

A test for the fundamental group of a 3-manifold

阪市大 理 河内明夫

(Akio Kawauchi)

どのような有限表示群も必ずある n 次元有向連結閉多様体の基本群と同型であることはよく知られる。一方、それは必ずしも n 次元コンパクト多様体の基本群と同型になるとは限らない。ある与えられた有限表示群が n 次元コンパクト多様体の基本群と同型になるかを決定することは難しい問題である。例えば、Lyndon-Schupp [6, p192] によつて、一般の有限表示群が n 次元コンパクト多様体の基本群と同型であるかどうかを決定する アルゴリズム が存在しないことがわかる。(この事実は Gonzalez-Acuna によつて筆者にほめがされた)

この報告では、無限位数の元をもつ有限表示群が n 次元コンパクト多様体の基本群と同型になることをテストする方法を与える。筆者は [3], [4] においても同様の研究を行ったが、当報告がほぼこの最終的な形となった。(詳しくは [5] 参照のこと。)

1. 無限巡回商群をもつ群から生成された加群

$\langle t \rangle$ を文字 t で生成された無限巡回群で, $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ をこの整数群環とする。epimorphism $\gamma: K \rightarrow \langle t \rangle$ をもつ群 K を考える。 γ の核を \tilde{K} とかく。

今 K の群表示 $(x_0, x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m)$ ($n \leq +\infty, m \leq +\infty$) で $\gamma(x_0) = t, \gamma(x_j) = 1$ ($\forall j \geq 1$) とするものを考える。 $\{r_1^*, \dots, r_m^*\}$ を $\bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle$ の自由生成系, $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*\}$ を $\bigoplus_{n+1} \mathbb{Z}\langle t \rangle$ の自由生成系とする。 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -列

$$\bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{n+1} \mathbb{Z}\langle t \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle t \rangle$$

を $d_2(r_i^*) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\gamma} x_j^*, d_1(x_j^*) = \gamma(x_j) - 1$ で定義する。このとき, $d_1 d_2 = 0$ が成立する。 K の群表示のそれぞれ γ の選択により $d_1(x_0^*) = t-1, d_1(x_j^*) = 0$ ($\forall j \geq 1$)。従って, $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_0}\right)^{\gamma} = 0$ ($\forall i \geq 1$), $\text{Ker } d_1 = \bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle$, ここで x_i^* は $\bigoplus_n \mathbb{Z}\langle t \rangle$ の i 番目の自由因子を生成する ($1 \leq i \leq n$)。

とくに d_2 は写像 $d_2': \bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle \rightarrow \bigoplus_n \mathbb{Z}\langle t \rangle$ を決定する, ここで $d_2'(r_i^*) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\gamma} x_j^*$ 。 Crowell の結果により, $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ は $\text{Ker } d_1 / \text{Im } d_2 = \bigoplus_n \mathbb{Z}\langle t \rangle / \text{Im } d_2'$ (= $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -同型である。 J を γ の (i, j) 成分が $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\gamma}$ であるような行列とする ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$)。このとき,

次の補題が示された:

補題 1.1. 行列 J は $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $H_1(\mathbb{K}; \mathbb{Z})$ の表示行列である。つまり、次のような $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -完全列がある:

$$\bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle \xrightarrow{J} \bigoplus_n \mathbb{Z}\langle t \rangle \rightarrow H_1(\mathbb{K}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

系 1.2. K が有限生成ならば、 $H_1(\mathbb{K}; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群として有限生成となる。

2. Alexander 加群と自己相反加群

$\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 T に対し、 $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ -加群 $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $T_{\mathbb{Q}}$ と表わし、 $\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ -加群 $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ を T_p とかく、ここで \mathbb{Z}_p は素位数 p の体である。整数 p に対する torsion 積 $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z}_p) = \{x \in T \mid px=0\}$ は $T^{(p)}$ と表わされる。 $T^{(p)}$ は $\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ -加群となる。

次は明らか:

補題 2.1. $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 T が torsion $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $\Leftrightarrow T_{\mathbb{Q}}$ が torsion $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ -加群。

定義 2.2. 有限生成 torsion $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群を Alexander 加群 といふ。

例えば, 次の補題から容易に Alexander 加群の例を作れる。

補題 2.3. 有限生成群 K が $H_1(K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ であれば, その $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $H_1(K; \mathbb{Z})$ は Alexander 加群になる。(証明は略, [4] 参照)

