数理解析研究所講究録
第 469 巻 1982 年 72-93

戸田方程式の hierarchy について

京大数理研　上野喜三雄
Ueno Kimio
東大理学部　高崎金久
Takasaki Kanehisa

§0. 序.

研究集会では，2次元 Minkowsky 時空における戸田方程式

$$\frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial x_1 \partial y_1} = -e^{\varphi(s+1)-\varphi(s)} + e^{\varphi(s)-\varphi(s-1)}, \tag{0.1}$$

($\varphi(s) = \varphi(s, x_1, y_1)$, (x_1, y_1)：光円錐座標，s：格子座標)

に対する hierarchy (高次の発展) の構造について報告した．

(0.1) とその一般化に関して，Lie 環論や表現論の観点から最近いろいろな研究が行われている ([5], [6], [7], [8]. これらはごく一部である.) ただそこでは hierarchy が余り詳しく論じられていない．他方，最近になって KP hierarchy の理論 (KP hierarchy は Kadomtsev - Petviashvili (KP) 方程式或は2次元 KdV 方程式と呼ばれる3次元の非線型微分方程式に対して構成される hierarchy で，KdV, Boussinesq, etc 或は Zakharov と Shabat によって逆散乱法で扱われた方程式等を特殊化或は部分系として導く．極めて高い普遍性をもつ hierarchy である.) が

著しく進展し，解空間の構造が明らかにされた．([1],[2],[3]) この中で明確になったことは，hierarchy全体を考察することが解空間の構造や内部対称性を論じるうえで本質的であること，また，『τ(タウ)函数』が最も本質的な従属変数であること，hierarchyはτ函数に対する無限個の広田型双線型微分方程式に変換されること，etc……である．

広田方程式(0.1)についてはどうだろうか？——これが我々の研究の動機づけだった．[4]に於てKP方程式の解の真空期待値表示と(0.1)の関係が指摘されていたことは重要なhintになった．

結論を言えばこうなる：(0.1)に対してKP方程式と同様hierarchyが導入できる．但し，今度は微分(差分)作用素の間のZakharov-Shabat方程式，Lax方程式の代りに，∞×∞行列に対するLax，Zakharov-Shabat型方程式としてhierarchyが構成される．更に(形式的)波動函数により『線型化』が，また，τ函数により『双線型化』がなされる．これらはKP理論と非常によく似た構造をもつ．しかもこうして構成されたhierarchyは，実は2成分KP hierarchyと関係づけられるのである．

——以上のことは既に[11]にまとめて報告してあり，研究集会における講演でも説明したので，本稿ではその要旨のみ説明し，代わりに**準周期解**について詳しく論じたい．

戸田方程式の準周期解については古くからいろいろの仕事があり，興味深い結果が知られているが，ここでは<u>hierarchyのレベルでの準周期解の構造</u>，および一般の用いた無限格子から<u>周期的格子への移行の様子</u>を調べることを目標にする．（なお(0.1)単独の準周期解については[9]の末尾で論じられている。また[10]は本稿の議論に大変参考になった．）

§1では準備として[11]の内容の復習と後の議論に必要な事項の補足を行う。§2では準周期解について論じる．

§1. 戸田方程式のhierarchyについて（[11]の要約）.

1.1. 無限次行列（indexを$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$でとる，$\mathbb{Z}=\{$整数全体$\}$）に関する記号を幾つか用意する．$\Lambda^j$を$j$次shift行列とする：

$$\Lambda^j=(\delta_{\mu+j,\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{Z}}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc}\cdots & -1 & 0 & \cdots\; j & \cdots\end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} & \ddots \;\; 1 \\ \hline & 1 \;\; \ddots\end{array}\right] & \begin{array}{c}\vdots\\-1\\0\\\vdots\end{array}\end{array}.$$

無限次行列$A=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathrm{diag}[a_j(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^j$に対して一般に

$$(A)_+=\sum_{j\geq 0}\mathrm{diag}[a_j(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^j,$$
$$(A)_-=\sum_{j<0}\mathrm{diag}[a_j(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^j$$

とおく．（$\mathrm{diag}[a_j(s)]_{s\in\mathbb{Z}}$は対角行列で$(s,s)$成分に$a_j(s)$をおいたものを表わすものとする．）これらの記号を以下頻繁に用いる．

1個の離散変数 s，2個の（無限成分）連続変数 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)$ および次の形の無限次行列を用意する：

$$(1.2)\quad \begin{cases} L=\displaystyle\sum_{-\infty<j\le 1}\mathrm{diag}[b_j(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^j, & b_0(s)\equiv 1,\ c_0(s)\ne 0, \\ M=\displaystyle\sum_{-1\le j<\infty}\mathrm{diag}[c_j(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^j, & b_j(s),c_j(s)\text{は}(s,x,y)\text{の函数}, \\ B_n=(L^n)_+,\quad C_n=(M^n)_-. & \end{cases}$$

以後記号の簡素の為しばしば (x,y) を明示することを略す．

$b_j(s)=b_j(s,x,y)$，$c_j(s)=c_j(s,x,y)$ は以下に与える方程式系の未知函数である．（なお上のような形の L，M に対して L^n，M^n は代数的に意味をもつことに注意せよ．）さて，このとき，

<u>定理1.</u>『Lax方程式系』（こう呼ぶことにしよう．）

$$(1.3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_n}=[B_n,L], & \dfrac{\partial M}{\partial x_n}=[B_n,M], \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_n}=[C_n,L], & \dfrac{\partial M}{\partial y_n}=[C_n,M],\quad n=1,2,\cdots, \end{cases}$$

