数理解析研究所講究録
第 472 巻 1982 年 40-49

非線形発展方程式のばくはつ-減衰型のげんみつ解

大阪外語大 物理科 中村 明
Nakamura Akira

§1. Introduction

ソリトンの解をもつ，非線形偏ビブン方程式の研究は大きく広がり，近年の流行の1つとなった。かんたんにできる問題は，だいたいとかれたので，質的に新らしい研究が，のぞまれる．（ソリトンの問題も，だいたいやりつくされたと思うこともできるし，それは，何に対してもどの時点でも必らずいえることであるが，正しくはない!）

さて，この10数年の，目をみはるソリトン理論の発展とはいえ，それは主には，ほとんど空間1次元なのであって多次元（空間2，3次元）のシステムでは，まだわからないことがいっぱいある．ここでは多次元システムについて研究する．

結論から先にいえば，多次元系では，ふつうの意味の

ソリトン ——《一定の波の形で，一定のスピードで進む局在した 進行波》—— とは異なるモードが存在するということである．かんたんのため 筆者は このモードをリプロンと呼ぶ（ノン−ソリトン部分＝リップル部分の elementary mode という意味で リプロンとよぶ）．

§2. 歴史的な由来 — 多次元KdV

一次元での もっとも代表的な 例が KdV eq. といえるように，多次元での もっとも代表的な例は 2次元(≡2D)，3次元(≡3D)KdV eq. と考えてよい．本質的に多次元の性質をのこしつつも，まず はじめの一歩として よりかんたんなケースを考えるために，Cylindrical 又は Spherical symmetry を仮定したときの 半径方向の波の伝わりについて考える．このときには，次の式からみちびかれる，

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \epsilon\frac{u}{t} = 0, \quad \left(\epsilon = 0, \tfrac{1}{2}, 1\right). \qquad (1)$$

ここで $\epsilon=0$ はふつうの KdV eq.,[1] $\epsilon=\frac{1}{2}$ は Cylindrical

KdV eq. ($\equiv$ Cyl-KdV),[2] $\epsilon=1$はSpherical KdV eq.[3]である．これよりSubscript x, y, z, tは偏ビブンを表わすこととする．2,3次元では，xは半径を表わす($x \to \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

さてそれでは，これらの式をとくという事について考えてみると，Cyl-KdV eq.はだいたいよくわかっている．Spherical KdV eq.は数値計算をのぞいては解析的にはまだ何もわかっていない．Cyl-KdV eq.は，逆散乱法のLax pairからDryumaにより発見され,[4] Calogeroらによってくわしくしらべられた.[5] Bäcklund変換により解を作りだすことは中村によってされた.[6]

ここで少し物理的な面を考えてみよう．Cyl-KdV eq.は要するにたとえば静かな池に石をなげた時に波の輪が広がってゆくが，この波を記述するものである．だから，この波は波の高さuが中心で高く外へひろがるにつれてだんだんひくくなる．初めにプラズマ物理で考えられた時は，この逆のプロセス，つまり外側から波をexciteしてingoingの波をつくりそれが中心へ収縮したときに高い波(high density plasma)を得るという目的で考えられた．このタイプの波が，実はここのタイトルに上げたバクハツ-減衰型の解(explode-decay mode or ripplon)

の第1の例なのである。

§3. これまでにかんたんなripplon解がわかりつつある例

さて上の例から従来の一次元のソリトン(つまり一定の波形で一定のスピードで進むような波)とはちがったタイプ(成長ー減衰するタイプ)の波も多次元ではきわめて自然に存在することがわかった。このような新らしいタイプの解については，まだまだ何もわかっていないのが現状である。まず手始めに，他にもこのような例があるかどうかをさがしたい。少なくとも以下の例についてはわかりつつある。(どれも完全にわかったわけではない)。

2D-KdV eq. (KP eq.)
2D cubic nonlinear Schroedinger (≡NLS) eq.
Benney-Roskes 2D-NLS eq.
2D Toda Lattice eq.

この4例について以下で順番にみてゆきたい。
KPeq.は，

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3\alpha^2 u_{yy}=0, \quad (\alpha=\mathrm{const.}) \qquad (2)$$

である。これは変数変換によってCyl-KdV eq.(1)とつながっていることがわかっていた。だから(2)式は通常のsolitonのほかにexplode-decay typeの解をもつのである。[7,8,9] その形は次である。

$$u=(2\log f)_{xx}, \qquad f=1+\rho_i^2[12(t+t_i)]^{-\frac{1}{3}}\int^{z}dz'\,Ai^2(z'),$$

$$z\equiv(x+x_i)[12(t+t_i)]^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{y+y_i}{\alpha}\right)^2[12(t+t_i)]^{-\frac{4}{3}},$$

$$\rho_i,\ x_i,\ y_i,\ t_i=\mathrm{const.}, \qquad Ai''(z)-zAi(z)=0. \qquad (3)$$

AiはAiry函数と呼ばれる。さてCyl-KdV eq.(1)はexplode-decay typeの解だけをもち通常のsoliton解はもたないが，KPeq.(2)は両方のタイプの解をもつ。そして一般にはN_1-soliton，N_2-ripplon…といったものすべての重ねあわせの状態が厳密解として可能なのである。[9]