R を 1 をもつ可換環とし, T を $R\langle t \rangle$ -加群とする。 $f(t) \in R\langle t \rangle$ $x \in T$ に対し $f(t) \cdot x = f(t^{-1})x$ とおく。これは T 上の第二の $R\langle t \rangle$ -加群構造を与える。これを T^* とかく。

定義 2.4. 有限生成 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 T は次を満たすとき, 自己相反的 であるといふ:

- (i) $T_{\mathbb{Q}} \cong T_{\mathbb{Q}}^*$ ($\mathbb{Q}\langle t \rangle$ -加群として),
- (ii) 素数 p で $T^{(p)} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p\langle t \rangle} [T_p, \mathbb{Z}_p\langle t \rangle]^*$ ($\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ -加群として)。

Alexander 加群 T に対し, $A(t) \in \mathbb{Q}\langle t \rangle$ を $t: T_{\mathbb{Q}} \rightarrow T_{\mathbb{Q}}$ の特性多項式とする。 $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ の unit 倍を無視して考えたときの $A(t)$ のことを Alexander 加群 T の Alexander

多項式 とする。 $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ が PID であることから、 $A(t)$ は $T_{\mathbb{Q}}$ の巡回的 $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ -分解の位数イデアルの生成元である。

補題 2.5. 性質 (i) をもつ Alexander 加群 T に対し、この Alexander 多項式 $A(t)$ は自己相反的である。即ち、 $A(t) = u A(t^{-1})$ (ある unit $u \in \mathbb{Q}\langle t \rangle$ に対して)。

$\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ は PID であり、 T_p は $\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ 上有限生成だから、次を知る。

補題 2.6. 性質 (ii) をもつ Alexander 加群 T に対し、 $T^{(p)}$ は自由 $\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ -加群であり、その階数は T_p のものに等しい。とくに $T^{(p)}$ はアーベル群として trivial かまたは無限群になる。

3. 3次元多様体の基本群のいくつかの性質.

とくに断りがない限り、多様体とは三角形分割され得る多様体を意味する。

3.1. 3次元多様体の基本群の任意の部分群 G は 3次元多様体 M' (即ち、 G に対応した M の被覆) の基本群である。

る。さらに、もし G が有限生成ならば、 M' はコンパクトとど
き、 G は有限表示群になる。また、 M が有向なら、 M' もまた
有向。(Hempel [1, Chapter 8], Jaco [2, CHAPTER V] 参照)

補題 3.2 $G = \pi_1(M)$ が有限生成群ならば、 G は無限位数
の元をもつ。(これは [4, (2.3)] の対偶。証明はそこを参照)

M を 3次元コンパクト有向多様体で、epimorphism
 $\gamma: \pi_1(M) \rightarrow \langle t \rangle$ が与えられていれるとする。 \bar{M} を $\text{Ker } \gamma$ に対応
する M の被覆とする。 \bar{M} の被覆変換群は $\langle t \rangle$ と同一視される。
ホモロジー群 $H_1(\bar{M}; \mathbb{Z})$ は自然な有限生成 $\langle t \rangle$ -加群構造
をもつ。

定理 3.3. $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(\bar{M}; \mathbb{Q}) < +\infty$ のとき、 $\langle t \rangle$ -加群 $H_1(\bar{M}; \mathbb{Z})$
は自己相反的である。(証明は [4, 定理(8.1)] 又は [5] を参
照)

4. 主定理.

G を $H_1(K; \mathbb{Z})$ が無限となる有限生成部分群 K を含んだ
群とする。Alexander 加群 T がある epimorphism
 $\gamma: K \rightarrow \langle t \rangle$ により K から生成されたと仮定する。

定義 4.1. その Alexander 加群 T は群 G の中で産出されたという。

次が三定理である:

定理 4.2. G を無限位数の元をもつ群とする。

- (1) G が 3次元有向多様体の基本群に同型と仮定する。このとき、 G の中で産出されるどの Alexander 加群も自己相反的である。
- (2) G が 3次元無向多様体の基本群に同型と仮定する。この時、 G は指数 2 の部分群 G' が存在して、その中で産出されるどの Alexander 加群も自己相反的である。