と『Zakharov-Shabat方程式系』（こう呼ぶことにしよう．）

$$(1.4)\quad \begin{cases} [\partial_{x_n}-B_n,\partial_{x_m}-B_m]=[\partial_{y_n}-C_n,\partial_{y_m}-C_m] \\ \quad =[\partial_{x_n}-B_n,\partial_{y_m}-C_m]=0,\quad m,n=1,2,\cdots, \end{cases}$$

とは同値である．□

<u>定義：</u>

<u>(1.3)或は(1.4)によって定義される非線型微分方程式系（未知函数は $b_j(s)$，$c_j(s)$．或はL，M自身と思ってもよい．）を『戸田方程式のhierarchy』と呼ぶ。</u> 実際に(0.1)は，

$$(1.5)\qquad B_1=\Lambda+\mathrm{diag}\left[\frac{\partial\varphi(s)}{\partial x_1}\right]_{s\in\mathbb{Z}},\quad C_1=\mathrm{diag}\left[e^{\varphi(s)-\varphi(s+1)}\right]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^{-1}$$

とおくとき, (1.4) の中のひとつ

$$[\partial_{x_1} - B_1,\quad \partial_{y_1} - C_1] = 0$$

と同値だから, (1.3), (1.4) は (0.1) を互いに consistent な高次の発展から成る hierarchy に延長したものとみなされる.

1.2. 次に『線型化』についてであるが,

定理2. hierarchy をみたす L, M に対して, 線型問題

$$(1.6)\quad \begin{cases} LW^{(\infty)} = W^{(\infty)}\Lambda, & MW^{(0)} = W^{(0)}\Lambda^{-1}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_n} = B_n W, & \dfrac{\partial W}{\partial y_n} = C_n W \quad (W = W^{(\infty)}, W^{(0)}), \end{cases}$$

の解 $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ で次の形をもつものが存在する:

$$(1.7)\quad \begin{cases} W^{(\infty)} = \hat{W}^{(\infty)} e^{\eta(x,\Lambda)}, \\ W^{(0)} = \hat{W}^{(0)} e^{\eta(y,\Lambda^{-1})}, \\ \hat{W}^{(\infty)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}[\hat{w}_j^{(\infty)}(s)]_{s\in\mathbb{Z}} \Lambda^{-j}, \quad \hat{w}_0^{(\infty)} = 1, \quad \hat{w}_0^{(0)} \neq 0, \\ \hat{W}^{(0)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}[\hat{w}_j^{(0)}(s)]_{s\in\mathbb{Z}} \Lambda^{j}, \quad \hat{w}_j^{(\infty)}(s), \hat{w}_j^{(0)}(s) \text{ は } (s,x,y) \text{ の関数}, \\ \eta(x,\Lambda) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \Lambda^n, \quad \eta(y,\Lambda^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Lambda^{-n}. \end{cases}$$

逆に上のような $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ が存在すれば, L, M は hierarchy の解を与える. □

注意3. (1.6) を $\hat{W}^{(\infty)}, \hat{W}^{(0)}$ のみを用いて次のように書き直すこともできる:

$$(1.8)\quad \begin{cases} L = \hat{W}^{(\infty)}\Lambda\hat{W}^{(\infty)-1}, \quad M = \hat{W}^{(0)}\Lambda^{-1}\hat{W}^{(0)-1}, \\ \dfrac{\partial\hat{W}^{(\infty)}}{\partial x_n} = B_n\hat{W}^{(\infty)} - \hat{W}^{(\infty)}\Lambda^n, \quad \dfrac{\partial\hat{W}^{(\infty)}}{\partial y_n} = C_n\hat{W}^{(\infty)}, \\ \dfrac{\partial\hat{W}^{(0)}}{\partial x_n} = B_n\hat{W}^{(0)}, \quad \dfrac{\partial\hat{W}^{(0)}}{\partial y_n} = C_n\hat{W}^{(0)} - \hat{W}^{(0)}\Lambda^{-n}. \end{cases}$$

$\hat{W}^{(\infty)}$, $\hat{W}^{(0)}$ の形とこれらの方程式から容易にわかることだが、B_n, C_nが一般の無限次行列で、ある$\hat{W}^{(\infty)}$, $\hat{W}^{(0)}$に対して(但し、(1.7)の形は仮定.) (1.6) 或は (1.8) 各々の後半の微分方程式系が成立していれば、実は自動的に

$$B_n = (L^n)_+ = (\hat{W}^{(\infty)}\Lambda^n\hat{W}^{(\infty)-1})_+, \quad C_n = (M^n)_- = (\hat{W}^{(0)}\Lambda^{-n}\hat{W}^{(0)-1})_-$$

が従う. 実際 (1.8) を

$$B_n = \frac{\partial\hat{W}^{(\infty)}}{\partial x_n}\hat{W}^{(\infty)-1} + \hat{W}^{(\infty)}\Lambda^n\hat{W}^{(\infty)-1} = \frac{\partial\hat{W}^{(0)}}{\partial x_n}\hat{W}^{(0)-1},$$
$$C_n = \frac{\partial\hat{W}^{(0)}}{\partial y_n}\hat{W}^{(0)-1} + \hat{W}^{(0)}\Lambda^{-n}\hat{W}^{(0)-1} = \frac{\partial\hat{W}^{(\infty)}}{\partial y_n}\hat{W}^{(\infty)-1}$$

