

特異な周期倍分岐

京大 基礎研
京大 理

蔵本 由紀
Kuramoto Yoshiki
古賀 真史
Koga Shinji

§ 1 はじめに

反応拡散系における乱流の研究において 複素 TDGL 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} W = (\lambda - g|W|^2)W + D\nabla^2 W \quad (1)$$

が 1 基礎方程式として調べられてきた。(1)~(3) ここで W は複素場,
 λ, g, D は複素定数である。方程式(1)は W と時間空間のスケール
リングにより, $\lambda = 1 + i\omega_0, g = 1 + iR, D = 1 + ib$ の式に変換できる。
さらに $W \rightarrow We^{i\omega_0 t}$ の変換により, 式(1)は

$$\frac{\partial}{\partial t} W = W - (1 + iR)|W|^2 W + (1 + ib)\nabla^2 W \quad (2)$$

となる。式(2)の数値計算によれば, 複素場 W の振幅が不規則
に変動するので, 得られる乱流は振幅性乱流と呼ばれる。(2) 振
幅性乱流は乱流の開始直後では, 適当な変換により三次元
相空間上のアトラクターとして, ローレンツカオスと類似し
たカオスを示すことが知られている。

近年カオスへ到る分岐の研究が盛んである。我々は式(2)におけるローレンツ的カオスへ到る分岐を直接式(2)を数値的に解くことにより調べた。その結果、1次元マップでは通常の 2^n 分岐であるが、位相空間では subharmonic 分岐でない特異な分岐を見出した。

§2 複素TDGL方程式

我々は、方程式(2)を一次元媒質において no flux 境界条件を $x=0, L$ に課して直接に数値的に解いた。ただし $L=3.0, b=-2.0$ 。方程式(2)の非線項を規定する R が分岐パラメータである。

方程式(2)は一様振動解として

$$W_0 = \exp[-i(Rt - \phi_0)] \quad (3)$$

を持つ。ここで ϕ_0 は定数。解 W_0 は $R < R_c$ で線形に安定、 $R > R_c$ で不安定である。ここで

$$R_c = -\{2 + (1 + b^2)(\pi/L)^2\} / 2b = +1.87 \quad (4)$$

$R > R_c$ での解の振舞は数値計算に頼らざるを得ない。

さて分岐の本質的要素を取り出すため、次の変換をする：

$$\tilde{W} = W \exp[-i\phi] - 1 \quad (5)$$

ここで ϕ は W の一様振動モードの位相である。新しい場 \tilde{W} では、一様振動解は $\tilde{W} = 0$ となることに注意したい。さらに

$$\tilde{W} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \alpha_{\nu}(t) \cos(2\nu\pi x/L) + \beta_{\nu}(t) \sin((2\nu+1)\pi x/L) \} \quad (6)$$

と展開する。ここで変換(5)を考慮すると、 $\alpha_0(t)$ は実数である。式(5)と(6)を式(2)に代入するとわかる様に、一様振動モードの位相中は無限個の中 $\{\alpha_\nu, \beta_\nu, \nu=0, 1, \dots\}$ の時間発展方程式に陽に入らない。従って中に関する知識はそれ程分岐を調べるためには重要でない量と思われる。

さて係数 $\{\alpha_\nu, \beta_\nu, \nu=0, 1, 2, \dots\}$ の内、

$$X = \operatorname{Re} \beta_0, \quad Y = \operatorname{Im} \beta_0, \quad Z = -\alpha_0 \quad (7)$$

を特に考える。方程式(2)の空間反転対称性 $x \rightarrow -x$ からモード展開(6)の係数 α_ν, β_ν に対する方程式の対称性、 $\alpha_\nu \rightarrow \alpha_\nu$,

$\beta_\nu \rightarrow -\beta_\nu$ が得られる。従って射影空間 $\{X, Y, Z\}$ において

系の軌道はローレンツ系と同じ対称性

$$X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow Z \quad (8)$$

を持つことになる。⁽⁴⁾

空間 $\{X, Y, Z\}$ (E とする) におけるアトラクター A の対称性を考えよう。即ち空間 $\{\alpha_\nu, \beta_\nu, \nu=0, 1, 2, \dots\}$ におけるアトラクター A の射影を考える。すると変換後の A を \bar{A} と書くと、対称なアトラクター ($A = \bar{A}$) および非対称なアトラクター ($A \neq \bar{A}$) の二つの可能性がある。以下でこの対称性を考慮して、カオスへ到る分岐を考える。

