数理解析研究所講究録
第 469 巻 1982 年 94-100

Landau-Lifschitz equation について

京大教養 伊達 悦朗
Date Etsuro
京大数理研 神保 道夫
Jimbo Michio
〃 柏原 正樹
Kashiwara Masaki
〃 三輪 哲二
Miwa Tetsuji

表題の方程式は、一次元空間上のスピン波を記述する次の偏微分方程式である。

$$\vec{S}_t = \vec{S}\times\vec{S}_{xx} + \vec{S}\times J\vec{S}, \quad \vec{S}=(S_1, S_2, S_3), \quad \vec{S}^2=1$$

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3) \ : \ \text{定数行列}.$$

Sklyanin[1)] は Lax pair を構成して、この積分可能性を示し、また広田[2)]は双線型化

$$D_1(f^*\cdot f + g^*\cdot g) = 0 \quad , (D_2 - D_1^2)(f^*\cdot f - g^*\cdot g) = 0$$

$$\left(D_2 - D_1^2 + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\right)\begin{matrix} f^*\cdot g \\ g^*\cdot f \end{matrix} + \tfrac{1}{2}(a^2-b^2)\begin{matrix} g^*\cdot f \\ f^*\cdot g \end{matrix} = 0$$

を得た。但し $a^2 = J_3 - J_1$, $b^2 = J_3 - J_2$, $x_1 = x$, $x_2 = -it$, かつ

$$S_1 = \frac{f^*g + g^*f}{f^*f + g^*g}, \quad S_2 = -i\frac{f^*g - g^*f}{f^*f + g^*g}, \quad S_3 = \frac{f^*f - g^*g}{f^*f + g^*g}.$$

Lax pair のスペクトルパラメタとして，自然に elliptic curve

$$E \ : \ \omega^2 = (k^2 - a^2)(k^2 - b^2)$$

が現われる。文献[3)]で展開された、ソリトン方程式の変換群の理論では、スペクトルパラメタが$\mathbb{P}^1$を動く場合を取扱っている。そこで$\mathbb{P}^1$をelliptic curveに置替えて理論を拡張しその立場からLandau-Lifschitz方程式を見直したい。

（$\mathbb{P}^1$上の）KP方程式は、次のように構成されていた。即ち、

(1) 自由フェルミ場　$\psi(k)$, $\psi^*(k)$　$(k \in \mathbb{P}^1)$

(2) 真空期待値　$\langle \psi(p)\psi^*(q) \rangle = \dfrac{q}{p-q}$

(3) 時間発展
$$e^H \psi(k) e^{-H} = e^{kx_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 + \cdots} \psi(k)$$
$$e^H \psi^*(k) e^{-H} = e^{-kx_1 - k^2 x_2 - k^3 x_3 - \cdots} \psi^*(k)$$

の3つを与えて、τ函数
$$\tau(x) = \langle e^{H(x)} g \rangle \quad , \qquad g : \text{Clifford群の}\overset{(\text{中性})}{\text{元}}$$
を作る。このとき、$\tau(x)$はgの如何にかかわらず、双線型のKPヒエラルヒー
$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3)\tau\cdot\tau = 0, \ (D_1^3 D_2 + 2D_2D_3 - 3D_1D_4)\tau\cdot\tau = 0, \ \cdots$$
を満たす。KPの代りに、involution $k \mapsto -k$に関する対称性を加えて、中性フェルミ場$\phi(k)$によるBKPヒエラルヒーが定義される。

elliptic curve E上のinvolution (fixed point free) $P=(k,\omega) \mapsto P^{\#} = (-k,-\omega)$を用いて、後者の拡張を考える。$E$上の無限遠点$\infty_\pm$を
$$\infty_\pm : k = \omega = \infty \ , \quad \omega/k^2 = \pm 1$$

と定める。Cauchy 核 $K(P,P')$ を

$$K(P,P') = \frac{1}{2}\frac{\omega+k^2-\omega'-k'^2}{k+k'} = -K(P',P)$$

で導入する。$K(P,P')$ は，$P=P'^{\#}, \infty_+$ に一位の極，$P=P', \infty_-$ に一位の零をもつ。また

$$h(P) = \frac{1}{2c}\left(\omega+k^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right) = h(P^{\#})^{-1} \quad , \quad c = \frac{1}{4}(a^2-b^2)$$