と書き直して各辺の無限次行列の形を見比べればわかる. □

$W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ は波動函数にあたる. (1.6) をより線型問題らしく書き直すことは§2の議論の為に必要なので、ここで少し説明しておこう. 『形式的波動函数』$\psi^{(\infty)}$, $\psi^{(0)}$ $\underbrace{}_{\lambda\text{を形式的な spectral parameter として}}$ を次のように定義する;

$$(1.9)\quad \begin{cases} \psi^{(\infty)} = \psi^{(\infty)}(s,x,y;\lambda) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\hat{w}_j^{(\infty)}(s,x,y)\lambda^{-j}\right)\lambda^s e^{\xi(x,\lambda)}, \\ \psi^{(0)} = \psi^{(0)}(s,x,y;\lambda) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\hat{w}_j^{(0)}(s,x,y)\lambda^{j}\right)\lambda^s e^{\xi(y,\lambda^{-1})}. \end{cases}$$

(→ (1.7) 参照.) これらを λ に関する形式的巾級数とみなす. ま

た，B_n，C_n の成分を次のように表示しておく：

$$(1.10)\quad \begin{cases} B_n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{diag}\,[\,b_{n,j}(s)\,]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^j\,, \\ C_n = \sum_{j=-n}^{-1} \mathrm{diag}\,[\,c_{n,j}(s)\,]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^j\,, \end{cases}$$

$b_{n,j}(s)$, $c_{n,j}(s)$ は (s,x,y) の函数.

<u>**命題4.**</u> (1.6) 後半の微分方程式系は次に同値である；

$$(1.11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi(s;\lambda)}{\partial x_n} = \sum_{j=0}^{n} b_{n,j}(s)\,\psi(s+j;\lambda), \\ \dfrac{\partial\psi(s;\lambda)}{\partial y_n} = \sum_{j=-n}^{-1} c_{n,j}(s)\,\psi(s+j;\lambda), \quad \psi=\psi^{(\infty)}, \psi^{(0)}. \ \square \end{cases}$$

$\psi^{(\infty)}$ は $\lambda=\infty$ に，$\psi^{(0)}$ は $\lambda=0$ に付随した波動函数，という描像（イメージ）をもつ．実際に §2 で Baker-Akhiezer 函数を考えるときにその局所的表示として $\psi^{(\infty)}$, $\psi^{(0)}$ が現われて来る．

<u>1.3. 『τ 函数』について説明しよう．</u>

<u>**定理5.**</u> (1.8) をみたす $\hat{W}^{(\infty)}$, $\hat{W}^{(0)}$ に対して τ 函数 $\tau(s,x,y)$ が次の関係式により consistent に，かつ定数倍を除き一意的に定まる；

$$(1.12)\quad \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{w}_j^{(\infty)}(s,x,y)\lambda^{-j} = \dfrac{\tau(s,x-\epsilon(\lambda^{-1}),y)}{\tau(s,x,y)}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \hat{w}_j^{(0)}(s,x,y)\lambda^{j} = \dfrac{\tau(s+1,x,y-\epsilon(\lambda))}{\tau(s,x,y)}, \\ \text{ここに } \epsilon(z) = \left(z, \dfrac{z^2}{2}, \dfrac{z^3}{3}, \cdots; \dfrac{z^n}{n}, \cdots\right). \end{cases}$$

ただし (1.12) 右辺は形式的に Taylor 展開して解釈する．則ち，

$$
(1.13)\begin{cases}
\hat{w}_j^{(\infty)}(s,x,y) = \dfrac{p_j(-\tilde{\partial}_x)\,\tau(s,x,y)}{\tau(s,x,y)}, \\
\hat{w}_j^{(0)}(s,x,y) = \dfrac{p_j(-\tilde{\partial}_y)\,\tau(s+1,x,y)}{\tau(s,x,y)}, \qquad j=0,1,2,\cdots, \\
\text{ここに } \tilde{\partial}_x = (\partial_{x_1}, \frac{\partial_{x_2}}{2}, \frac{\partial_{x_3}}{3}, \cdots),\ \tilde{\partial}_y = (\partial_{y_1}, \frac{\partial_{y_2}}{2}, \frac{\partial_{y_3}}{3}, \cdots), \\
\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x)\lambda^j = e^{\eta(x,\lambda)} \quad (p_0 = 1). \left[\begin{array}{l} p_j(x)\text{ は }x\text{ の多}\\ \text{項式として定まる.}\end{array}\right] \to \text{see [1].}
\end{cases}
$$

という意味で(1.12)を解釈する. □

(1.13) は τ に対する連立線型偏微分方程式系であるから，τ が存在する為には積分可能条件が必要である. $\hat{W}^{(\infty)}$, $\hat{W}^{(0)}$ が (1.8) をみたすとき，その積分可能条件が従うのである.

上で導入した $\tau(s,x,y)$ は 2成分KP hierarchy の τ 函数と(単純な符号因子を除いて)一致する. ([11]) しかし実はこの $\tau(s,x,y)$ は，戸田方程式(0.1)の双線型化において以前から用いられてきた τ 函数とズレがある. 則ち，

$$
(1.14)\qquad \tau'(s,x,y) = e^{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu x_\nu y_\nu}\,\tau(s,x,y)
$$

と定義するとき，この τ' が，従来の双線型化で用いられ，[4] でも現れている τ 函数に一致する. 実際に，我々の hierarchy を τ' に対する広田型式の双線型方程式に変換するとき，(0.1) に対応する次の方程式を得る；

$$
(1.15)\qquad D_{x_1}D_{y_1}\,\tau'(s)\cdot\tau'(s) + 4\sinh^2\!\left(\frac{D_s}{2}\right)\tau'(s)\cdot\tau'(s) = 0.
$$

(勿論この他にも無限個の広田型式の双線型方程式が従う.)

