数理解析研究所講究録
第 466 巻 1982 年 91-100

2次元周期系の周期解の個数について

阪大 理　松岡 隆
Matsuoka Takashi

本稿では、2次元周期系が一つの3周期解を持つとき、その周期解に関する如何なる条件が、無限個の周期解の存在を導くかという問題について調べた結果を報告する。なお、ここでの定理は、講演の時よりいくらか改良された形になっている事を予めお断りしておく。

1. 方程式と周期解

$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が C^1 級写像で、時間に関し1-周期的すなわち、

$$f(t+1, x) = f(t, x) \qquad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^2$$

であるとする。次の微分方程式を考えよう。

$$*) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

以下では、常に次の仮定をおく。

仮定 1) 任意の初期値 $(t_0, x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ に対し、方程式の解 $\phi(t; t_0, x_0)$ は $-\infty < t < \infty$ で、存在する。

2) 閉円板と同相な $\mathbb{R}^2$ の閉集合 K が存在して、

$T(K) \subset K$ をみたす。ここに $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は、方程式のポアンカレ変換: $T(x) = \phi(1; 0, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$.

これらの仮定は、dissipative system（散逸系）の多くの例でみたされる事が、良く知られている。（例えば [3] を見よ）

定義1. 方程式*)の解 $x(t)$ が、自然数 p に対し、p－周期的

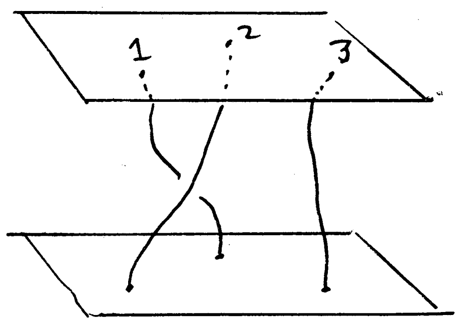
$$\Longleftrightarrow \quad x(t+p) = x(t), \quad x(t+q) \neq x(t)$$

$$\text{for all} \quad t \in \mathbb{R}, \ 1 \leq q < p \quad (q: \text{自然数})$$

この様に、周期解の定義を行なう時、周期解の個数についての結果を述べたいのであるが、その前に、braid（組紐）という概念を紹介しておく必要がある。詳しい情報は Birman [1].

2. braid

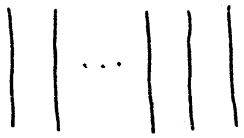
braid（組紐）は、直観的には次の様に定義される。今、空間 $\mathbb{R}^3$ 内に、二つの平行な平面を設置しよう。一方の平面から相異なる点を順序をつけて n 個選び（n: 自然数）、それらをもう一方の平面に射影して、又、n 個の点を決める。この時、上の点と下の点を n 本の糸で交わらないように結ぶ結び方のことを n－braid（単に braid）



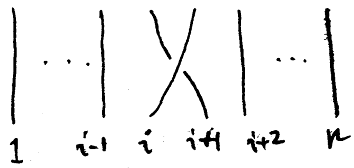
（$n=3$ のときの例）

と呼ぶ。但し、連続変形(ホモトピー)で移り合うものは同じ結び方とみなすことにする。

例



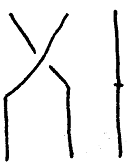
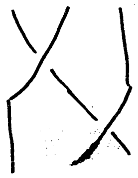
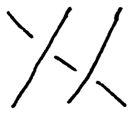
e

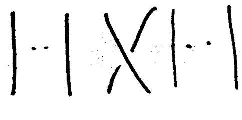


$\sigma_i \quad (1 \le i \le n-1)$

さて、braid の合成を定義しよう。σ, σ' を二つの braid とする時、合成 $\sigma \cdot \sigma'$ が、σ' を σ の下に吊すことにより、定義される。

