

## Yang-Mills-Higgs 理論と戸田格子方程式

京大 数理解析 南 政次

Minami Masatsugu

場の理論には相対性不変という強い要請が付きますので、名だたるソリトン方程式も、素粒子論にやたら登場するわけではな<sup>い</sup>。はやくから登場したそのとして  $\text{sine-Gordon}$  があり、特に massive Thirring 模型との絡み等はと<sup>う</sup>面白い一例だろうが、著しい例として最近(と<sup>い</sup>って  $\approx 1978$  年頃からだが)戸田格子方程式がこの分野で注目を集めて<sup>い</sup>る。素粒子論における非線型場の理論とは、いまのところ、Yang-Mills-Higgs に尽きるのだが、その特殊な場合に登場し、戸田方程式自身のその美しさもあって、一般的なゲージ群にまで見透しがよいのは、いまのところこの場合だけではないかと思う。以下、文献を chronological に紹介することを目的にし、どのように戸田格子方程式がこの分野に現われるに至ったか、その動向を解説したい。

戸田格子方程式は様々な形で書けるが、とりあえず

$$\partial_u \partial_{\bar{u}} \Phi_\alpha = \pm \exp[-K_{\alpha\beta} \Phi_\beta] \quad (*)$$

とする。(  $K_{\alpha\beta}$  ) は Yang-Mills のゲージ群(一般に半単純な

Lie群)  $G$  を  $(\lambda, \alpha)$  規定する Cartan 行列で,  $G = SU(\infty)$  のとき  $\lambda$  と  $\alpha$  の戸田格子方程式になっている。rank が有限の時は戸田分子方程式とも呼ばれるが, これは  $(K_{\alpha\beta})$  の定める Dynkin 図の "dual" が有限な戸田鎖で, これを分子と見たててのことである。  $u = s + it$  の二変数の時は二次元 Toda,  $u = \pm \bar{u}$  の時は一次元 Toda と呼ぶことにする。  $K_{\alpha\beta}$  の入れ方は唐突に見えるかもしれないが, 戸田方程式(\*)を Zakharov-Shabat 方程式に移してやると, これはゲージ・ポテンシャル  $B$  が "純ゲージ"  $B = R^{-1} \partial R$  型であることを言っているので, 容易に  $G$  の generators によって書き下せ, Chevalley-Serre の基を使えば  $K_{\alpha\beta}$  は自然にあらわれる (一次元の時も同じ, 但し従来の Lax pair ではうまく乗らないだろう)。 Yang-Mills (といっても self-dual なもの) を "純ゲージ" 型へ還元して行くのは一般に易しくないが, 上の  $B$  型のものが Yang-Mills のポテンシャルと同じ構造を有していると思っただけでなく, 又 Yang の R-gauge [4] の言葉を使えば, 矢張り上の  $R$  はこれに対応するもので,  $\Psi$  も Yang の有名な

$$R = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$$

という表示との対応で言うと,  $\Psi = \log \phi$  くらいの意味を持つ (詳しくは [18])。

$A_2$  型の Lie 環は素粒子論で頻繁に使われるものであるが、  
 $G=SU(2)$  はいつもおなじみになる。この場合 Toda は Liouville  
 方程式になる ( $K_{11}=2$ )。この方程式は Dual Resonance Theory  
 にも現われていたが (Omnès, N.P. B149 (79) 269, Polyakov),  
 Yang-Mills では E. Witten [3] による。この論文は無数の  
 instantons の存在を証明した画期的なものだが、彼は量が  
 時間だと、あと空間は  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$  にのみ依存すると仮  
 定して (cylindrical symmetry 仮定)、方程式を単純化し、  
 Liouville を得、その解によって上の証明を行ったのである。  
 彼の形式を Zakharov-Shabat 型で捉えることも不可能でな  
 いと思うが、彼は巧妙に上の仮定によって四元ポテンシャルを  
 $A_0, A_1, \varphi_1, \varphi_2$  で書きなおし、 $A_i$  の方は二次元ポテンシャル  
 みたいに ( $\partial_i A_i = 0$ )、 $\varphi_i$  の方は Higgs 場みたいにしてしま  
 わけて、 $A_i = \epsilon_i; \partial_j \psi$  の  $\psi$  が少し曲折はあるが —  
 Liouville を満たすようになるのである。

次に (歴史的に) 意味のある論文は [5] である。これは  
 Witten の方法を  $SU(3)$  に踏襲したもので、 $\lambda > 2$  の self-duality  
 方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \rho &= 2e^{2\rho} - e^{2\rho'} \\ \nabla^2 \rho' &= -e^{2\rho} + 2e^{2\rho'} \end{aligned} \right\} (** )$$