τ' と $\psi^{(\infty)}$, $\psi^{(0)}$ の関係は (1.12) により次のようになる.

$$
(1.16)\quad \begin{cases} \psi^{(\infty)}(s,x,y;\lambda) = \dfrac{\tau'(s,x-\epsilon(\lambda^{-1}),y)}{\tau'(s,x,y)}\lambda^s e^{\eta(x,\lambda)+\eta(y,\lambda^{-1})}, \\ \psi^{(0)}(s,x,y;\lambda) = \dfrac{\tau'(s+1,x,y-\epsilon(\lambda))}{\tau'(s,x,y)}\lambda^s e^{\eta(x,\lambda)+\eta(y,\lambda^{-1})}. \end{cases}
$$

則ち, τ' は (1.16) を通じて導入される.

§2. 準周期解について.

この節では Baker–Akhiezer 函数を構成することにより, 戸田方程式 hierarchy の準周期解を求める. 主な関心は, hierarchy レベルでの τ 函数の構造と周期的格子への reduction の為の条件を調べることにある.

戸田方程式の準周期解についてはこれまでに様々な方法で扱われて来ている. Baker–Akhiezer 函数による構成は [9] の中で Krichever によりまとめられているが hierarchy は扱われていない. それゆえ hierarchy レベルでの考察には大いに興味がある.

また 2-周期的格子は sine–Gordon 方程式に同値であるから, 周期的格子への移行の様子をさぐることは, [10] [12] で扱われた sine–Gordon タイプの方程式の準周期解の構成を我々の立場から見直すという意味で, 大切な問題である.

以上の問題意識を念頭において，準周期解について議論を進めよう．

2.1. Baker-Akhiezer函数を構成しよう．

記号をいくつか用意する：Cをgenus gの閉Riemann面とする．C上の有理型函数fに対する因子を(f)で，また，C上の因子Dに対して$\{f ; C$上の有理型函数，$(f)+D \geqq 0\}$を$L(D)$であらわす．

Baker-Akhiezer函数を指定する為のdataとして，C上の2点P_∞, P_0および各々におけるlocal parameter z, z' ($z=0$ at P_∞, $z'=0$ at P_0)，次数gの一般正因子$\sum_{j=1}^{g} P_j$を用意する．

このとき，Baker-Akhiezer函数（より正確にはP_∞で正規化されたBaker-Akhiezer函数）$\psi(s,x,y;P)$とは，次の条件(i), (ii)をみたすものをいう：

(i) $\psi(s,x,y;P)$は(s,x,y)および$P \in C$の函数で，Pに関して$C \setminus \{P_\infty, P_0\}$で有理型であり，その極因子は$\sum_{j=1}^{g} P_j$に一致する．

(ii) P_∞, P_0において$\psi(s,x,y;P)$は次のように振舞う．

$$
(2.1)\quad \begin{cases} \psi(s,x,y;P) = (1+O(z))\, z^{-s} e^{\eta(x,z^{-1})} & (P \to P_\infty), \\ \psi(s,x,y;P) = O(1)\, z'^{s} e^{\eta(y,z'^{-1})} & (P \to P_0). \end{cases}
$$

このようなψの存在や一意性の為の条件，アーベル積分とテータ函数による表示，ψがx, yに関してみたす線型微分方程式，etc…に関しては[9],[10]の中で詳しく論じられているので，ここでは議論の大筋のみ述べることにする．

上のようなψが存在するとして，dlogψの構造を調べよう．（dはC上の外微分．）

dlogψは条件(i),(ii)によりC上の有理型微分を与える．そして，各点での留数はすべて整数となる．P_∞, P_0では

$$\operatorname*{res}_{P_\infty} d\log\psi = -s, \quad \operatorname*{res}_{P_0} d\log\psi = s.$$

またψの零点(resp. 極)ではdlogψは1位極をもち，留数はψの零点位数（resp. $-$(ψの極位数)）に等しい．留数定理によりdlogψの留数の極全部に関する総和は0のはずだから，ψの零点因子は次数gである．それを$\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y)$と記す．

C上の標準的homology基底a_k, b_k $(k=1,\cdots,g)$および第1種微分の基底$\omega_1,\cdots,\omega_g$で正規化されたものをとる．則ち，

(2.2) $\quad \int_{a_k}\omega_j = \delta_{jk}, \quad \int_{b_k}\omega_j = T_{jk}$ ，(T_{jk})は周期行列．

更に，$\omega_{P,Q}$，$\omega_{P,\nu+1}$ $(P, Q\in C,\ P\neq Q,\ \nu=1,2,\cdots)$によって，次の条件をみたす有理型微分をあらわす：

$$(2.3)\quad \begin{cases} \omega_{P,Q} = \begin{cases} \text{holomorphic in } C \setminus \{P, Q\}, \\ \frac{dz''}{z''} + \text{holomorphic at } P_\infty, \\ -\frac{dz'''}{z'''} + \text{holomorphic at } P_0, \end{cases} \\ \int_{a_k} \omega_{P,Q} = 0 \quad \text{for } k = 1, \cdots, g. \end{cases}$$

$$(2.4)\quad \begin{cases} \omega_{P,\nu+1} = \begin{cases} \text{holomorphic in } C \setminus \{P\}, \\ d(z''^{-\nu}) + \text{holomorphic at } P, \end{cases} \\ \int_{a_k} \omega_{P,\nu+1} = 0 \quad \text{for } k = 1, \cdots, g. \end{cases}$$

z'', z''' は各々 P, Q における local parameter ($z''=0$ at P, $z'''=0$ at Q) であって，P, Q とともに指定しておく．

