数理解析研究所講究録
第 471 巻 1982 年 51-67

線形樹化数について

電通大　中山　明
NAKAYAMA AKIRA

1. Introduction

ここで扱うグラフは、単純無向グラフとする。グラフGに対して、Gの辺集合を分割する問題を考える。まず線形林とは、Gの各成分が道となっているグラフのことである。このとき、Gを線形林に分割した時の線形林の最小個数が問題となる。この数を線形樹化数と呼び、$\Xi(G)$で表わす。この概念は、F. Hararyによって導入され、今までに種々の結果が知られている。さらに応用面としては、情報検索等に利用する際、1つの数学的モデルとしてとらえることができる。これから、今までに得られている結果とその証明方法を紹介し、線形樹化数とグラフの演算（ここでは、Cartesian productを扱った。）との関係を述べることにする。

2. Definitions and Notations

K_p …… 位数pの完全グラフ

$K(m,n)$ ……… 部集合 V_1, V_2 が、$|V_1|=m$, $|V_2|=n$ なる完全2部グラフ。

$\Delta(G)$ ……… グラフGの最大次数。

$G_1 \times G_2$ ……… G_1 と G_2 の Cartesian product。

$L(G)$ ……… Gの line graph。

Q_n ……… n-cube で次のように定義される。

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2, \; Q_1 = K_2$$

Gの2-factor …… Gの2-正則全域部分グラフ。

G : 2-factorable …… Gが2-factor の辺和として表わされる場合。

$\oplus$ ……… 辺和を示す。

$c(e)$ ……… 辺eに塗られている色を示す。

$\langle S \rangle$ ……… S ($\subseteq V(G)$ or $E(G)$) によって誘導されるGの部分グラフ。

Gの$\{a,b\}$-factor …… 各点vの次数が、$a \leq \deg v \leq b$ となっているGの全域部分グラフ。

$\mathcal{G}_{odd} := \{ G \mid \text{odd-regular}, \; \Xi(G) = \{ \frac{odd+1}{2} \} \}$

$\mathcal{G}_r := \{ G \mid r\text{-regular}, \; \Xi(G) = \{ \frac{r+1}{2} \} \}$

$\mathcal{H}_r := \{ H \mid H : r\text{-regular} \}$

$G \setminus F := V(G \setminus F) = V(G), \; E(G \setminus F) = E(G) \setminus E(F)$ 。

$\{ \quad \}$ ……… 切り上げ。

今後、‘線形林で覆われた’という代りに、‘色 c の線形林で塗られた’という表現も用いることにする.

3. Propositions and Theorems

Proposition 1　G : r-regular $\Rightarrow \Xi(G) \geqslant \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$

Proposition 2　G は次の条件(i),(ii)を満たすグラフとする。

$$\left.\begin{cases} \text{(i)} \ \exists v \in V(G) \ \text{s.t.} \ \deg v = 4 \\ \text{(ii)} \ \forall u \in V(G) \setminus \{v\}, \ \deg u = 3 \end{cases}\right. \Rightarrow \Xi(G) = 2$$

Note：この命題は [5] の中の Theorem 6 の特別な場合に相当している。

Proposition 3　　$\Xi(G) \geqslant \left\{ \frac{\Delta(G)}{2} \right\}$

Proposition 4　$\mathcal{A}_{2k-1} = g_{2k-1}$ となる k が存在すれば

$$\mathcal{A}_{2k} = g_{2k}$$

Theorem A　K_{2n+1} は n 個の Hamiltonian cycle の辺和として表現できる.

Theorem B　G：自明でない連結グラフとする。

G：オイラー回路をもつ $\Leftrightarrow$ G のどの点の次数も偶数

Theorem C [Petersen]

G : 2-factorable $\Leftrightarrow$ G : even-regular

4. 特殊なグラフの族についての線形樹化数

今までに知られている結果を示すと次のようになる。

Theorem (a) [秋山, Exoo, Harary]

T：木 ⇒ $\Xi(T)=\{\frac{\Delta(T)}{2}\}$

Theorem(b) [Stanton, Cowan, James]

$$\Xi(K_p)=\{\frac{p}{2}\}$$

Theorem(C) [秋山, Exoo, Harary]

$$\Xi(K(m,n))=\{\frac{m+\delta(m,n)}{2}\}$$

ただし、$m\geq n$とし、$\delta(m,n)$はKronecker deltaとする.