例 $(n=3)$

$\sigma_1 \cdot e =$  $= \sigma_1$ 　 $\sigma_1 \sigma_2 =$  $=$ 

上に定義した合成により、braid 全体は群をなす。この群の単位元は e であり、σ_i の逆元は $\sigma_i^{-1} =$ 

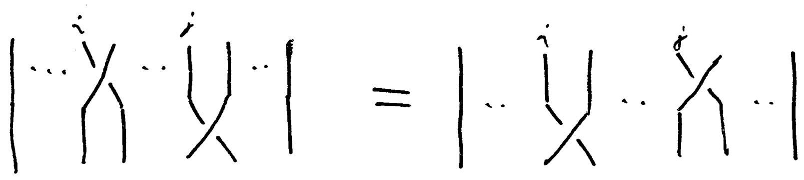
(braid group (組紐群))

である。しかもこの群は元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ によって生成される。すなわち、任意の braid は $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 及びこれらの逆元 $\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_{n-1}^{-1}$ の合成として表わされる。但し、表わし方は一意的ではない。実際、次の様な関係式が成立つ。

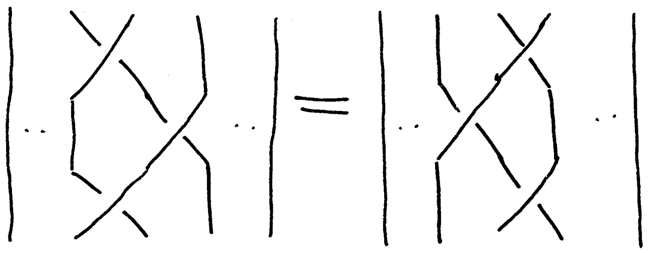
1) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad |i-j| \geqq 2$

2) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad 1 \leqq i \leqq n-2$

下図参照.



$\sigma_i \sigma_j$ $\qquad$ $\sigma_j \sigma_i$



$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ $\qquad$ $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

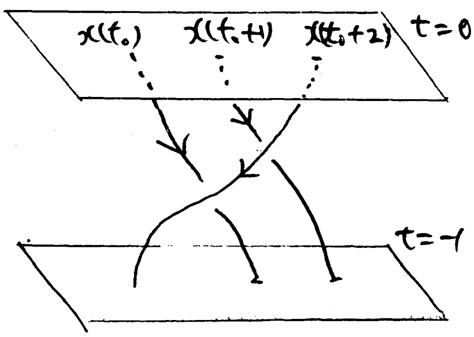
braid を厳密に定義するには、次の様にすれば良い。$T_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^2,\ x_i \neq x_j\ (i \neq j)\}$ とおくと、これは $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合である。n 次対称群 Σ_n は、T_n に座標の入れ換えとして作用する。そこで $B_n = \pi_1(T_n / \Sigma_n)$ とおくと、これは braid group と一致する。

3. 周期解のつくる braid.

ここでは、*) の周期解に対し自然に一つの braid が対応する事を示す。n を自然数、$x(t)$ を *) の n-周期解、t_0 を実数とする。このとき、3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の n 個の曲線

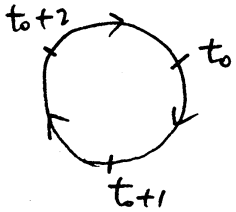
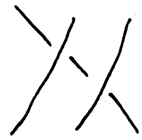
$(t,\ x(t+t_0+i)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^3$

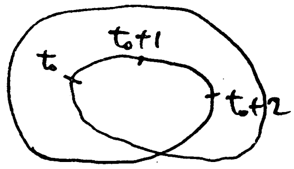
$0\le i\le n-1\ ,\ 0\le t\le 1$



は、平行二平面 $t=0,1$ の間を結ぶ"糸"と思える。よって $x(t)$ に対し、一つの braid が定まった。この元を σ_x とかこう。

例

$x(t) =$  のとき、$\sigma_x =$  $=\sigma_1\sigma_2$

$x(t) =$  のとき、$\sigma_x =$  $=\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2 \times\sigma_2\sigma_1$

定義 2. n-周期解 $x(t)$ が回転でない

$\Longleftrightarrow$ σ_x が、任意の整数 m に対し、$(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^m$ と共役でない。

ここに、braid σ, σ' が共役とは、braid σ'' が存在して、$\sigma'=\sigma''\cdot\sigma\cdot(\sigma'')^{-1}$ とかけることである。たとえば、$\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_2\sigma_1)\sigma_1^{-1}$ であるから、$\sigma_1\sigma_2$ と $\sigma_2\sigma_1$ は共役である。σ_x の共役類は、t_0 の取り方によらずに決まるから、定義 2 は well defined である。

