数理解析研究所講究録
第466巻 1982年 27-40

音響系におけるカオスの実験

京大 超高層電波研究センター
北野正雄
Kitano Masao
藪崎 努
Yabusaki Tsutomu
小川 徹
Ogawa Toru

1. まえがき

決定論的な方程式で記述される物理系が示す不規則なふるまい（カオス）は，多くの分野の人々から関心を寄せられている。その方程式の種類も，最も単純な差分方程式（1次元写像）から流体を記述する複雑な偏微分方程式まで多岐に亘っている。

レーザをはじめとする非線形光学の分野においてもカオスの研究がさかんである。[1)-4)] Haken[1)] はレーザ方程式と有名な乱流モデルのローレンツ方程式との類似性を導びいた。一方，Ikedaら[2)] はより実験可能な系として光2重安定素子（optical bistable device）が不規則な振動現象を呈することを理論的に予想した。光2重安定素子は非線形吸収媒質を光

共振器の中においたもので、共振器の帰還作用のため非線形性が強調され、その入射光対透過光強度特性にヒステリシスを生ずるのでこの名がついている。予想された不安定性は、光が共振器を一巡するのに有限時間がかかることに起因しており、彼らはこれを delay-induced instability と呼んでいる。Gibbs ら[3] は光-電子混成回路による光2重安定素子で実験を行ない、ランダムな発振を確認した。また彼らはこの系が周期倍化分岐（period doubling bifurcation）を繰り返してカオスに至ることを見い出した。1次元写像において詳しく調べられている周期倍化現象が他の種々のクラスの物理系で観測されていることは大変興味深い。[5]

ここでは、上の delay-induced instability が身近な音響系においても観測されることを示す。

2. 実験系

我々の系を図1に示す。全波整流回路を除けば、マイクロホン－アンプ－スピーカという構成になり、いわゆる拡声システムである。よく経験するようにマイクをスピーカの方向に向けると、帰還路が形成され'ピー'という単一音の自励発振（ハウリング）を生じる。この系にカオスをもたらすものは全波整流回路である。全波整流回路は入力電圧の絶対値

に比例した電圧を出力する回路である。絶対値関数の単峰特性がカオス形成に本質的な役割を演ずる。実際の実験では，正確な特性を得るため絶対値回路は図1のものではなく，オペレーショナルアンプを用いた回路[6]を使用した。

さて系を図2のように単純化する。遅延 t_R はスピーカーマイク間を音が伝わる効果を表わす。R，Cによる高域カットフィルタはアンプ（あるいはスピーカ，マイク）の高域特性を代表している。また μ はループゲインを表わしている。絶対値回路の非線形性は，$f(V) = -|V+V_0|+V_0$ で与えられている。V_0 は入力のオフセット電圧で周期倍化現象を起こす上で重要な働きをする。$V=0$ が系の平衡点となるよう $f(0)=0$

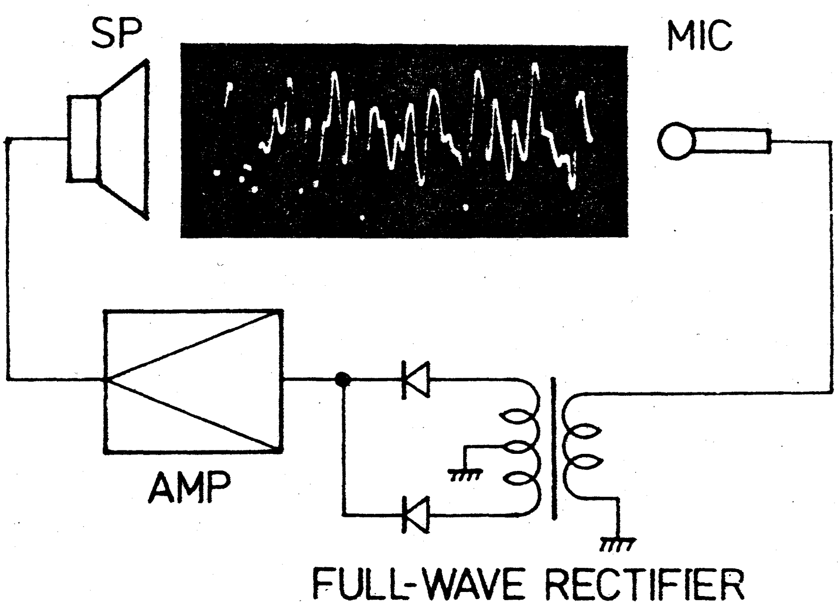

図1.