Ripplon 解(3)は，ゼロより起こり，$u(x,y,t=-\infty)=0$，局在をはじめ，ある時刻 $t=-t_i$ で局在が極限となり，バクハツし(せまく高くなった極限)，又そのあと低く広くしまいにゼロへと近づく，$u(x,y,t=+\infty)=0$，解である．

次の例は

$$iu_t+\beta u_{xx}+\gamma u_{yy}+\delta u^*uu=0, \quad (\beta,\gamma,\delta=\text{const.}) \qquad (4)$$

である．　この式は次の変換

$$u(x,y,t)=\frac{1}{t}e^{\frac{ix^2}{4\beta t}+\frac{iy^2}{4\gamma t}}w(X,Y,T),$$

$$X\equiv\frac{x}{t},\ Y\equiv\frac{y}{t},\ T\equiv-\frac{1}{t}, \qquad (5)$$

によって不変であることが中村によりみつけられた.[10] つまり $u(x,y,t)$ が (4)の解ならば $w(X,Y,T)$ も又(4)で subscript x,y,t を X,Y,T とした式をみたす．　これは soliton を ripplon に変える変換であり，ふつうの1-soliton から次の1-ripplon solution

$$|u| = \frac{|u_0|}{t}\,\mathrm{sech}\,\frac{1}{t}(k_R x + v t), \qquad u_0, k_R = \text{てきとうな定数}, \quad v = \text{任意の定数}, \tag{6}$$

がえられる. 次の例はもう一つの 2D-NLS eq.,

$$i u_t + (-\beta) u_{xx} + \gamma u_{yy} + \delta u^* u u - 2 w u = 0,$$

$$\beta w_{xx} + \gamma w_{yy} - \beta \delta (u^* u)_{xx} = 0, \tag{7}$$

であり, この式は多重 soliton 解をもつことが知られていた. この式もやはり次の変換に対して不変である.[11]

$$u(x,y,t) = \frac{1}{t} e^{\frac{i x^2}{4(-\beta) t} + \frac{i y^2}{4 \gamma t}}\, U(X, Y, T),$$

$$w(x,y,t) = \frac{1}{t^2} W(X, Y, T),$$

$$X \equiv \frac{x}{t}, \quad Y \equiv \frac{y}{t}, \quad T \equiv -\frac{1}{t}. \tag{8}$$

そして N_1-soliton-N_2-ripplon … のような重ねあわせも可能である.[12] 以上の具体例より中村は次の予想を立て

た.[13]

<u>空間2次元では, ソリトンをもつ系は, かんたんなリプロンももつであろう.</u>

最後の例 2D Toda Lattice eq. の ripplon は ごく最近(今月, 1982.6月)に中村によって, みつけられた.
対称性からいって, 上記の中でも一番きれいな形をしている解といえるが, これの詳細は 原稿を今タイプ中である.

§4. 1次元系の問題

さて上では 主に空間2次元であったが, 1次元でもこのような かんたんな ripplon 解があるだろうか?
特殊なケースでは 1つの具体例が知られている. それは

$$u_t + u_{xxx} - (3uHu_x)_x - (u^3)_x = 0,$$

$$Hu(x) \equiv \frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x')}{x'-x}\,dx', \qquad (9)$$

という系であり，この式は soliton, multiple-periodic wave solution のほかに 次のような かんたんな analytic function の closed form でかかれた ripplon をもつ。[14]

$$u=\left(i\log f^{*}/f\right)_{x},$$

$$f=A_{i}\left\{\frac{x+x_{i}}{\sqrt[3]{12(t+t_{i})}}-iP_{i}^{2}\left[\operatorname{sgn}(t+t_{i})\right]\sqrt[6]{12\,|t+t_{i}|}\right\}, \qquad (10)$$

$t_i, x_i, P_i=$ real const.

以上具体例を研究することにより，問題を探求してきたが，このテーマは 大変あたらしいものであり マダマダわからないことだらけである．かぎられた例から 一般的性質を暗中模索しているといった所であろう．2次元のケースでも，もっと多くの具体例が のぞまれるし，3次元では 全くゼロといってよいであろう．1次元も，色々の可能性があると信じる．

References

1) N.J. Zabusky and M.D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 240.
2) S. Maxon and J. Viecelli, Phys. Fluids, 17 (1974) 1614.
3) 〃 , Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 4.
4) V.S. Dryuma, JETP Lett. 19 (1974) 387.
5) F. Calogero and A. Degasperis, Lett. Nuovo. Cimento 23 (1978) 143.
6) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 2380.
7) R.S. Johnson and S. Thompson, Phys. Lett. 66A (1978) 279.
8) N.C. Freeman, Adv. in Appl. Math. 20 (1980) 1.
9) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 19.
10) 〃 , 〃 50 (1981) 2469.
11) 〃 , Phys. Lett. 88A (1982) 55.
12) 〃 , J. Math. Phys. 23 (1982) No7. to appear.
13) 〃 , 〃 23 (1982) 417.
14) 〃 , J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) No7. to appear.