§3 異常な2°分岐

数値計算によれば、 R を大きくしていくと、空間 E で原点（一様振動解）は不安定化し、二個の非対称固定点 P, \bar{P} に分岐する。点 P, \bar{P} は normal Hopf 分岐をおこし、二つの非対称リミットサイクル C_1, \bar{C}_1 ($C_1 \neq \bar{C}_1$) に分岐する (図1(a))。ローレンツ系では、この分岐は *inverted* であり、いわゆるローレンツカオスになる点で異なる。さらに R を増加させると、セドルである原点で C_1, \bar{C}_1 は接触し、*homoclinic orbit* を構成する。

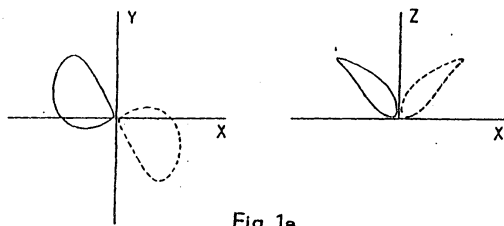


Fig. 1a

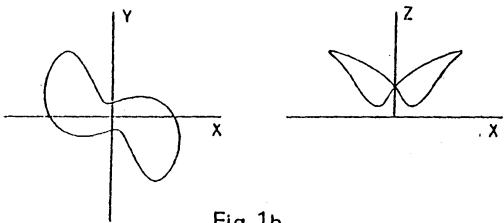


Fig. 1b

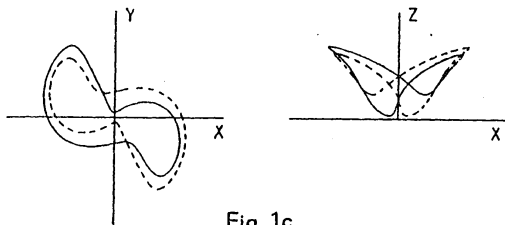


Fig. 1c

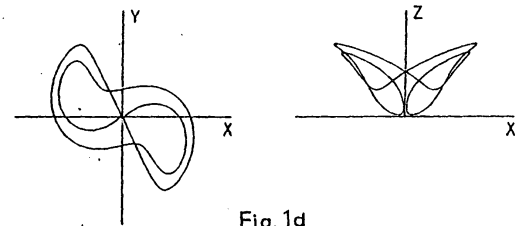


Fig. 1d

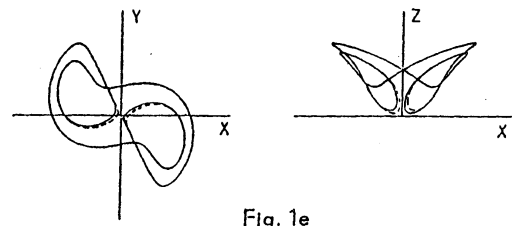


Fig. 1e

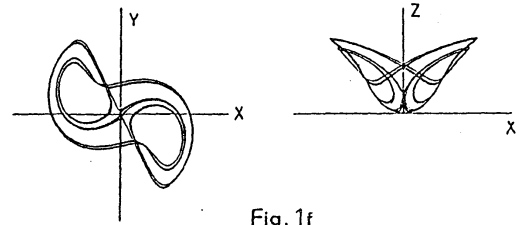


Fig. 1f

次に, homoclinic orbit は壊れ, 一つの対称リミットサイクル $D_1 (= \bar{D}_1)$ となる (図1 (b)). その後 D_1 は二つの非対称リミットサイクル $C_2 \neq \bar{C}_2$ に分離する。その際軌道はさらに複雑化する (図1 c)。再び C_2, \bar{C}_2 は homoclinic orbit を作って融合し, D_2 となり (図1 d), D_2 は分離し, $C_3 \neq \bar{C}_3$ となる (図1 e)。このような対称非対称分岐は無限に続くと思われ, $R=3.97$ でカオスに到達する (図1 f)。

さてこの分岐過程を, Z_n の極大値の順次的プロット (いわゆるローレンツプロット) で考えよう。このプロットでは, 変換 (8) の対称性より, 対称非対称の区別ができないことに注意したり。図2に $R=4.0$ におけるマップ ($Z_n \rightarrow Z_{n+1}$) を示す。ローレンツ系と異なり, 頂点はカuspではない。しかも, 分岐過程は通常の 2^n 分岐と全く同じである⁽⁵⁾。まず homoclinic

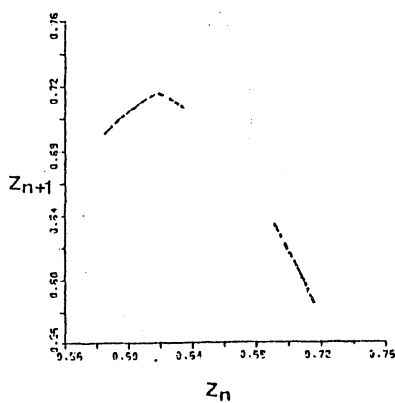


Fig. 2

orbit をつくり C_k から D_k へ分岐する過程は, マップ上で分岐点が頂点を通る過程に対応する。即ち "superstable" 状態は空間 E では homoclinic orbit に対応する。