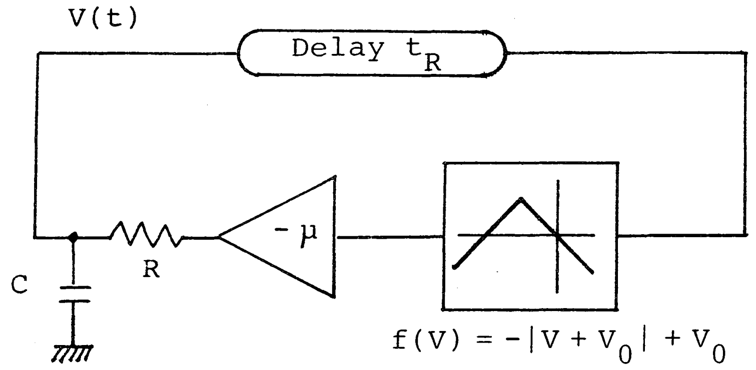

図2.

がみたされるようにパラメータを選んだ。この平衡点まわりの小振幅の発振はほぼ正負対称に起き、直流成分は小さいと考えられる。したがって現実の系がもつ低域カット特性を無視し方程式を簡単化できる。

図2より系の方程式は次のように書ける。

$$\gamma^{-1}\dot{x}(t) = -x(t) + \mu F_1(x(t-t_R))$$
$$F_1(x) = -|x+0.5| + 0.5 \quad . \qquad (1)$$

ここで、$x = V/2V_0$, $\gamma^{-1} = CR$ である。

この方程式はIkedaらによって導びかれたのと同じ差分微分方程式である。ただし、非線形関数の峰の形が彼らの場合、2次関数で近似されるのに対し、我々の場合は折線で表わされる点が異なっている。

さて、式(1)で $\gamma \to \infty$ の場合を考えると

$$x(t) = \mu F_1(x(t-t_R)), \quad t \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

あるいは，$x_n(t) = x(nt_R + t)$，$n \in \mathbb{Z}$，$t \in [0, t_R]$ とおけば，

$$x_n(t) = \mu F_1(x_{n-1}(t)) \qquad (3)$$

となって，よく知られた1次元写像の族が得られる。

適当なμの値に対し，1次元写像(3)が乱雑解を持つことはよく知られており，その自然な連続系への拡張(1)も乱雑解を持つことが期待される。

3. 実験結果

図1の系はアンプのボリュームを充分上げると期待されるとおり，雑音を発した。またマイク－スピーカ間の距離，アンプのボリューム，トーンコントロールなどのパラメータを変化させると，単一音から複雑に変調された雑音まで多種のモードの発振が聞かれた。これらのすべてのモードを調べ上げることは困難なのでここでは発振閾値付近で観測された周期倍化現象について述べる。実験はすべて $t_R = 0.37$ ms（スピーカ－マイク間隔13cm），$\gamma = 6.8$ KHzで行なった。

図3は観測された周期倍化現象である。オシロスコープの縦軸はマイクの出力電圧，横軸は時間である。ボリュームを上げてゆくと，(a)周期約$2(t_R + \gamma^{-1})$で発振を開始し，(b)1オ