よく知られているように，これらは C 上の有理型微分の基底をなす．dlog ψ は (i), (ii) および前述の議論により，次のように表わされる：

$$(2.5)\quad d\log\psi = \sum_{\nu\geq 1} x_\nu \omega_{P_\infty,\nu+1} + \sum_{\nu\geq 1} y_\nu \omega_{P_0,\nu+1} + s\,\omega_{P_0,P_\infty} + \sum_{j=1}^{g} \omega_{P_j(s,x,y),P_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j, \quad c_j \text{ は定数.}$$

C 上に基点 P_* を固定し，アーベル写像 $\mathcal{A}: C \to J(C)$ を考える．($J(C)$ は C の Jacobi 多様体をあらわす．) 因子に対しては加法的に拡張して定義しておく．即ち，

$$(2.6)\quad \begin{cases} C \ni P \longmapsto \mathcal{A}(P) = \left(\int_{P_*}^{P} \omega_k\right)_{k=1,\cdots,g} \in J(C), \\ D = \sum_j m_j P_j \longmapsto \mathcal{A}(D) = \sum_j m_j \mathcal{A}(P_j). \end{cases}$$

因子 $\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y)$ のアーベル写像による像を計算してみよう。

(2.5)の両辺を a_k, b_k に沿って積分すると、$d\log\psi$ の留数がどの点でも整数であること (2.3), (2.4) で a_k に沿う積分に関して課した条件により、次の関係式を得る。

$$
(2.7)\quad \begin{cases} 2\pi\sqrt{-1}\,\mathbb{Z} \ni \displaystyle\int_{a_k} d\log\psi = c_k, \\[2ex] 2\pi\sqrt{-1}\,\mathbb{Z} \ni \displaystyle\int_{b_k} d\log\psi = \sum x_\nu \int_{b_k}\omega_{P_\infty,\nu+1} + \sum y_\nu \int_{b_k}\omega_{P_0,\nu+1} + \\[2ex] \qquad\qquad + s\displaystyle\int_{b_k}\omega_{P_0,P_\infty} + \sum_{j=1}^{g}\int_{b_k}\omega_{P_j(s,x,y),P_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j T_{jk}. \end{cases}
$$

しかも Riemann's bilinear relation により、

$$
(2.8)\quad \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{b_k}\omega_{P_\infty,\nu+1}\right)_{k=1,\cdots,g} = (-\nu)\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\nu!}\left(\dfrac{d^\nu A}{dz^\nu}\right)(P_\infty), \\[2ex] \left(\displaystyle\int_{b_k}\omega_{P_0,\nu+1}\right)_{k=1,\cdots,g} = (-\nu)\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\nu!}\left(\dfrac{d^\nu A}{dz^\nu}\right)(P_0), \\[2ex] \left(\displaystyle\int_{b_k}\omega_{P_0,P_\infty}\right)_{k=1,\cdots,g} = 2\pi\sqrt{-1}\,A(P_0-P_\infty), \\[2ex] \left(\displaystyle\int_{b_k}\omega_{P_j(s,x,y),P_j}\right)_{k=1,\cdots,g} = 2\pi\sqrt{-1}\,A(P_j(s,x,y)-P_j). \end{cases}
$$

これらを用いることにより、結局次を得る。

$$
(2.9)\quad \begin{cases} A\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y) - \sum_{j=1}^{g} P_j\right) = v_\infty(x) + v_0(y) - sA(P_0-P_\infty), \\[2ex] \text{ここに}\quad v_\infty(x) = \displaystyle\sum_{\nu\geq 1}\dfrac{\nu x_\nu}{\nu!}\left(\dfrac{d^\nu A}{dz^\nu}\right)(P_\infty), \\[2ex] \qquad\quad v_0(y) = \displaystyle\sum_{\nu\geq 0}\dfrac{\nu y_\nu}{\nu!}\left(\dfrac{d^\nu A}{dz^\nu}\right)(P_0). \end{cases}
$$

<u>ψ の零点因子 $\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y)$ が Jacobi 多様体 $J(C)$ 上で直線運動をすることに注意せよ</u>。(これは各種のソリトン方程式に共通する。)

$\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y)$ は ψ によらず(線型同値を除いて) C, P_∞, P_0, $\sum_{j=1}^{g} P_j$ のみに依存して一意的に定まる，ということを特に(2.9)は意味している．そこで，以下，$\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y)$ がすべての $s \in \mathbb{Z}$ と generic な (x,y) に対して一般因子であること，即ち，

(2.10) $$\dim L\Big(\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y)\Big) = 1 \quad \text{for any } s \in \mathbb{Z} \text{ and the generic } (x,y)$$

を仮定しよう．

このとき，条件(i)(ii)をみたす Baker-Akhiezer 函数が一意的であることは（2つの Baker-Akhiezer 函数の比が C 上の有理型函数としてどのようなものになるかを考えれば）直ちに従い，また，[9], [10]で展開されているような議論をくりかえせば ψ の具体的な表示もわかる．こうして次の結果を得る．