とおく。h の極は ∞_+ (2 位), 零は ∞_- (2 位) のみにある。

上にならって

(1) 中性フェルミ場 $\phi(P)$ $(P \in E)$

(2) 真空期待値 $\langle \phi(P)\phi(P') \rangle = K(P,P')$

(3) 時間発展 $e^{H_n(x)}\phi(P)e^{-H_n(x)} = e^{\xi_n(x,P)}\phi(P)$

$$e^{\xi_n(x,P)} = h(P)^n e^{kx_1+\omega x_2+\cdots} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

としよう。$\mathbb{P}^1$ 上の場合と違って，discrete な時間発展 $h(P)^n$ も同時に導入されている。$e^{kx_1+\omega x_2+\cdots}$ の部分は，Cauchy 核の $P=\infty_+$ での展開

$$\frac{K(P,P')}{\sqrt{ch(P)}} = \sqrt{\frac{K(P\,P')}{K(P\,P'^{\#})}} = \exp\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-k'/k}{1+k'/k}\,\frac{1-h'/h}{1-h'^{-1}h^{-1}}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{n\ \mathrm{odd}}\frac{k'^n}{nk^n} - \sum_{n\ \mathrm{even}}\frac{1}{n(ch)^{n/2}}c^{n/2}(h'^{n/2}-h'^{-n/2})\right)$$

から，

$$\xi_n(x,P) = n\log h(P) + \sum_{n\ \mathrm{odd}} x_n k^n + \sum_{n\ \mathrm{even}} x_n c^{n/2}(h^{n/2}-h^{-n/2})$$

$$= -\xi_n(x,P^{\#})$$

と求めた。こうしておけば

$$\epsilon(P) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2ch}, \frac{1}{3k^3}, \frac{1}{4c^2h^2}, \cdots\right) \qquad (P \sim \infty_+)$$

$$\phi_0 = \int_{\infty_+ \cup \infty_-} dP\, \phi(P) \quad , \quad \langle \phi_0 \phi(P) \rangle \equiv 1$$

を用いて，Cauchy 核を

$$\frac{K(P,P')}{\sqrt{ch(P)}} = e^{-\xi_0(\epsilon(P),P')} = \langle \phi_0 e^{H_0(-\epsilon(P))} \phi(P') \rangle$$

と書くことができる。一般に，任意のオペレーター a について次が成立つ：

(1) $$\langle e^{H_n(x)} \phi(P) a \rangle = \begin{cases} \sqrt{ch(P)}\, e^{\xi_n(x,P)} \langle \phi_0 e^{H_n(x-\epsilon(P))} a \rangle & P \to \infty_+ \\ \sqrt{ch(P)}\, e^{\xi_n(x,P)} \langle \phi_0 e^{H_{n+1}(x+\epsilon(P^\#))} a \rangle & P \to \infty_- \end{cases}$$

$$\langle \phi_0 e^{H_n(x)} \phi(P) a \rangle = \begin{cases} e^{\xi_n(x,P)} \langle e^{H_{n-1}(x-\epsilon(P))} a \rangle & P \to \infty_+ \\ e^{\xi_n(x,P)} \langle e^{H_n(x+\epsilon(P^\#))} a \rangle & P \to \infty_- \end{cases}$$

さて，τ 函数をここでも

$$\tau_n(x) = \langle e^{H_n(x)} g \rangle \quad , \quad g : \text{Clifford 群の元}$$

で定めると，$\tau_n(x)$ は一連の双線型方程式系

(2) $$(2D_3 + D_1^3 + 3D_1(D_2 - (a^2+b^2)))\tau_{n-1}\cdot\tau_n = 0$$

$$(6(D_4 + (a^2+b^2)D_2 - \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)^2) + 3(D_2-(a^2+b^2))^2 + 4D_1D_3 - D_1^4)\tau_{n-1}\cdot\tau_n = 0$$

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2 + \tfrac{3}{2}(a^2-b^2)^2)\tau_n\cdot\tau_n - \tfrac{3}{2}(a^2-b^2)^2\tau_{n+1}\cdot\tau_{n-1} = 0$$

$$\cdots$$

の解となることがわかる。

例. $g = \exp(\alpha_1 \phi(P_1)\phi(Q_1) + \alpha_2 \phi(P_2)\phi(Q_2))$ とおくと，2ソリトン解

$$\tau_n(x) = 1 + e^{\eta_1(n,x)} + e^{\eta_2(n,x)} + c_{12} e^{\eta_1(n,x)+\eta_2(n,x)}$$

$$e^{\eta_i(n,x)} = \alpha_i K(P_i,Q_i)\, e^{\xi_n(x,P_i)+\xi_n(x,Q_i)} \qquad (i=1,2)$$

$$c_{12} = \frac{K(P_1,P_2)K(P_1,Q_2)K(Q_1,P_2)K(Q_1,Q_2)}{c^2 h(P_1)h(P_2)h(Q_1)h(Q_2)}$$