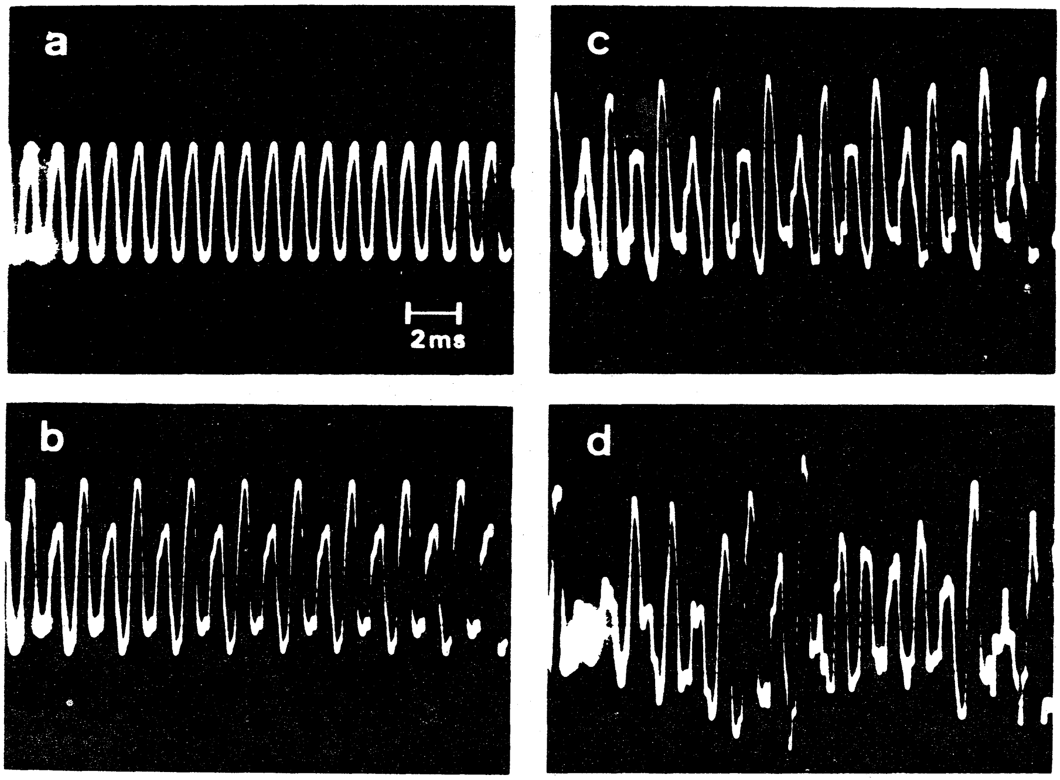

図3

クターブ低い音が重畳して聞こえ，(c)引き続きもう1オクターブ下の音が聞こえた。(c)の状態を与えるボリュームの範囲は非常に狭く，調整は微妙であった。無造作にボリュームを上げてゆくと，(b)の状態からすぐに(d)のランダムな発振状態に移行するように見えた。今後(a)，(b)，(c)の発振を周期2，4，8 をは，P_1，P_2，P_3と呼ぶことにする。

図4は実験的に得られた分岐図（bifurcation diagram）である。帰還回路の一部に外部電圧で増幅度を変えられる増幅器（voltage controlled amplifier）を挿入し，外部電圧として