これより新しい結果を示す。

Theorem(d)(中山) $\Xi(Q_n)=\{\frac{n+1}{2}\}$

(proof) Q_{2k}とQ_{2k+1}に分けて考える。まずQ_{2k+1}は、kに関する帰納法によって求める。$\Xi(Q_{2k-1})=k$と仮定し、$Q_{2k+1}=Q_{2k-1}\times C_4$に変形する。

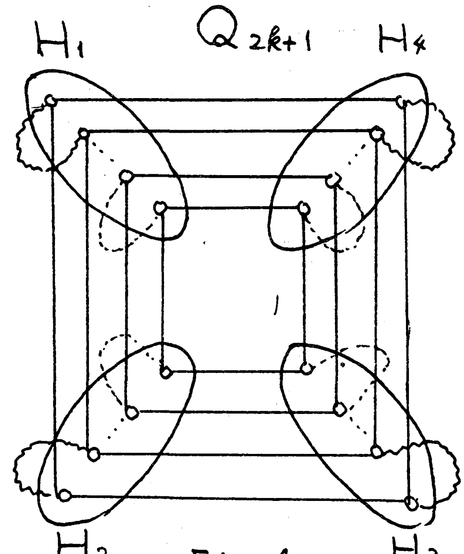


Fig. 1

このとき、k色の線形林で塗られたQ_{2k-1}に対して各色の線形林の成分である道に注目する。各道の端点を組にして、この彩色されたグラフの点集合を並びかえて得られるグラフをHとする。ここで、HのコピーH_i $(i=1,\cdots,4)$を用意し、各H_iの対応する点を辺で結びFig.1のように構成する。するとQ_{2k+1}は、新しい1色を追加し、$(k+1)$色の線形林で覆えることは明らかである。よって、$\Xi(Q_{2k+1})=k+1$。一方、

Q_{2k}に対しては、$\Xi(Q_{2k+1}) \geq \Xi(Q_{2k})$は容易に得られる。さらにProposition 1より$\Xi(Q_{2k}) \geq k+1$となるので$\Xi(Q_{2k}) = k+1$。以上をまとめれば，$\Xi(Q_n) = \left\{\frac{n+1}{2}\right\}$。 □

Theorem (e) [中山]　C_n：位数nのcycle.

$$\forall G \in \mathcal{G}_r, \quad \Xi(G \times C_n) = \left\{\frac{r+3}{2}\right\} \quad (n \geq 3)$$

これを証明する為にいくつかのLemmasを用意する。

Lemma 1

$$\forall G \in \mathcal{G}_{2m-1}, \quad \Xi(G \times C_n) = m+1 \quad (m \geq 1,\ n \geq 3)$$

(proof) $\forall G \in \mathcal{G}_{2m-1}$を選ぶと$\Xi(G) = m$。よって$1, \cdots, m$までの$m$色の線形林で、Gが塗られている。しかもGの任意の点vは奇点より、このvが端点となっている色の道が存在する。従って、この彩色されたGを以下のように構成できる。色iのj_i本の道の2つの端点をそれぞれ、$u_1^i, v_1^i; u_2^i, v_2^i; \cdots; u_{j_i}^i, v_{j_i}^i$と置き、Fig.2のように並べる。このグラフを$\widetilde{G}$とおく。さて、$G \times C_n$はGの$n$個のコピーを用いて書けるので、彩色された$G \times C_n$を構成する時に、Gを$\widetilde{G}$でおきかえる。そして、Fig.3のように、$n$個のコピーの各対応する点を組にして$C_n$で結ぶことにする。最後に、同心円状の$C_n$の部分を塗るには、外側から2つずつの$C_n$を組にすると、あと1色の線形林を用いて塗り分けるこ