定理 6. (2.10) の下で Baker-Akhiezer 函数 $\psi(s,x,y;P)$ は一意的に定まり，次のように具体的に表示される．

(2.11) $$\begin{aligned}\psi(s,x,y;P) &= \exp\Big[\sum_{\nu\geq 1} x_\nu\Big(d_\nu + \int_{P_*}^{P}\omega_{P_\infty,\nu+1}\Big) + \sum_{\nu\geq 1} y_\nu \int_{P_\infty}^{P}\omega_{P_0,\nu+1} + s\Big(d_0 + \int_{P_*}^{P}\omega_{P_0,P_\infty}\Big)\Big] \\ &\times \frac{\theta\big(\mathcal{A}(P) - v_\infty(x) - v_0(y) + s\mathcal{A}(P_0 - P_\infty) - \sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j) + K\big)\,\theta\big(\mathcal{A}(P_\infty) - \sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j) + K\big)}{\theta\big(\mathcal{A}(P_\infty) - v_\infty(x) - v_0(y) + s\mathcal{A}(P_0 - P_\infty) - \sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j) + K\big)\,\theta\big(\mathcal{A}(P) - \sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j) + K\big)}.\end{aligned}$$

ここに K は Riemann 定数([ ],[ ])，θ は (T_{jk}) に対するテータ級数，

$$\theta(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp 2\pi\sqrt{-1}\Big[\sum_{j=1}^{g} n_j u_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{g} T_{jk} n_j n_k\Big].$$

また，定数 $d_\nu, d_0,$ 　は次のように定める．

$$(2.12)\begin{cases} d_\nu + \int_{P_*}^{P} \omega_{P_\infty,\nu+1} = z^{-\nu} + O(z) \quad (P \to P_\infty), \\ d_0 + \int_{P_*}^{P} \omega_{P_0,P_\infty} = -\log z + O(z) \; (P \to P_\infty). \end{cases}$$

$v_\infty(x), v_0(y)$ は (2.9) で定義した1次式である．□

2.2. $\psi(s,x,y;P)$ が x, y に対してみたす線型微分方程式を導こう．

$b_{n,\nu}(s,x,y)$, $c_{n,\nu}(s,x,y)$ を次のように定める．

$$(2.13)\begin{cases} \dfrac{\partial\psi(s,x,y;P)}{\partial x_n} - \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu}(s,x,y)\psi(s+\nu,x,y;P) = O(z) \; (P\to P_\infty), \\ \dfrac{\partial\psi(s,x,y;P)}{\partial y_n} - \sum_{\nu=-n}^{-1} c_{n,\nu}(s,x,y)\psi(s+\nu,x,y;P) = O(1) \; (P\to P_0), \\ b_{n,n}(s,x,y) = 1. \end{cases}$$

(2.1)の第1の条件から，$b_{n,\nu}$ は一意的に定まる．他方，(2.9) により $\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y))$ は x, y, s に関して linear で (x,y) について定数にならないから，generic な (x,y) に対して $\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y)$ の成分の中に P_0 は含まれない。従って，generic な (x,y) に対して

$$\psi(s,x,y;P)\, z^{1-s} e^{-\xi(y,z^{-1})} \neq 0 \quad \text{at } P_0.$$

このことにより，$c_{n,\nu}$ も一意的に定まる．

このように $b_{n,\nu}$, $c_{n,\nu}$ を定めると，

$$\left[\frac{\partial\psi(s;P)}{\partial x_n} - \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu}(s)\psi(s+\nu;P)\right]\psi(s;P)^{-1} \in L\Big(\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y) - P_\infty\Big),$$

$$\left[\frac{\partial\psi(s;P)}{\partial y_n} - \sum_{\nu=-n}^{-1} c_{n,\nu}(s)\psi(s+\nu;P)\right]\psi(s;P)^{-1} \in L\left(\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y) - P_\infty\right).$$

今 (2.10) を仮定しているから，

$$L\left(\sum_{j=1}^{g} P_j(s,x,y) - P_\infty\right) = 0 \quad \text{for the generic } (x,y).$$

従って (2.13) の左辺は 0 であることがわかる．こうして，

<u>定理 7.</u> (2.13) のように $b_{n,\nu}$, $c_{n,\nu}$ を定めると，

$$(2.14)\begin{cases} \dfrac{\partial\psi(s,x,y;P)}{\partial x_n} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu}(s,x,y)\psi(s+\nu,x,y;P), \\ \dfrac{\partial\psi(s,x,y;P)}{\partial y_n} = \displaystyle\sum_{\nu=-n}^{-1} c_{n,\nu}(s,x,y)\psi(s+\nu,x,y;P) \end{cases}$$

がみたされる．従って，P_∞, P_0 における ψ の局所展開から $\hat{w}_\nu^{(\infty)}$, $\hat{w}_\nu^{(0)}$ を

$$(2.15)\begin{cases} \psi(s,x,y;P) = \left(\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{w}_\nu^{(\infty)}(s,x,y)\, z^\nu\right) z^{-s} e^{\eta(x,z)} & (P\to P_\infty), \\ \psi(s,x,y;P) = \left(\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{w}_\nu^{(0)}(s,x,y)\, z'^\nu\right) z'^s e^{\eta(y,z'^{-1})} & (P\to P_0) \end{cases}$$

によって定めると，これらは戸田方程式 hierarchy の線型化方程式の解を与える．$B_n = \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{diag}[b_{n,\nu}(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^\nu$, $C_n = \sum_{\nu=-n}^{-1} \mathrm{diag}[c_{n,\nu}(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^\nu$ は対応する Zakharov-Shabat 方程式の解である．□

定理の statement の後半が (2.14) より従うことは，§1 の中で述べた内容から明らかであろう．

<u>2.3.</u>　　ψ から戸田方程式 hierarchy の解が得られることがわかったから（これを<u>準周期解</u>と呼ぶ）<u>そので函数を計</u>

算してみよう.