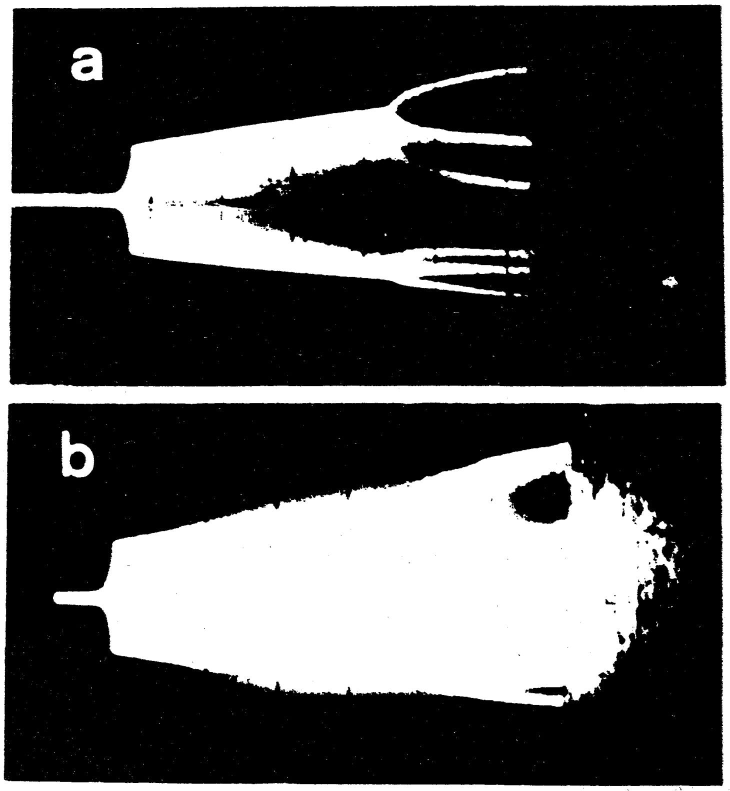

図4

て周期30秒程度ののこぎり波を加え、μをゆっくり掃引した。オシロスコープの横軸にはそののこぎり波を印加し、縦軸には、マイクの出力電圧を加えた。発振波形の各ピークにあたる部分ではブラウン管のビームスポットがゆっくり動くのでそこだけが明るく強調される。

まず無発振状態から、周期2の有限振幅の発振への分岐が見られる。第2の分岐はpitch-fork的で周期4の状態へ移行している。前にも述べたように周期8の状態は見にくく、すぐにランダムな発振状態に移行しているように見える。ランダム状態ではビームスポットが上下にランダムに動きまわ

るので明るさが強調される部分がなく，図4(a)では何も見えない。その部分をよく見るためビーム強度を増したのが図4(b)である。

4. 計算との比較

1次元写像(3)からはじめる。非線形性が2次のピークを持つときの定常解の分岐の様子はよく調べられている。例として，F_1の代わりに $F_2 = -x(x+1)$ を採用した時の分岐図を示す。図5は，各μにつき適当な初期条件から始めて定常に達したx_nを逐次プロットしたものである。μを増してゆく

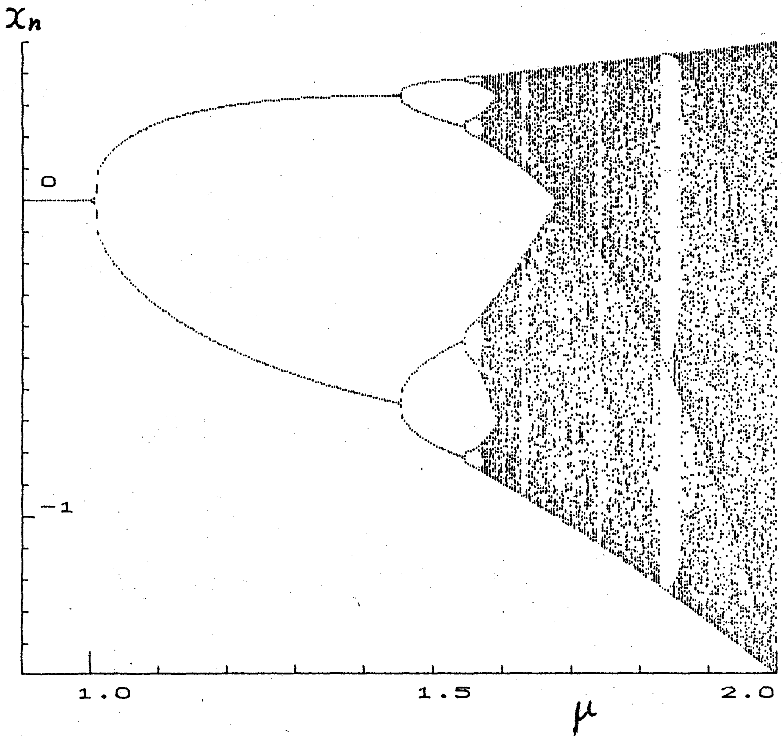

図5

と、$\mu=\mu_k$で P_k（周期2^k）$\to P_{k+1}$（周期2^{k+1}）の周期倍化分岐を繰り返し、$\{\mu_k\}$の集積点 μ_∞ からカオスが始まる。μ_∞を越えると、逆に$\mu=\mu_{(k)}$で$P_{(k+1)}\to P_{(k)}$の逆分岐又はband mergingが見られ最後に完全な（fully-developed）カオス$P_{(0)}$に至る。ここで$P_{(k)}$は周期2^kカオス（period 2^k chaos）と呼ばれるもので2^k個のバンドを順次彷徨する解を表わす。μ_∞は$\{\mu_{(k)}\}$の集積点でもある。