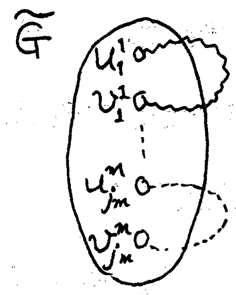


Fig.2

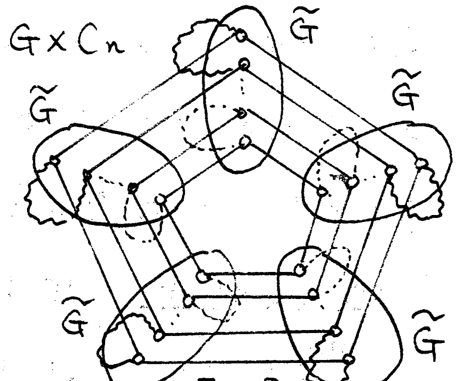


Fig. 3

とができる。(塗り方は一意的ではない。)従って、$\Xi(G\times C_n)\leqq m+1$。一方、$G\times C_n$ は $(2m+1)$-正則グラフであるから Proposition 1 を用いて $\Xi(G\times C_n)\geqq m+1$. 以上をまとめれば $\Xi(G\times C_n)=m+1$ が得られる。 □

Lemma 2 $\forall G\in\mathcal{G}_{2m}$, $\Xi(G\times K_2)=m+1$

(proof) $\forall G\in\mathcal{G}_{2m}$ をとると、$\Xi(G)=m+1$。彩色されたGのコピー G_1, G_2 を用意する。ただし、G_1 と G_2 の塗り方は、同じとし $1,\cdots,m+1$ の色を用いることにする。

$$U_i := \{u_i\in V(G_i) \mid |\{u_iu\in E(G_i) \mid c(u_iu)=j\}|=2,\ j=1,\cdots,m+1\}$$

$$V_i := \{v_i\in V(G_i) \mid \exists k \text{ s.t. } |\{v_iv\in E(G_i) \mid c(v_iv)=k\}|=1\}$$

と定義する。まず U_i に属する点 u_i に接続する辺には、m 色の線形林しか使われていないので、u_1 と u_2 を残りの1色で塗られた辺で結ぶ。V_i に属する点 v_1, v_2 に対しては、次のような方法に従って彩色された辺を用いて、v_1 と v_2 を結ぶ。i.e. cycleができないように、しかも2本の道の端点どうしが共に一致しないように、$m+1$ 色で G_1 と G_2 の点をできるだけ結ぶ。このように彩色すれば、まだ結ばれていない点どうしを順次cycleを作らないように $m+1$ 色の線形林で覆うことができる。したがって、$\Xi(G\times K_2)=m+1$ □

<u>Lemma 3</u>　$^{\forall}G \in \mathcal{G}_{2m}$, $\Xi(G \times C_n) = m+2$　$(n \geqq 3)$

(proof) $^{\forall}G \in \mathcal{G}_{2m}$に対して、$H = G \times K_2$とおく。すると、Lemma 2より$\Xi(H) = m+1$, かつ$H$は$(2m+1)$-正則グラフ。したがって、$H \in \mathcal{G}_{2m+1}$。さらにLemma 1より

$$\Xi(H \times C_n) = m+2$$

ところで、$G \times C_n \prec H \times C_n$に注意すれば、Proposition 1を用いて、$m+2 \leqq \Xi(G \times C_n) \leqq \Xi(H \times C_n) = m+2$。よって$\Xi(G \times C_n) = m+2$を得る。　□

以上Lemma 1とLemma 3をまとめて、Theorem(e)を得る。

<u>Corollary</u>　$\Xi(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$

(proof)　Q_{2k+1}をkに関する帰納法で証明する。$\Xi(Q_{2k-1}) = k$と仮定すると、$Q_{2k-1} \in \mathcal{G}_{2k-1}$。従ってTheorem(e)より

$$\Xi(Q_{2k+1}) = \Xi(Q_{2k-1} \times C_4) = k+1$$

となる。一方、$\Xi(Q_{2k}) = k+1$となることは、Q_{2k}の構造より明らか。よって、$\Xi(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$　□

<u>Theorem (f)</u> [中山]

$$\Xi(L(K(m,n))) = \left\{ \frac{m+n-1}{2} \right\}$$

これも、いくつかのLemmasを用意して証明する。

<u>Lemma 4</u>　$G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{odd}$, ただし、$G_i : (2k_i+1)$-正則グラフとする。このとき、$\Xi(G_1 \times G_2) = k_1 + k_2 + 2$

(proof)　$V(G_1) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $V(G_2) = \{y_1, \cdots, y_m\}$とおく。