τ函数$\tau'(s,x,y)$は次のように定まる.

$$
(2.16)\quad
\begin{cases}
\psi(s,x,y;P) = \dfrac{\tau'(s,x-\epsilon(z),y)}{\tau'(s,x,y)} z^{-s} e^{\eta(x,z^{-1})+\eta(y,z)} & (P\to P_\infty),\\[2ex]
\psi(s,x,y;P) = \dfrac{\tau'(s+1,x,y-\epsilon(z'))}{\tau'(s,x,y)} z'^{s} e^{\eta(x,z')+\eta(y,z'^{-1})} & (P\to P_0).
\end{cases}
$$

ここに $\epsilon(z) = (z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \cdots)$, $\epsilon(z') = (z', \frac{z'^2}{2}, \frac{z'^3}{3}, \cdots)$.

(2.11)の表示のうち，テータ函数の部分に注目する．そして

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}(P) - v_\infty(x) - v_0(y) + s\mathcal{A}(P_0 - P_\infty)\\
&= \begin{cases}
\mathcal{A}(P_\infty) - v_\infty(x-\epsilon(z)) - v_0(y) + s\mathcal{A}(P_0-P_\infty) & (P\to P_\infty)\\
\mathcal{A}(P_0) - v_\infty(x) - v_0(y-\epsilon(z')) + (s+1)\mathcal{A}(P_0-P_\infty) & (P\to P_0)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

という関係に注意して(2.11)と(2.16)を見比べると，

$$
\theta\Big(\mathcal{A}(P_\infty) - v_\infty(x) - v_0(y) + s\mathcal{A}(P_0-P_\infty) - \sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j) + K\Big)
$$

がτ'の"主要部分"を与えることがわかる．ただ，これでは完全ではないので，更に

$$
e^{\frac{1}{2}Q(s,x,y)}, \qquad Q(s,x,y)\text{ は }x,y,s\text{ の2次式}
$$

という因子をかけて正しい$\tau'(s,x,y)$を得ることをめざす．その為には，Qが次の2つの関係式をみたすように定まれば良い．

$$
(2.17)\quad
\begin{aligned}
&\exp\frac{1}{2}\big[Q(s,x-\epsilon(z),y) - Q(s,x,y)\big] = \frac{\theta\big(\mathcal{A}(P_\infty) - \sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j) + K\big)}{\theta\big(\mathcal{A}(P) - \sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j) + K\big)} \times\\
&\times \exp\Big[\sum_{\nu\ge1} x_\nu\Big(d_\nu + \int_{P_*}^{P}\omega_{P_\infty,\nu+1} - z^{-\nu}\Big) + \sum_{\nu\ge1} y_\nu\Big(\int_{P_\infty}^{P}\omega_{P_0,\nu+1} - z^{\nu}\Big) + s\Big(d_0 + \int_{P_*}^{P}\omega_{P_0,P_\infty} + \log z\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

$$\exp\frac{1}{2}\left[Q(s+1,x,y-\epsilon(z'))-Q(s,x,y)\right] = \frac{\theta(\mathcal{A}(P_\infty)-\sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j)+K)}{\theta(\mathcal{A}(P)-\sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j)+K)}\times$$

$$\times\exp\left[\sum_{\nu\geq 1}x_\nu\left(d_\nu+\int_{P_*}^{P}\omega_{P_\infty,\nu+1}-z'^{\nu}\right)+\sum_{\nu\geq 1}y_\nu\left(\int_{P_\infty}^{P}\omega_{P_0,\nu+1}-z'^{-\nu}\right)+s\left(d_0+\int_{P_*}^{P}\omega_{P_0,P_\infty}-\log z'\right)\right].$$

(2.12) などに注意すれば，Q が2次式として定まることは容易に確められる．

こうして Q を定めれば，$\tau'(s,x,y)$ の最終表示は次のとおり；

定理 8. 定理7で与えられた戸田方程式の解のて函数 $\tau'(s,x,y)$ は（定数倍を除き）次で与えられる．

(2.18) $$\tau'(s,x,y) = e^{\frac{1}{2}Q(s,x,y)}$$
$$\times\ \theta(\mathcal{A}(P_\infty)-\mathcal{V}_\infty(x)-\mathcal{V}_0(y)+s\mathcal{A}(P_0-P_\infty)-\sum_{j=1}^{g}\mathcal{A}(P_j)+K).\ \square$$

2.4. 周期的格子への移行.

上のようにして構成した準周期解が l-周期的，即ち，

$$b_{n,\nu}(s+l,x,y)=b_{n,\nu}(s,x,y),\quad c_{n,\nu}(s+l,x,y)=c_{n,\nu}(s,x,y)$$

となる為の条件を与えよう．

定理 9. P_0, P_∞ に対して

(2.19) $$l\mathcal{A}(P_0-P_\infty)=0$$

がみたされれば，$b_{n,\nu}, c_{n,\nu}$ は l-周期的である．より詳しく次のことが成立する：C 上の有理型函数 f で

$$
(2.20)\quad
\begin{cases}
(\zeta) = l P_0 - l P_\infty, \\
\zeta = \begin{cases} z^{-l}(1+O(z)) & (P \to P_\infty), \\ z'^{\,l}(1+O(z')) & (P \to P_0), \end{cases} \\
\psi(s+l, x, y; P) = \zeta\, \psi(s, x, y; P)
\end{cases}
$$

をみたすものが存在する. □

このようなζの存在から $b_{n,\nu}$, $c_{n,\nu}$ の l-周期性が従うことは (2.13), (2.14) から明らかであろう.