一方、式(3)のように非線形がF_1の場合の分岐図はこれとやや異なる。図6(a)にそれを示す。注目すべき点は周期倍化分岐は見られず、逆分岐だけが起っていることである。分岐を整理してみると、

$$F_2:\ P_0\to P_1\to P_2\to\cdots\to(\text{カオスのはじまり})\to\cdots\to P_{(2)}\to P_{(1)}\to P_{(0)}$$
$$F_1:\ P_0\to(\text{カオスのはじまり})\to\cdots\to P_{(2)}\to P_{(1)}\to P_{(0)}\ .$$

我々の系は、F_1を含んでいるにもかかわらず、周期倍化分岐が見られた。この矛盾は差分微分方程式(1)を$\gamma\to\infty$として差分方程式(3)で近似したことに起因していると考えられる。そこで差分微分方程式を数値的に解いてみた。実験の分岐図（図4）と対応をつけるため、各μについて定常解のピーク値を$50\,t_R$分プロットしてみた。図6(b), (c), (d)は、それぞれ$t_R\gamma=9$, 6, 3に対する分岐図である。

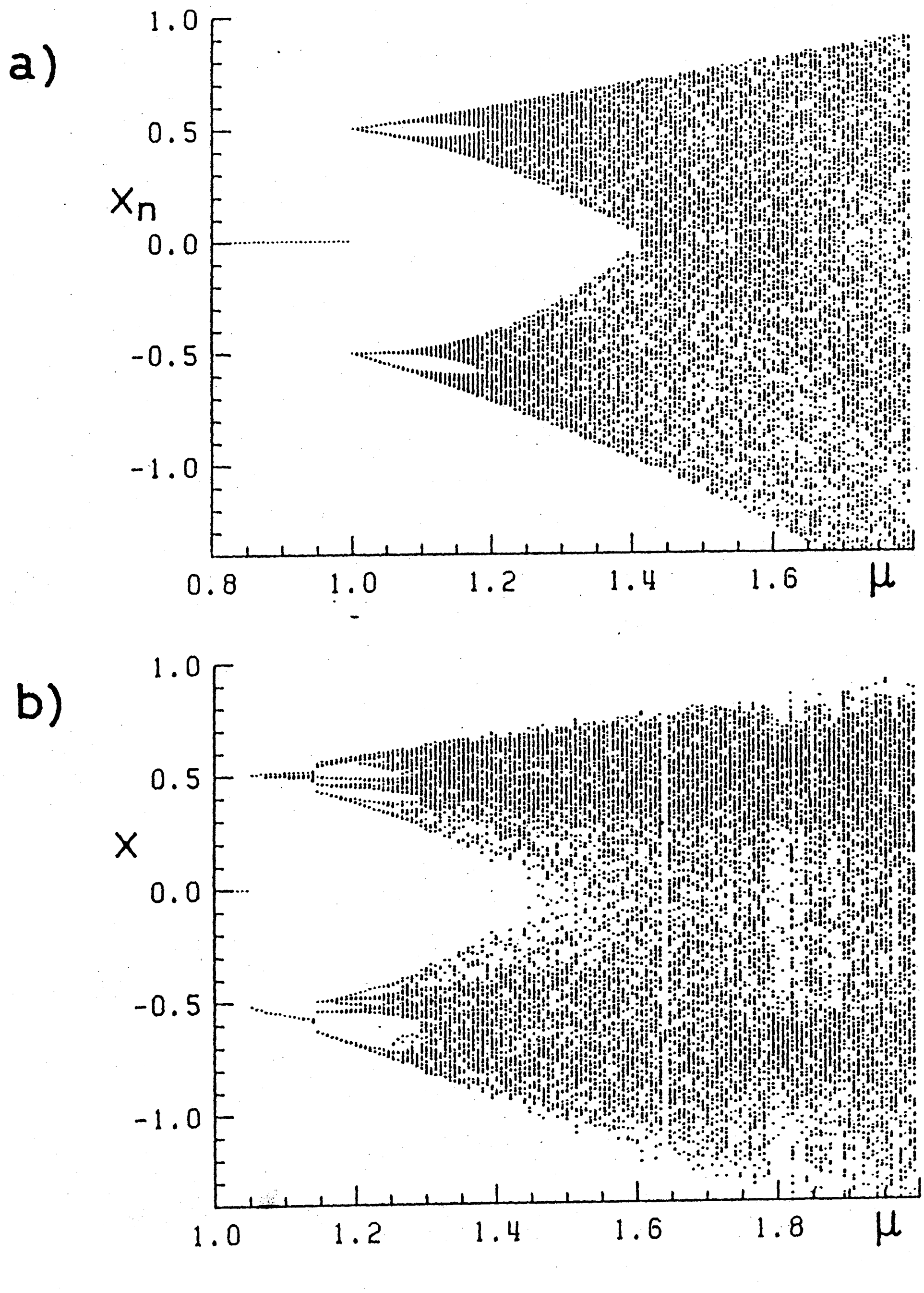

図 6

c)
d)