Cartesian product の定義より、$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$。

$S_{x_i} := \{(x_i, y_l) \mid x_i \in V(G_1),\ y_l \in V(G_2)\ \ (l=1,\cdots,m)\}$

$T_{y_k} := \{(x_j, y_k) \mid x_j \in V(G_1),\ y_k \in V(G_2)\ \ (j=1,\cdots,n)\}$

とおくと、$\langle S_{x_i} \rangle \cong G_1$, $\langle T_{y_k} \rangle \cong G_2$ が成立する。しかも仮定より、$\Xi(\langle S_{x_i} \rangle) = k_1 + 1$。かつ、$\langle S_{x_1} \rangle, \cdots, \langle S_{x_n} \rangle$ は互いに素であるから、

$$\Xi\left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle S_{x_i} \rangle\right) = k_1 + 1 \quad \text{-----} \ ①$$

同様に、$\langle T_{y_k} \rangle$ についても

$$\Xi\left(\bigcup_{k=1}^{m} \langle T_{y_k} \rangle\right) = k_2 + 1 \quad \text{-----} \ ②$$

従って、①, ②, Proposition 1 を用いれば、

$$k_1 + k_2 + 2 \leqq \Xi(G_1 \times G_2) \leqq \Xi\left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle S_{x_i} \rangle\right) + \Xi\left(\bigcup_{k=1}^{m} \langle T_{y_k} \rangle\right) = k_1 + k_2 + 2$$

$$\therefore \Xi(G_1 \times G_2) = k_1 + k_2 + 2 \qquad \square$$

Lemma 4 において、$G_1 = K_{2n+1}$, $G_2 = K_{2m+2}$ とおくと、

Theorem (b) より、$K_{2n+2}, K_{2m+2} \in \mathcal{G}_{odd}$。

$$\therefore \Xi(K_{2n+2} \times K_{2m+2}) = n + m + 2 \quad \text{-----} \ (*)$$

<u>Lemma 5</u> $L(K(m,n)) = K_m \times K_n = K_n \times K_m$

くわしいことは、[11] を参照のこと。

<u>Lemma 6</u> $K_{2n+1} = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, ただし、$F_i$: Hamiltonian cycle.(Theorem A よりいえる。)とおくと、

$\exists\ I = \{e_i \in E(F_i) \mid i = 1, \cdots, n\}$ s.t. I: 独立集合

(proof) [3] の証明を利用して、独立集合 I を構成する。$V(K_{2n+1})=\{v_0, v_1, \cdots, v_{2n}\}$ とおくと、Hamiltonian cycle は次のように定めることができる. i.e.

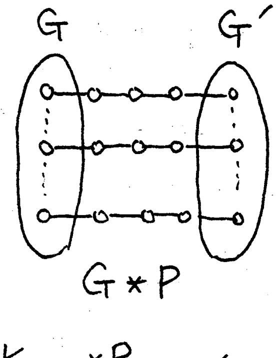
F_i : $v_0, v_i, v_{i+1}, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i-2}, \cdots, v_{n+i-1}, v_{n+i+1}, v_{n+i}, v_0$

そこで、$I=\{v_1v_{n+1}, v_2v_{n+2}, \cdots, v_nv_{2n}\}$ とすれば、I は独立集合となる。次に、v_kv_{n+k} $(k=1,\cdots,n)$ が異った F_i に属すことを調べる。まず、$v_kv_{n+k}\in E(F_{[\frac{n+2k}{2}]})$ (添字は mod n でとる。) となりしかも、

$$v_j\neq v_k \Rightarrow \left[\frac{n+2j}{2}\right]\neq\left[\frac{n+2k}{2}\right] \pmod{n}$$

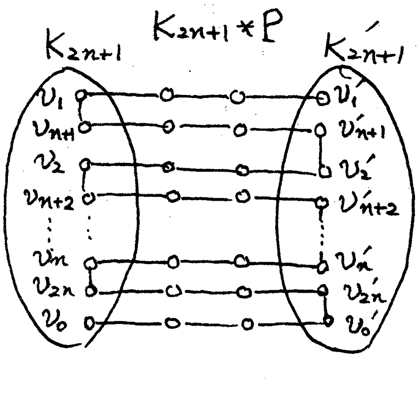
が確かめられるので、$v_1v_{n+1}, \cdots, v_nv_{2n}$ はそれぞれ異った F_i に入っていることになる。 □