4. 定理

自然数 p に対し、そのオイラー数 $\chi(p)$ を、

$$\chi(p) = \#\{1 \le q < p \mid q: \text{自然数で } p \text{ と素}\}$$

で、定義する。ここに # は個数を表わす。

<u>定理</u>　$x(t)$ を ＊) の 3-周期解で、$x(0) \in K$ をみたし、回転でないとする。

このとき、3 の倍数でない任意の p に対し、

$$\#\{t=0 \text{ で } K \text{ を通過する ＊) の } p\text{-周期解}\} \geq \begin{cases} 2\chi(p) & p \geq 2 \\ 3 & p = 1 \end{cases}$$

$x(t)$ が更に双曲的なら、上の評価は 3 の倍数についても成立する。

5. 応用法

定理を応用するためには、周期解が回転でないための判定法を必要とするが、それは次の命題で、与えられる。

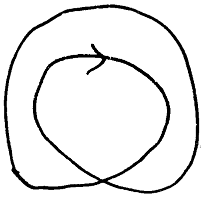
$A = \sigma_1^2$, $B = \sigma_2^2$, $C = \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1^{-1}$, $\rho = \sigma_1 \sigma_2$ とおく。

<u>命題 1</u>. 3-braid σ が $\rho \cdot \sigma'$ と共役であり、かつ σ' が A, B, C のみでかけているとする。A, B, C をそれぞれ B, C, A に置き換える作用を α とするとき、もし

braid $\sigma' \cdot \alpha(\sigma') \cdot \alpha^2(\sigma')$ において $C = B^{-1}A^{-1}$ を代入して出来た braid が単位元でないなら、σ は回転でない。

<u>例</u> 以下では、$t(\rightarrow)$, $t($  $)$ などによって周期解が、その指定された弧([redacted] 閉じた弧)を通過するのに要する時間を表わす。$\sim$ は共役を示す。

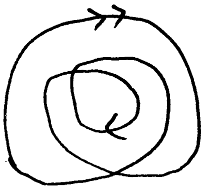
1)

$x(t) =$  $t(\rightarrow) > 2$ $\left(\begin{array}{l}\text{braid } \sigma_x \\ = \sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\end{array}\right)$

は回転でない。

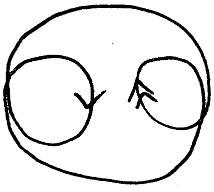
∵) $\sigma_x \sim PAB$ だから、$\sigma' = AB$. ∴ $\sigma'\alpha(\sigma')\alpha^2(\sigma') =$

$ABBCCA \equiv ABA^{-1}B^{-1}$ $(\mathrm{mod}\ C = B^{-1}A^{-1}) \neq 0$ △

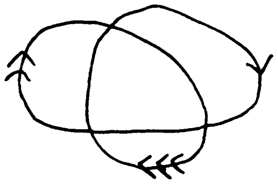
2) $x(t) =$  $t(\rightarrow\!\!\rightarrow) < 1$, $t(\leftarrow) < 1$ は上の例と σ_x が

等しいから、回転でない。

3)

$x(t) =$  $t(\rightarrow) > 1$, $t(\rightarrow\!\!\rightarrow) > 1$ (braid $\sigma_x = \sigma_1\sigma_2 BA$)

も、回転でない。

4) 

$t(\ \circlearrowright\ ) < 1$

$1 < t(\ \circlearrowleft\ ) < 2$ $\left(\text{braid } \sigma_x = \sigma_1 \sigma_2^{-1}\right)$

$t(\ \circlearrowleft\ ) < 1$

t 回転でない.