に還元された。このようにして

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

はまさに  $A_2$  の Cartan 行列で,  $(**)$  は二次元戸田分子方程式  
 になっているのである (イギリスの Yates も同じことを試み  
 ているが,  $SU(2)$  の埋め込みが拙く, こうすくなりとは行か  
 なかった)。しかし, Bais と Weldon がこゝに Cartan 行列  
 の入っていることを意識していたかどうかは判らな。とい  
 うのは [8] において  $G = SU(n)$  に一般化したのだが ( $SU(n)$   
 の  $SU(2)$  埋め込みは, この頃には大分楽になってきている)  
 まだ変数のとり方が悪く,  $(*)$  の形には行かなかった ( $(**)$  は  
 reduce するのだが)。こゝで,  $(*)$  の形にこだわるのは,  
 Toda との関連は  $(*)$  の形 (もしくは  $-K_{\alpha\beta} \Phi_{\beta} \sim \Phi_{\beta}$  とおいて)  
 でなければ判らなからである。Bais-Weldon はたゞは戸田  
 格子とは言っていない。

一応, Leznov と Saveliev と Witten の  $SU(2)$  から出発して  
 考察を遂げたように [7] において (Bais-Weldon の  $SU(n)$   
 と同時期に) 一般の半単純 Lie 群をゲージ群とする場合に  
 $(*)$  型の式を出した。彼等は仮定を群論の言語で整理してい  
 ったので Cartan 行列に出会っていたのだが, 正確に言うと  
 まだ  $(*)$  の形ではなく, 戸田格子とも言っていない。[10] で  
 も然りである。結局, 最もよく整理された形で現れるのは  
 [14], [15] であると思う。こゝでは明白に Toda lattice 方程式  
 の一般化として捉えらされている。群論の駆使もするところが

ら、 $\rho$  田方程式がリ連でよく (欧米より?) 知られていたとい  
うことが重なる、たのめかもしれない。

初め、E. Witten の論文には、もう一つ不曖昧があって、そ  
れは彼の仮定によ、て作用が恰も二次元のポテンシカルと  
二つの Higgs 場による作用に還元されてしまっていること、  
逆に云えば Higgs 場の入ったものを Liouville/Toda へ連  
いり (1) ということである。一先 [2] に於いて Bogomolny  
は四次元 Yang-Mills で 時間を度外視し、 $A_0$  を Higgs  $\phi$  とす  
ると static な Yang-Mills-Higgs になることを示し、所謂 self-  
duality 方程式が後年 Bogomolny 方程式と呼ばれるものになり、  
その解が非アベリル磁気 monopole<sup>†)</sup> を与えることを示していた  
ので、こちらにも Toda 型 (但し 時間に独立) が現われると  
いうことが予想を来たわけである。Bogomolny の扱ったのは  
SU(2) で、それが [1] で self-duality の考えを使わずに得ら  
れていったもの (実際は独立) に一致するわけだが、勿論 Toda  
への見通しはない。

Bais-Weldon [6] は、SU(2) の埋め込み方を知っていたの

<sup>†)</sup> 磁気 monopole は電極の dual な概念として Dirac によって考えられた  
ものだが、Maxwell U(1) 理論の枠内では、磁荷が smooth な分布を持  
つというわけにはゆかない。しかし Yang-Mills 非アベリル理論では  
何の特異性を持ち込まずに存在できる。非線型項が smooth out さ  
れる磁荷密度のように働くのである。magnetic monopole の物理的  
存在性は宇宙の冷却過程における相転移の場として論じられている。

で、 $SU(n)$  の場合 球対称な self-dual monopole の方程式が 矢張り 一次元戸田分子型 (ただし  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  が変数) になることを示し得た (式の形は [8] と同様 (\*) のようにではない。しかし (\*) へは変数変換でゆける)。[7] においては、四次元 Yang-Mills と三次元 Yang-Mills-Higgs が同じように扱われているのも上のことによる。

結局、Instanton の場合 円筒仮定で 二次元戸田分子、球対称磁気 monopole の場合 一次元戸田分子方程式が Yang-Mills (Higgs) の中心の方程式になるわけだが、初め解についてはどうかという (物理屋の範囲では) 二次元 Toda については [14, 15] が、一次元 Toda については (Kostant ほかは勿論毎願うとして) [13] で一応与えられていることになっている。但し、存在定理だけが与えられているようなもので、具体的にどうかという、ちょっとやさしくでは解らない。Olive の [17] は磁気 monopole についてのこの方面の review で、解は Leznov-Saveliev によっているが、いさゝか易く解題していると言える。それでも、この方法で  $SU(2)$  の Witten の解 (昔から知られているものだが) を出すのは — 一歩直接 Olive 氏から伺ったことがあるが — まあまあ大変な手続きが必要という感じである。[18] は二次元 Toda の解法を別の観点からもっとすっきりさせたものである。但しゲージ