ここで、G*P (ただし、P は道) なる新しいグラフを定義する。



G*P : G のコピー G' を用意し、それぞれ対応する点どうしを道 P でつないだグラフ (⇒右図)

<u>Lemma 7</u> $\Xi(K_{2n+1}*P)=n+1$



(proof) K_{2n+1} のコピーを K'_{2n+1} とし

$V(K_{2n+1})=\{v_0, \cdots, v_{2n}\}$

$V(K'_{2n+1})=\{v'_0, \cdots, v'_{2n}\}$

とおく。Lemma 6 より独立集合は、

$I := \{v_1v_{n+1}, \cdots\cdots, v_nv_{2n}\}$を選ぶ。そして $H = K_{2n+1} \setminus I$ とおくと、$\Xi(H) = n$。一方、K'_{2n+1}の頂点集合の置換σを考えることにより、K'_{2n+1}から、独立集合$I' = \{v'_2v'_{n+1}, v'_3v'_{n+2}, \cdots, v'_nv'_{2n-1}, v'_0v'_{2n}\}$を構成すると、$I'$は、Lemma 6 の条件を満たす。そこで前と同様に、$H' = K'_{2n+1} \setminus I'$ とおくと $\Xi(H') = n$。よって、$\Xi(H \cup H') = n$。ところで道Pで結んである部分は、IとI'と共に新しい1色で塗れるから、$\Xi(K_{2n+1} * P) \leq n+1$。さらに Proposition 3 も考慮すれば、$\Xi(K_{2n+1} * P) = n+1$。 □

Lemma 7 で特に $P = K_2$ とおくと、

$$K_{2n+1} * K_2 = K_{2n+1} \times K_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\alpha)$$

$$K_{2n+1} < K_{2n+1} \times K_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\beta)$$

$$\Xi(K_{2n+1}) = \Xi(K_{2n+1} \times K_2) = n+1 \cdots (\gamma)$$

が成立する。

<u>Lemma 8</u>　$^\forall G \in \mathcal{G}_{odd}$（ただし、$G$は$(2k+1)$-正則とする。）に対して、　$\Xi(G \times K_{2n+1}) = k+n+1$

(proof) $G \times K_{2n+1}$ のグラフで、まずGに同形なグラフから線形林で覆うことにする。そこで、$V(G) = \{v_1, \cdots, v_m\}$, $V(K_{2n+1}) = \{u_1, \cdots\cdots, u_{2n+1}\}$, $S_{u_j} = \{(v_i, u_j) \mid v_i \in V(G)\ i=1,\cdots,m\}$ とおくと、$\langle S_{u_j} \rangle \cong G$ となるので仮定より、$\Xi(\langle S_{u_j} \rangle) = k+1$。従って、$\langle S_{u_1} \rangle$は、$(k+1)$色の線形林で塗れる。さらに、$\langle S_{u_1} \rangle, \cdots, \langle S_{u_{2n+1}} \rangle$ は互いに素なので、$\langle S_{u_2} \rangle$ から

$<\mathcal{S}_{u_{2n+1}}>$まで、すべて$<\mathcal{S}_{u_1}>$と同じ塗り方にしておくと、$\Xi(\bigcup_{j=1}^{2n+1}<\mathcal{S}_{u_j}>)=k+1$ となる。$<\mathcal{S}_{u_j}>$の塗り方より、このグラフの各点は、ある色 C の道 P の端点となっている。そこでこの両端点を(v_p, u_j), (v_q, u_j)とおく。

$T_{v_p} := \{(v_p, u_j) \mid u_j \in V(K_{2n+1})\ j=1,\cdots,2n+1\}$

を定義すると、$\Xi(<T_{v_p}>)=\Xi(K_{2n+1})=n+1$. さらに、$<T_{v_p}>$, $<T_{v_q}>$とこれらの点どうしを結ぶ道まで合わせて考えれば、Lemma 7 が適用できるので、$\Xi(<T_{v_p}>*P)=n+1$。しかも、P の道の色が C となるようにできる。この操作を$<\mathcal{S}_{u_j}>$の各線形林の成分となっている道ごとにくり返し使うことにより、$\Xi(G\times K_{2n+1}) \leqq k+n+1$ が得られる。一方、逆の不等式は Proposition 1 より得られる。 □

