるならば、

$$(\mathfrak{j}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{j}_r) \otimes 1 \neq 0 \quad \text{in } H_r(dx_1 \cdots dx_n ; S(D)).$$

（証）　$S = k[\![y_1, \dots, y_{n-r}]\!]$, $\mathfrak{n} = (y_1, \dots, y_{n-r})S$ とおこう。$S \to A$ は finite である。$\tilde{A} = A/\mathfrak{n}A$ とすると、$\tilde{A}^{\Omega}_k = \tilde{A} \ltimes \Omega_{\tilde{A}} = \tilde{A} \ltimes \left(\Omega_A/(dy_1 \cdots dy_{n-r})A\right)$ である。D は仮定より、$\tilde{A}$ 上の derivation を導くから、$\tilde{S}(D) := \tilde{A} \oplus \tilde{A}\cdot D \subseteq \mathcal{D}^{\tilde{A}}_k(\tilde{A})$ を考えることができる。$\tilde{S}(D) = S(D) \otimes_{A^\Omega} \tilde{A}^{\Omega}$ に注意しよう。

$$\mathfrak{j}_{r+j} := \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_j}{\partial x_n}\right) \quad (j = 1, 2, \cdots n-r)$$

は、$K_\bullet(dx_1 \cdots dx_n : \tilde{S}(D))$ の 1 次の cycle を与える。さて、

$$\{(\mathfrak{j}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{j}_r) \otimes 1\} \wedge \{(\mathfrak{j}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{j}_n) \otimes 1\} = \frac{\partial(f_1 \cdots f_r \; y_{r+1} \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots\cdots\cdots x_n)} \otimes 1.$$

は、前節の定理 1 より $\bigwedge^n (\tilde{A}^\Omega)^n \otimes_{\tilde{A}^\Omega} \tilde{S}(D)$ のえとして、0 でない。とくに、$H_n(dx_1 \cdots dx_n : \tilde{S}(D))$ のえとして 0 でない。これから、$(\mathfrak{j}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{j}_r) \otimes 1 \neq 0$ in $H_r(dx_1 \cdots dx_n : S(D))$ が出る。 ▨

系. $D \in Der_k(A)$ が A のある parameter ideal を動かさないならば,

$$\mathfrak{j}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{j}_r \neq 0 \quad \text{in} \quad H_r(Dx_1, \dots, Dx_n ; A)$$

(証). もし, 0 であると, $\exists \sum_{i_1 \cdots i_{r+1}} \varphi_{i_1 \cdots i_{r+1}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r+1}}$
$\in K_{r+1}(Dx_1, \dots, Dx_n ; A)$ such that

$$\mathfrak{j}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{j}_r = \sum_{i_1 \cdots i_r} \sum_j \varphi_{i_1 \cdots i_r j} Dx_j (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_j)$$

これから.

$$(\mathfrak{j}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{j}_r) \otimes 1 = \sum_{i_1 \cdots i_r} \sum_j \varphi_{i_1 \cdots i_r j} dx_j (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_j) \otimes D$$

は, $K_\bullet(dx_1, \dots, dx_n : S(D))$ の boundary となり. 補題 5. に反する。∎

補題 6. もし, $Der_k(A)$ が A-free ならば, その base である任意の derivation D について,

$$\mathfrak{j}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{j}_r = 0 \quad \text{in} \quad H_r(Dx_1, \dots, Dx_n ; A)$$

(証) $Der_k(A) = \bigoplus_{i=1}^{n-r} AD_i \cong A^{n-r}$ $(D_1 = D)$ とするとき. 次の exact sequence がある。

$$0 \longrightarrow A^{n-r} \xrightarrow[{[D_i x_j]}]{} A^n \xrightarrow[{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]}]{} A^r$$

したがって結論は, free resolution の structure theorem

[BE] から容易に得られる。■

Aを2次元と仮定せずに予想(**)が成立するとすれば，Z-L予想が正しいことは，補題5の系と補題6より明らかである。話を2次元に限ってよいという理由は次の事実による。

定理 (Malliavin [M])

Aを上記の通りのC-Iとする。このとき，Aが(R_q)-conditionをみたすことと，$\Omega_{A/k}$がq-torsion moduleであることは同値である。とくに，$\Omega_{A/k}$がreflexive A-moduleであるためには，Aが(R_2)-conditionをみたすことが必要十分である。

REFERENCES

[BE] D.Buchsbaum and D.Eisenbud ; Some structure theorems for finite free resolutions, Adv. in Math. 12 (1974) 84-139.

[L] J.Lipman ; Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math. 87 (1965) 874-898.

[M] M-P.Malliavin : Condition (a_q) de Samuel et q-torsion, Bull.Soc.Math. France 96 (1968) 193-196.

[SS-1] G.Scheja and U.Storch ; Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren, Math. Ann. 197 (1972) 137-170.

[SS-2] ______ ; Lokale Verzweigungstheorie, Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Freiburg.

[H-1] M.Hochster ; The Zariski-Lipman conjecture for homogeneous complete intersections, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975) 261-262.

[H-2] ______ ; The Zariski-Lipman conjecture in the graded case, J. Algebra 47 (1977) No.2, 411-424.