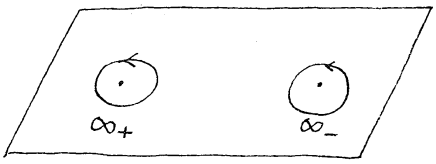
を得る。

双線型方程式を導くには，次の identity を用いる。

(3) $$0 = \int_{\infty_+ \cup \infty_-} dP \quad \langle \phi_0 e^{H_n(x)} \phi(P) g \rangle \langle \phi_0 e^{H_{n'}(x')} \phi(P^{\#}) g \rangle$$

(for any n, x, n', x')

ここに積分路は $\infty_\pm$ のまわりの小円，$dP = \frac{dk}{2\pi i \omega}$ は E 上の第一種微分である。



(1)，(3) から

$$0 = \int_{\infty_+} \frac{dk}{2\pi i \omega} \Big[e^{\xi_{n-n'}(x-x',P)} \tau_{n-1}(x_1 - \tfrac{1}{k}, x_2 - \tfrac{1}{2ch}, \cdots) \tau_{n'}(x_1' + \tfrac{1}{k}, x_2 + \tfrac{1}{2ch}, \cdots) + e^{-\xi_{n-n'}(x-x',P)} \tau_n(x_1 + \tfrac{1}{k}, x_2 + \tfrac{1}{2ch}, \cdots) \tau_{n'-1}(x_1' - \tfrac{1}{k}, x_2' - \tfrac{1}{2ch}, \cdots) \Big]$$

が従うので，integrand を $P = \infty_+$ で展開して積分を実行すれば，(2) が得られる。

(2) は elliptic DKP とでも呼ぶべき subsub-holonomic な系であるが，実は

(4) $$\bar{\tau}_n(\bar{x}) = e^{-Q_n(x)} \tau_n(x) \qquad \bar{x}_n = \sum c_{nk} x_k$$

$Q_n(x)$: x の 2 次式

なる変換をすると，elliptic moduli a, b を含まない方程式

に変換されてしまうことがわかる。つまり elliptic curve を考えた甲斐がなくてある意味では面白くないわけであるが、その reduction を考えると、一般には上の操作が reduction とは compatible にならず，moduli が残ってくる。

Landau-Lifschitz 方程式は，上の２成分化（$\phi(P)$ の copy $\phi^{(1)}(P)$, $\phi^{(2)}(P)$ を用いる）において，

$$f = \langle e^{H_{n_1 n_2}} g \rangle, \quad f^* = \langle e^{H_{n_1+1\, n_2}} g \rangle$$

$$g = \sqrt{c}\,\langle \phi_0^{(1)} \phi_0^{(2)} e^{H_{n_1 n_2}} g \rangle, \quad g^* = \sqrt{c}\,\langle \phi_0^{(1)} \phi_0^{(2)} e^{H_{n_1+1\, n_2}} g \rangle$$

$$\left(H_{n_1 n_2} = H^{(1)}_{n_1}(x^{(1)}) + H^{(2)}_{n_2}(x^{(2)}) \right)$$

とおき，更に g として上記 f, f^*, g, g^* が

$$x = x^{(1)} - x^{(2)}, \quad n = n_1 - n_2$$

のみに依存するという条件をおいた reduction である。（(4) の形の変換では moduli を消すことはできない）。例えば

$$g = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi^{(1)}(P_i) \phi^{(2)}(P_i^{\#}) \right)$$

のようにとれば，その条件は満足される。（Nソリトン）

Nソリトン解，ヒエラルヒー，線型化，変換群，Quasi-periodic solution 等の詳細は論文[4)]に譲る。

文献

1) E. K. Sklyanin, On complete integrability of the Landau-Lifschitz equation, LOMI preprint E-3-1979, Leningrad.

2) R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 323.

3) M. Kashiwara and T. Miwa, Proc. Japan Acad. 57 A (1981) 342.

E. Date, M. Kashiwara and T. Miwa, ibid. 57 A (1981) 387.

E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3806, 3813.

———, to appear in Physica D & Publ. RIMS. (1982)

4) E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Landau-Lifschitz equation : solitons, quasi-periodic solutions and infinite dimensional Lie algebras, RIMS preprint 395 (1982).