Lemma 8 で特に、$\Xi(K_{2m+2}\times K_{2n+1})=m+n+1$ ······ (**)

<u>Lemma 9.</u> $\Xi(K_{2n+1}\times K_{2m+1})=m+n+1$

(proof) $H=K_{2n+1}\times K_2$ とおくと、H は奇正則かつ Lemma 7 の特別な場合(γ)より，$H\in\mathcal{G}_{odd}$。さらに、Lemma 8 から

$$\Xi(H\times K_{2m+1})=m+n+1 \quad \text{------} \boxed{1}$$

$K_{2n+1}\times K_{2m+1}$ は、$2(m+n)$-正則グラフより、Proposition 1 より、

$$\Xi(K_{2n+1}\times K_{2m+1}) \geqq m+n+1 \quad \text{------} \boxed{2}$$

ここで、Lemma 7 の(β)より、$K_{2n+1}\times K_{2m+1} < H\times K_{2m+1}$ に注意し、しかも$\boxed{1}$, $\boxed{2}$を合わせると、

$$m+n+1 \leqq \Xi(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) \leqq \Xi(H \times K_{2m+1}) = m+n+1$$

$$\therefore \quad \Xi(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) = m+n+1 \qquad \square$$

Theorem(f)の(proof) Lemma5より、$\Xi(K_n \times K_n)$を求め、さらに対称性も考えると、次の3つの場合に帰着する。

Case 1 : $(m, n) = (\text{odd}, \text{odd})$ ……この場合は、Lemma 9に相当する。

Case 2 : $(m, n) = (\text{odd}, \text{even})$ ……Lemma 8の特別な場合(**)より得られる。

Case 3 : $(m, n) = (\text{even}, \text{even})$ ……Lemma 4の特別な場合(*)より成立することがわかる。

以上をまとめれば、$\Xi(L(K(m,n))) = \left\lceil \frac{m+n-1}{2} \right\rceil$ $\square$

5. 正則グラフについての線形樹化数

どんなグラフGも、$\Delta(G)$−正則グラフにうめ込められるという事実を使うと、正則グラフの線形樹化数を求めることが本質的な問題となる。しかしながら、任意の正則グラフについては、まだ証明されていない。一般に、Gをr−正則グラフとすると、秋山の予想($\Xi(G) = \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil$)が知られており、今までに$r=3, 4, 5, 6, 8$の時既に正しいことが証明されている。しかもこれらの結果にはいくつかの証明方法があるので、その方法を紹介することにする。

Theorem(I) G : cubic graph $\Rightarrow \Xi(G) = 2$

Theorem (I) の証明方法について.

(I.1) [秋山] -----'necessary subgraphs' なる概念を導入し、点の位数による帰納法を用いた証明。

(I.2) [秋山, Chvátal] ----- Vizingの定理を用いて、辺集合をまず4色に分ける。そのうち2色ずつ組にして2色で塗り直し、もしcycleができた時にはそのcycleをこわしていく証明。

(I.3) [Horák] ----- '$\Delta(G)\leqq 3 \Rightarrow \Xi(G)\leqq 2$' なる命題を辺の数に関する帰納法を用いる. このとき、初期条件はGが木の場合としている。

(I.4) [榎本] ----- 次数2の点に接続している辺の色を指定して、塗り分ける証明。

(I.5) ----- {1,2}-factorを用いる証明。(特に、maximal acyclic {1,2}-factorを考えればよい。)

<u>Theorem (II)</u> G : 4-regular $\Rightarrow$ $\Xi(G)=3$

Theorem (II) の証明方法について

(II.1) [秋山, Exoo, Harary] ----- cubic graphの線形樹化数の系 (Proposition 4) として求める証明。

(II.2) [秋山, Exoo, Harary] ----- 4-正則グラフを2つの2-factorに分解して、構成的に3つの線形林に塗り分ける証明。

(Ⅱ.3) [中山] ---- {1,2}-factorを用いる証明。(特に、acyclic {1,2}-factor を考えればよい。)

(Ⅱ.4) [榎本] ----次数2,3の点に接続している辺の塗り方を一部指定して塗り分ける証明。

<u>Theorem(Ⅲ)</u> [榎本] G : 5-regular ⇒ $\Xi(G)=3$.