群は典型Lie群に限らざるを得なかった。抽象的にやるか、具体的に進めるかで、得るところは違ふのである。

たゞ monopoleに限れば一次元戸田分子方程式の解だけが有用なので [13] で本質的によいのだが (Olive氏には [13] が不可解だったとかで、先述のように二次元の解から還元するという形でやっている)、Wilkinson-Bais は [9] で  $SU(n)$  の場合独自に、Koikawa [20] は馴染みの方法で解いている。Oliveのやりえも含めて、これらは物理的な境界条件を重視して特殊解を捻り出して来るわけである。実は [18] の群論的見方をすると、一次元の場合と一般解を求め書き下すことが本来 [9] の結果など含まれて了 ( [22] , 但し 典型Lie群 ) 。

紙数の関係で、こゝまでで留めるが、一つ強調したいのは、球対称の monopole や instanton が、一般の  $n$  と higher rank のゲージ群の場合に至るまで見通しよく解明されて来たのは戸田方程式のその数学的構造の見事さ、控え目でも背景に Lie 環を考へることが出来るという点にあり、たといふことである。軸対称の monopole の場合、武野氏や佐々木氏の稿で示されるように Ernst 方程式やその Bäcklund 変換などの  $n$  へ興味深い流れ方を示すのであるが、higher rank の場合の論述については Bais-Sasaki 以前は殆んど見つけなかつたのは、非常に対照的と言える。今後について、戸田分子の量子論

などは、場の量子論のなかに一定の働きをするかもしれない。

尚、(\*)式を  $\rho_\alpha = -K_{\alpha\beta} \Phi_\beta$  となく  $\Phi_\alpha$  と書いたのは、この  $\Phi$  が Euclidean Lie 代数をとりこむことが出来るからである (この場合  $\det(K_{\alpha\beta}) = 0$ )。例えば  $A_2^{(1)}$  型は特に面白い対称性に恵られている (e.g. [17], [20]), この戸田分子は ring になる。  $A_1^{(1)}$  の場合,  $2(\Phi_1 - \Phi_2) = \rho$  と取ると, (\*) は  $\partial_u \partial_{\bar{u}} \rho = -4 \sinh \rho$  と  $\sinh$ -Gordon, 他に  $A_2^{(2)}$  とは  $\Phi_1 - 2\Phi_2 = \rho$  と取ると,  $\partial_u \partial_{\bar{u}} \rho = e^{-2\rho} - 2e^\rho$  となり Bullough-Dodd 方程式, 等々。

- [1] Prasad-Sommerfield, PRL 35, 760 (June 1975) }  $SU(2)$
- [2] Bogomolny, S-J-NP 24, 449 (Nov 1975) } monopole
- [3] E. Witten, PRL 38, 121 (Nov 1976)  $SU(2)$  instanton
- [4] Yang, PRL 38, 1377 (Apr 1977) R-gauge
- [5] Bais-Weldon, PR D18, 561 (Apr 1978)  $SU(3)$  instanton
- [6] Bais-Weldon, PRL 41, 601 (June 1978)  $SU(n)$  monopole
- [7] Leznov-Saveliev, PL 79B, 294 (July 1978) any semi-simple
- [8] Bais-Weldon, PL 79B, 297 (July 1978)  $SU(n)$  instanton
- [9] Wilkinson-Bais, PR D19, 2410 (Oct 1978)  $SU(n)$  monopole
- [10] Leznov-Saveliev, PL 83B, 314 (Feb 1979)  $SU_3, O_5, G_2$
- [11] Leznov, TMP 42 no.3 (Feb 1979) = 2元 Toda



- [12] Mikhailov, JETP 30 No.7 (May 1979)  $\Rightarrow \hat{z} \hat{z}$  Toda
- [13] Olshanetsky-Perelomov, Inv. Math. 54 261 (June 1979)  $-\hat{z} \hat{z}$  Toda
- [14] Leznov-Saveliev, CMP 74, 111 (Aug 1979)  $\Rightarrow \hat{z} \hat{z}$  Toda
- [15] Leznov-Saveliev, LMP 3, 489 (Sept 1979) "
- [16] Mikhailov-Olshanetsky-Perelomov, CMP 79, 1981 (July 80)
- [17] Olive, in Current Topics in Elem. Parti. Phys. (Plenum) p.199.
- [18] Farwell-Minami, JP A15, 25 (May 1981)  $\Rightarrow \hat{z} \hat{z}$  Toda
- [19] Farwell-Minami, JP A15, 355 (July 1981)  $A_L^{(1)}$
- [20] Koikawa, PL 110B, 129 (Dec 1981)  $SU(n)$  monopole
- [21] Giamoulis-Goddard-Olive, NP B265 [FS5], 601.
- [22] Farwell-Minami, to appear (One-Dim Toda Molecule, I, II).