さらに, D_k から $C_{k+1} (\bar{C}_{k+1})$ へ分離する過程は, マップ上で 2^k 点サイクルから 2^{k+1} サイクルへの分岐に

対応する。これはリミットサイクル1周期あたり、 z の極大値が偶数個あることによる。頂点を通るマップ上の軌道は、ローレンツ系と同様に、サドルを通る軌道に対応する。故にローレンツ系では、サドル近傍を通る軌道が著しく発散性を示し、頂点がカスプとなるが、一方で式(2)の分岐において、サドル近傍で二つの近接する軌道は発散せず、逆に著しく安定となる。ローレンツ系においても、レーレ数が充分大きい領域で対称非対称の交代分岐⁽⁶⁾が見られるが、対称リミットサイクルと非対称リミットサイクルの間にカオス⁽⁶⁾がはさまる点で異なっている。

さらに詳しく1次元マップの頂点の振舞を調べよう。サドル近傍を通る軌道の発散(収束)性は主にサドル近傍の線形空間における解の振舞で近似されると仮定する。Yorke, Yorke によれば⁽⁷⁾、この仮定のもとで、一次元マップの頂点近傍の関数形を

$$f(z) - f(z^*) \cong -\alpha |z - z^*|^5 \quad (9)$$

と書くと(z^* は頂点に対応)、 ζ は

$$\zeta = \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right| \quad (10)$$

で近似される⁽⁹⁾。ここで μ_1, μ_2 はサドルの線形問題の固有値で最大値と次の最大値である。 $(\mu_1 > 0, \mu_2 < 0)$ 。

系(2)において、サドル(即ち一様振動解)の線形固有値問題

を解くのは容易である。しかし0固有値は、 W の位相の方向に関する固有値であって常に存在する固有値であるから、徐く必要がある。実際、変換(5)によつて E 空間では0固有値は自動的に徐かれています。結果として、最大三番目までの固有値は

$$\mu_z = -2 \quad (11)$$

$$\mu_{\pm} = -\pi^2/L^2 - 1 \pm \sqrt{1 - 2bR\pi^2/L^2 - b^2\pi^4/L^4} \quad (12)$$

となる。我々の系では、サドルの固有値は無数あるが、サドルの充分近くを通る軌道の様子は、いわゆる中心多様体の様に、固有値 μ_+ と μ_- で表わされると思われる。図2を得た際のパラメータの値を代入すると、頂点の指数 ζ は式(10)即ち

$$\zeta = |\mu_z/\mu_+| = 1.2 \quad (13)$$

となる。ローレンツ系では $\zeta < 1$ となることが式(10)によつて又数値的にも確かめられているが一方で我々の系では、 $1 < \zeta < 2$ の頂点の指数を持つことがわかった。

しかし、Yorke-Yorkeも示している様に、頂点の位置 z^* を数値的に求めることは困難である。大体の概算値は $\zeta = 1.2 \sim 1.3$ となつた。この値は、理論値(13)とさ程矛盾する値ではない。

さて homoclinic orbit を途中にはさむ対称非対称の交代す

る分岐は Arneodo らによって三次元力学系（ローレンツ系の
 変更版）において見い出されている⁽⁸⁾。方程式(2)の様な無限
 次元の力学系においても三次元力学系の振舞が現われるとい
 うことは、り少くとも乱流の開始では無限自由度の力学系が
 少数自由度の系で表わし得るといふほぼ認知されている事と
 共に、(2)実際のまっと現実的な系で（偏微分方程式で表わさ
 れる系を含む）この異常な 2^n -分岐現象が観測され得ることを
 示唆している。なお本内容は *Physica Letters* に投稿中である⁽⁹⁾。

参考文献

- (1) Y. Kuramoto and T. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* 56 (1976), 679
- (2) Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 68 (1978), 346
- (3) Y. Kuramoto and S. Koga, *Prog. Theor. Phys.* 66 (1981), 1081
- (4) E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963), 130
- (5) M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19 (1978), 25
- (6) K. Tomita and I. Tsuda, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 69 (1980), 185
- (7) J. A. Yorke and E. D. Yorke, *J. Stat. Phys.* 21 (1979), 263
- (8) A. Arneodo, P. Coulet and C. Tresser, *Phys. Lett.* 81A (1981), 197
- (9) Y. Kuramoto and S. Koga, *Phys. Lett.*