<u>Theorem(Ⅳ)</u> G : 6-regular ⇒ $\Xi(G)=4$

Theorem(Ⅳ)の証明方法について

(Ⅳ.1) [榎本] ------5-正則グラフの線形樹化数の系(Proposition 4)として求める証明

(Ⅳ.2) [中山] ----Proposition 2とTheorem Aを用いる証明。

(Ⅳ.3) [中山] ---- acyclic {1,2}-factorを考えて.Theorem(Ⅲ)を用いる証明.

<u>Theorem(Ⅴ)</u> G : 8-regular ⇒ $\Xi(G)=5$

Theorem(Ⅴ)の証明方法について

(Ⅴ.1) [榎本] ------8-正則グラフGを、minimal {3,4}-factor HとG\Hの2つの部分グラフに分解し、そのおのおのを線形林でぬり分ける証明。

(Ⅴ.2) [中山]

(proof) まず、Gを連結8-正則グラフとする。このとき、Theorem Cより、Gには2-factor Fが存在する.したがっ

て、$G\setminus F$は6−正則グラフとなる。$H_1, H_2, \cdots, H_\ell$を$G\setminus F$の成分とするとTheorem Bより各H_iは、オイラー回路C_iをもつ。C_iの辺をある辺より出発して、順次2色のredとblueによって交互に塗っていく．そこでH_i^{red}をredの辺によって誘導されるH_iの部分グラフとする．つまり．

$$H_i^{red} := \langle \{ e \in E(H_i) \mid c(e) : red \} \rangle$$

Case 1：$|E(H_i)|$: even

このとき．H_i^{red}は3−正則グラフとなるので、Theorem(I)より．$\Xi(H_i^{red}) = 2$。

Case 2：$|E(H_i)|$: odd

この場合、H_i^{red}を次のように指定することができる。

$$H_i^{red} := \begin{cases} {}^{\exists} v \in V(H_i^{red}) \ \text{s.t.} \ \deg_{H_i^{red}} v = 4 \\ {}^{\forall} u \in V(H_i^{red}) \setminus \{v\}, \ \deg_{H_i^{red}} u = 3 \end{cases}$$

するとProposition 2より．$\Xi(H_i^{red}) = 2$．$H = \bigcup_{i=1}^{\ell} H_i^{red}$とおくと、Case 1, 2より　$\Xi(H) = 2$となることがわかる。一方、$(H_i \setminus H) \oplus F$なるグラフは．ある5−正則グラフにうめ込むことができるので、Theorem(III)とProposition 3から．

$$\Xi((H_i \setminus H) \oplus F) = 3$$

が得られる。したがって

$$\Xi(G) = \Xi((G\setminus F) \oplus F) = \Xi(\bigcup_{i=1}^{\ell} H_i \oplus F)$$
$$= \Xi(H \oplus ((H_i \setminus H) \oplus F))$$

$$\leqq \Xi(H) + \Xi((H_i \setminus H) \oplus F) = 5$$

$\Xi(G) \geqq 5$ は、Proposition 1 より明らか。よって $\Xi(G) = 5$ □

(References)

[1] J. Akiyama, D. Avis and H. Era, On a {1,2}-factor of a graph. TRU Math. 16 (1980) 97-102.

[2] J. Akiyama, Three Developing Topics in Graph Theory (1980).

[3] M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Prindle. Weber & Schmist (1979).

[4] H. Enomoto, The linear arboricity of cubic graphs and 4-regular graphs. (Private).

[5] H. Enomoto, The linear arboricity of 5-regular graphs, Univ. of Tokyo, Technical Report 81-19 (1981).

[6] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

[7] P. Horák, A short proof of the linear arboricity for cubic graphs. (Private).

[8] C. Thomassen, A remark on factor theorems of Lovász and Tuttu, J. Graph Theory 5 (1981)

441-442.

[9] J. Akiyama, T. Hamada, A note on the arboricity of the complement of a tree, TRU Math 13 (1977) 55-57.

[10] J. Moon, On the line graph of the complete bigraph, Ann. Math. Statist. 34 (1963).

[11] A. J. Hoffman, On the line graph of the complete bigraph, Ann. Math. Statist. 35 (1964).