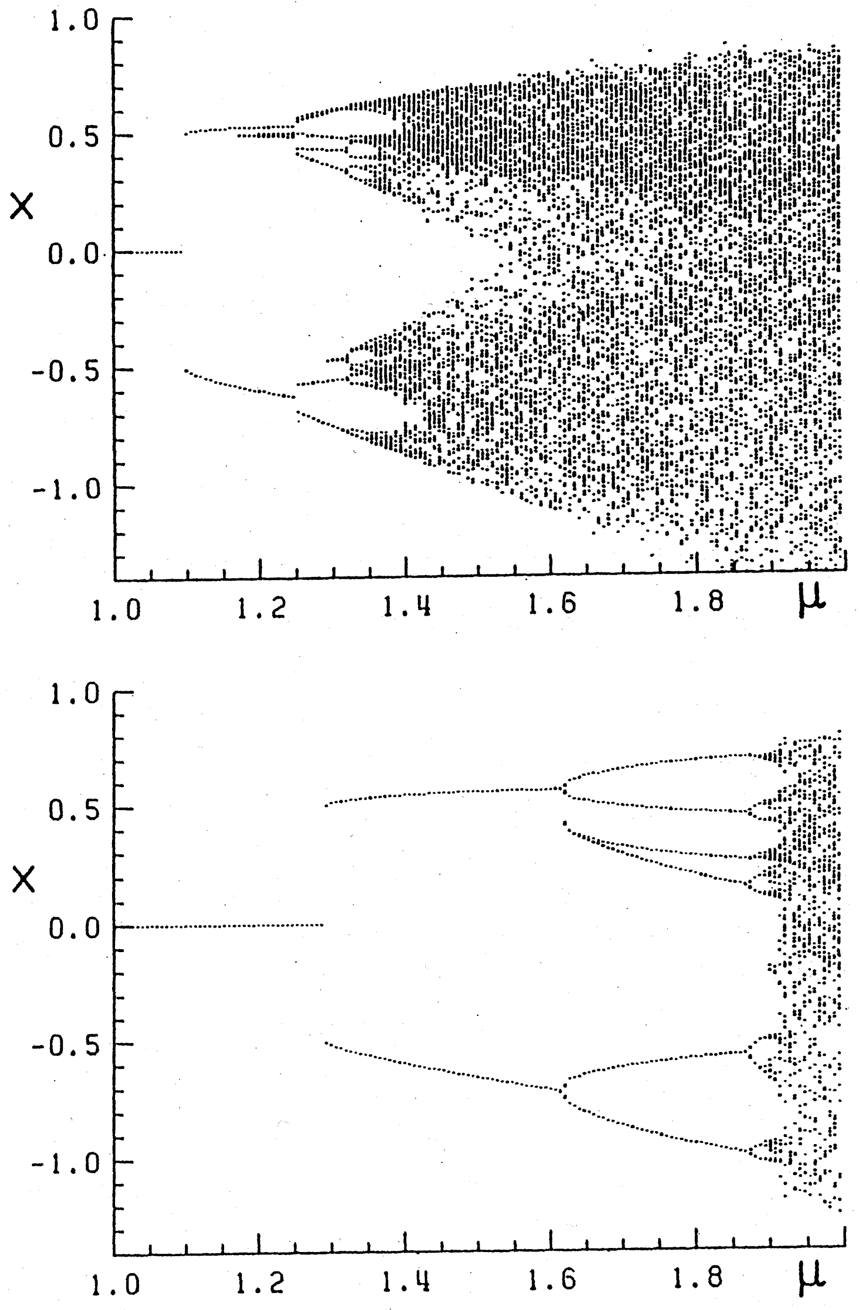

図6（つづき）

第1分岐点 μ_0 は、安定性解析から

$$\mu_0 = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\gamma t_R + 1}\right)^2} \tag{4}$$

となって、γt_R が小さくなると、1から大きい方へずれてゆくことがわかる。

$t_R \gamma = 9$ の場合 (b) は差分方程式の分岐図と似ているが、第1分岐の直後 P_1 が表われている点で大きく異なっている。$t_R\gamma = 6$ (c) では、P_2 も見えている。$t_R \gamma = 3$ (d) では、P_1, P_2 の領域はさらに拡大し、小さいながらも P_3 が表われている。特に (d) は実験の分岐図と定性的によく一致している。実験のパラメータを評価すると $t_R \gamma \fallingdotseq 2.5$ であった。

系の応答 γ の有限性が、カオスの領域を安定化して周期解の領域に変化させていると見ることができる。また一方、(a) で見られる $P_{(1)}$, $P_{(2)}$ などの領域が $t_R\gamma$ の減少に伴って縮小し、$t_R \gamma = 3$ ではほとんど消失していることも興味深い点である。

5. まとめ

非常に身近にある道具でカオスの実験を行なえることを示した。系のふるまいは有名な1次元写像の連続系への拡張で記述され、しかも周期倍化現象を耳で聞くことができるので

教育的でもある。

分岐図は、系の応答時間 γ^{-1} と遅延時間 t_R の比によって大きく変化し、$t_R\gamma$ が小さくなるとカオスが抑制され、周期解が出現することがわかった。

今後、カオスのはじまり近傍の分岐図のようすを詳しく調べ、周期倍化分岐が無限につづいているかなどを調べる必要がある。

謝辞

本研究の発表の機会を与えて下さった京都大学工学部上田睆亮先生に感謝します。また、デモンストレーション用の小型装置を組み立ててくれた松田修己氏に感謝します。

40

参考文献

1) H. Haken, Phys. Lett. 53A, 77 (1975).

2) K. Ikeda, H. Daido, and O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. 45, 709 (1980).

3) H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan, and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. Lett. 46, 474 (1981); F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs, and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. A25, 2172 (1982).

4) Y. Silberberg and I. B. Joseph, Phys. Rev. Lett. 48, 1541 (1982); C. M. Savage, H. J. Carmichael, and D. F. Walls, Opt. Commun. 42, 211 (1982); K. Ikeda and O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. 48, 617 (1982).

5) J. Testa, J. Perez, and C. Jeffries, Phys. Rev. Lett. 48, 714 (1982); M. Giglio, S. Musazzi, and U. Perini, Phys. Rev. Lett. 47, 243 (1981); C. W. Smith, M. J. Tejwani, and D. A. Farris, Phys. Rev. Lett. 48, 492 (1982).

6) J. G. Graeme, Applications of Operational Amplifiers (McGraw-Hill, New York, 1973);
岡村迪夫, OPアンプ回路の設計 (CQ出版, 1973).