(証明) K を G の有限生成部分群と、ある $\gamma: K \rightarrow \langle + \rangle$ により Alexander 加群 $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ を生成していると仮定する。(1) の場合、3.1 から $K \cong \pi_1(M)$, ここで M は 3次元コンパクト有向多様体。 $\text{Ker } \gamma$ に対応した M の被覆 \tilde{M} に対し、 $\langle + \rangle$ -同型 $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \cong H_1(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ がある。 $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(\tilde{K}; \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(\tilde{M}; \mathbb{Q}) < +\infty$ より定理 3.3 が使えて、 $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ が自己相反的であることがわかる。(2) の場合、 G はその 3次元無向多様体の orientation = 重被覆である、3次元有向多様体

の基本群となる指数2の部分群 G' を必ず持つ。 G' に(1)を適用する。(証明終)

4.3 テスト計画。群 G とその有限生成部分群 K ($K=G$ でもよい)と K の(無限でもよい)群表示 P_K と epimorphism $\gamma: K \rightarrow \langle t \rangle$ が与えられていると仮定する。 $K \cong Z$ ならば,
 $Z = \pi(S^1 \times S^2)$ 存のてテストは失敗する。 $K \neq Z$ と仮定する。
 そのとき, $Z \langle t \rangle$ -加群 $H_1(K; Z)$ が Alexander 加群かどうかを群表示 P_K と補題1.1から調べる。例えば、補題2.3より $H_1(\mathbb{Z}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ 存らば $H_1(K; Z)$ は Alexander 加群。Alexander 加群の場合, $H_1(K; Z)$ が自己相反的かどうかを調べる。もし自己相反的でないならば、定理4.2(1)より G はどの3次元有向多様体の基本群にも同型にならない。次に無向の場合のため、 $H^1(G; Z) \neq 0$ で G の指数2のすべての部分群 G_i ($i \in I$) が与えられているとする。($H^1(G; Z) = 0$ 存らば、定理4.2(2)より G は無向多様体の基本群に同型にならない。) さらに、各 G_i の有限生成部分群 K_i ($K_i = G_i$ でもよい)と(無限でもよい)群表示 P_{K_i} 及び epimorphism $\gamma_i: K_i \rightarrow \langle t \rangle$ が与えられていると仮定する。もし各 G_i で、 (K_i, γ_i) が非自己相反 Alexander 加群を産出していいるならば、定理

4.2(2) から G は どの 3次元無向多様体の基本群にも同型となる。この場合、定理 4.2 (1) により、 G は どの 3次元有向多様体の基本群にも同型となる。

例 4.4. 0 でない整数 l, m と素数 $p \geq 2$ に対し、群 $G = G(l, m; p) = (a, b \mid a^{-l} b^l a = b^m, b^p = 1)$ が 3次元多様体の基本群 $\iff p \mid 2lm$.

(証明) $p \mid 2lm$ のとき G は どの 3次元多様体の基本群にも同型であることが示す。このとき $H^1(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ だから、 G は 右側 (1) の指数 2 の部分群 G' をもつ。Reidemeister-Schreier の方法から G' は表示 $(a, b_1, b_2 \mid a^{-l} b_1^l a = b_2^m, b_1^m = b_2^l, b_1^p = b_2^p = 1)$ をもつ。epimorphism $\gamma: G' \rightarrow \langle + \rangle$ を $\gamma(a) = t, \gamma(b_1) = \gamma(b_2) = 1$ で定める。補題 1.1 より $H_1(G'; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p \langle + \rangle / (l^2 - m^2) \cong \mathbb{Z}_p$ (p -ヘリウム群と見た場合)。これは Alexander 加群で、補題 2.6 より自己相対的である。定理 4.2 より G は どのよう有 3次元多様体の基本群にも同型となる。

参考文献

- [1] J. Hempel, 3-Manifolds, Ann. of Math. Studies 86 (1976).
- [2] W. Jaco, Lectures on Three-Manifold Topology, Regional Conference Series in Math. 43 (1980).
- [3] 河内, 3-manifold の fundamental group, 第3回代数セミナー報告, 80-141 (1980).
- [4] 河内, 3次元 3A 様体の基本群と Alexander 加群, シンポジウム「無限群の表現とその応用」報告集, 104-117 (1982).
- [5] A. Kawachi, A test for the fundamental group of a 3-manifold, Journal of Pure and Applied Algebra (to appear).
- [6] R.C. Lyndon - P.E. Schupp, Combinatorial Group Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89, Springer-Verlag, 1977.