定理の証明であるが, これは Abel の定理の証明(の特殊な場合)を思い出せば直ちにわかる. 実際, (2.19) が

$$
(2.21)\quad \zeta = \exp\left[l \int_{P_*}^{P} \omega_{P_0, P_\infty} + \sum_{j=1}^{g} c_j \omega_j \right], \quad c_j \text{ は定数},
$$

という形のζがC上の1価有理型函数を定める為の必要十分条件であることは, $d\log\zeta$ に対して Baker-Akhiezer 函数の構成と同様の議論をくりかえせば示される. これが (2.20) の第1, 第2の条件をみたすことも容易にわかる.

このζを用いると,

$$
(2.22)\quad \omega_{P_0, P_\infty} = \frac{1}{l}\, d\log\zeta
$$

であるから ((2.3) をみたす $\omega_{P,Q}$ は一意的であることに注意. 従って $\frac{1}{l} d\log\zeta$ が (2.3) をみたすことを示せばよい. これは (2.20) 第1, 第2の条件からすぐに従う), $d\log\psi(s+l, x, y; P)$ を (2.5) のように表示しておくとき, $(s+l)\,\omega_{P_0, P_\infty}$ のうちの

$\ell\,\omega_{P_0, P_\infty}$ が exact form として分離される．これは (2.20) 最後の関係式を意味する．――― こうして定理 2.4 が証明される．

<u>注意 10.</u>　準周期解の周期性の問題が Jacobi 多様体の等分点という幾何学的なものと結びつくことは興味深い．

$\ell=2$ のとき，戸田方程式は sine-Gordon 方程式に同値である．良く知られているように，(2-20) のような有理型函数 ζ が存在すれば C は超楕円曲線の Riemann 面になる．このことは，sine-Gordon 方程式の準周期解が常に超楕円曲線に付随して現われる，というこれまで知られている事と合致する．([10], [12].)

周期的戸田方程式は通常 spectral parameter を有理的に含む逆散乱形式・零曲率方程式の形式で取扱われる．([5], [6], [7], [8].) §1 で解説した我々の定式化からそれを導くことは [11] で説明しておいた．[10] で用いられた sine-Gordon 方程式の逆散乱形式 (線型化方程式) はそれらの $\ell=2$ の場合にあたる：

$$
(2.23)\quad
\begin{cases}
i\Phi_\xi + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} u_\xi & \\ & -u_\xi \end{pmatrix}\Phi + \dfrac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\Phi = 0, \\[2ex]
i\Phi_\eta + \dfrac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} & e^{iu} \\ e^{-iu} & \end{pmatrix}\Phi = 0. \qquad [\,[10],\ (0.4)\text{式}]
\end{cases}
$$

[10] ではその準周期解を Pohlmeyer - Lund - Regge 方程式の準周期解の特殊化として導いている．(2.23) の準周期解を構成

するとき，付随する超楕円曲線は $w^2+\alpha z\prod_{j=1}^{2g+2}(z-\lambda_j^2)=0$ ($\alpha = \mathrm{cte}$, $\lambda_j \neq \lambda_k$ $(j\neq k)$, $\lambda_j \neq 0$) であって (2.23) における λ とは $z=\lambda^2$ の関係にある．[12] でも同様の超楕円曲線があらわれる．———— この z が定理9における ζ に対応する．□

References.

1. M. Sato, Soliton Equations as Dynamical Systems on a Infinite Dimensional Grassmann Manifolds, Sûri-Kaiseki Kenkyû-sho (RIMS, Kyoto Univ.) Kôkyûroku 439 (1981).
2. M. Sato and Y. Sato, 広田氏の Bilinear Equation について II, ibid., 414 (1981) (in Japanese.)
3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation Groups for Soliton Equations I, II, Proc. Japan Acad., 57 A (1981); III, J. Phys. Soc. Japan, 50 (1981).
4. T. Miwa, On Hirota's Difference Equations, Proc. Japan Acad., 58A (1982), 9-12.
5. O. I. Bogoyavlensky, On Perturbations of the Periodic Toda Lattice, Commun. Math. Phys., 51 (1976), 201 - 209.
6. M. Adler and P. van Moerbeke, Completely Integrable Systems, Euclidean Lie Algebras and Curves, Adv. in Math. 38 (1980),

267 - 317; Linearization of Hamiltonian Systems, Jacobi Varieties and Representation Theory, 318 - 379.

7. A. Reyman and M. Semenov-Tian-Shansky, Reduction of Hamiltonian Systems, Affine Lie Algebras and Lax Equations, Invent. Math. 54 (1979), 81-100; II, ibid., 63 (1981), 423-432.

8. A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, Two-Dimensional Genelarized Toda Lattice, Commun. math. Phys. 79 (1981), 473 - 488.

9. B. A. Dubrovin and I. M. Krichever, Тэта-Функции и Нелинейныи Уравнения, Uspekhi Math. Nauk., 36 (218) (1981), 11 - 18 (in Russian.)

10. E. Date, Multi-Soliton Solutions and Quasi-Periodic Solutions of Nonlinear Equations of Sine-Gordon Type, Osaka J. Math., 19 (1982), 125 - 158.

12. I. V. Cherednik, Finite-band Solutions to the Duality Equations on S^4 and Two-Dimensional Relativistically Invariant Systems, Soviet Phys. Dokl. 25 (5) (1979), 356-358.

11. K. Ueno and K. Takasaki, On the Toda Lattice Hierarchy, RIMS preprint 397. (1982).