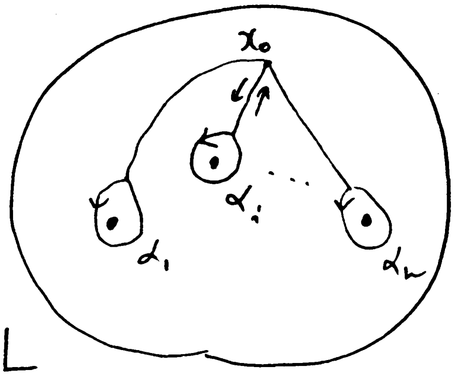
$\because)\ \sigma_x \sim \rho B^{-1}.\ \therefore \sigma' = B^{-1}$ で $\sigma_x(\sigma') \alpha^2(\sigma') = B^{-1}C^{-1}A^{-1}$

$\not\equiv 0 \mod C^* = B^{-1}A^{-1}$ Δ

6. 定理の証明の要点

定理の証明のキーポイントは論文 Matsuoka [2] において示されたある種の不動点定理を適用することである。

今, L を閉円板から n 個の点を抜き去った空間とする。$S : L \to L$ を像 $S(L)$ がコンパクトである連続写像とする。定点 $x_0 \in L$ を決め, 右の様に, $\pi_1(L, x_0)$ の basis $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を定める。$\mathcal{B} : B_n \longrightarrow M_{n-1}(\mathbb{Z}[a, a^{-1}])$ を braid group B_n の Burau 表現 ([1, p. 121]) とする. すなわち,



$$\mathcal{B}(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} I & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & a & -a & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & 0 & & I \end{array}\right) \cdots i \quad (1 \le i \le n-1)$$

で決まる準同形とする.

更に、準同形 $\gamma : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_1(L, x_0))$ を

$$\gamma(\sigma_i)(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i^{-1} & j = i \\ \alpha_i & j = i+1 \\ \alpha_j & j \neq i, i+1 \end{cases}$$

で定める。σ を一つの braid とし、整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対し、整数 $r_i(\sigma)$ を $\mathrm{trace}\, B(\sigma) = -\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i(\sigma) a^i$ で定義する。ν を x_0 を $f(x_0)$ につなぐ道とする。以上の仮定のもとで、[2, Prop. 2] の系として、次が得られる。

命題 2.

$f_* = \nu_* \circ \gamma(\sigma) : \pi_1(L, x_0) \to \pi_1(L, f(x_0))$, $i \in \mathbb{Z}$, $r_i(\sigma) \neq 0$

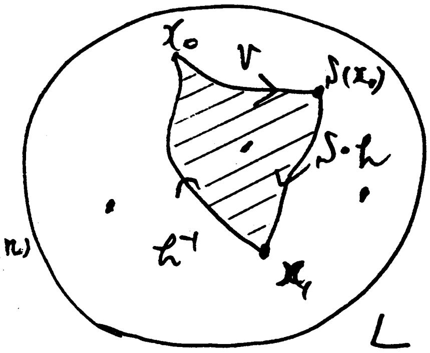
$\Rightarrow$ f の不動点 x_1 が存在して、次をみたす。

「$\forall h$: path from x_0 to x_1 に対し、

$\psi([h^{-1} \cdot \nu \cdot (f \circ h)]) = i$ 　ここに、

$\psi : H_1(L) \to \mathbb{Z}$ は ホモロジー類 $[\alpha_k]$ $(1 \leq k \leq n)$

を 1 に送る準同形」



ポアンカレ変換 T を局所的に修正して、命題 2 に表われる写像 f に要求された条件をみたす様に出来るから、この命題により、$*$) の周期解の個数を評価するためには、単純なアルゴリズムで定義される行列 $B(\sigma)$ の trace を単に計算すればよい事がわかる。実際、計算を試みた結果が定理である。なお、[2] では、同様の議論によって、$*$) に 3 個の 1 一周期

解が存在する場合に、周期解の個数の評価を行なっている。

定理では、$n=3$ の場合のみ考察されている。当然 $n \geq 4$ の場合、すなわち予め与えられて周期解の周期が4以上の場合も考える必要があるが、行列 $B(\sigma)$ の計算がかなり面倒で、まだ具体的結果を得ていない。また、定理の後半における「双曲的」という仮定が本質的なものかどうかも未解決である。

参考文献

[1] J. S. Birman, Braids, Links, and Mapping Class groups, Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, 1974

[2] T. Matsuoka, The number and linking of periodic solutions of periodic systems, preprint.

[3] K. Shiraiwa, A generalization of the Levinson–Massera's equalities, Nagoya Math. J. 67 (1977), 121–138.