数理解析研究所講究録
第 472 巻 1982 年 62-87

多成分戸田方程式の hierarchy

京大　数理研　上野喜三雄
Ueno Kimio
東大　理学部　高崎 金久
Takasaki Kanehisa

§0. 序.

筆者達は [4] に於て無限格子の戸田方程式の hierarchy について報告した。そこで扱われたのは2次元 Minkovski 時空における戸田方程式

$$(0.1)\quad \frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial x_1 y_1} = -e^{\varphi(s+1)-\varphi(s)} + e^{\varphi(s)-\varphi(s-1)},$$

$$\left(\varphi(s) = \varphi(s, x_1, y_1) \quad , (x_1, y_1) ; \text{光円錐座標}, \ s ; \text{格子座標} \right)$$

およびその hierarchy であった。差分作用素 $B_1 = e^{\partial_s} + \frac{\partial \varphi(s)}{\partial x_1}$, $C_1 = e^{\varphi(s)-\varphi(s+1)} e^{-\partial_s}$ (或はそれと同値な無限次行列)を用いると, (0.1) は

$$(0.2)\quad [\ \partial_{x_1} - B_1,\ \partial_{y_1} - C_1\ ] = 0 \qquad \left(\partial_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1},\ \partial_{y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \right)$$

と書き直せる。これを無限個の方程式から成る hierarchy に延長し，その代数的構造と2成分 KP hierarchy による解の parametrization について論じたのが [4] の内容である。B_1, C_1 或はその延長 B_n, C_n がスカラー差分作用素である点において，これはいわば「1 成分理論」である。

以下では戸田方程式の「多成分理論」に関する最近の結果について述べる．これはスカラー差分作用素を行列型差分作用素に一般化したもので，いわゆる「非可換戸田方程式」を独立変数の特殊なsectorに於て回復する．その意味で戸田方程式の自然な拡張になっている．

我々の戸田方程式のhierarchyの理論は1成分・多成分いずれに於ても，最近著しい進展を見せたKadomtsev-Petviashvili (KP) hierarchy の理論([1],[2],[3])と密接な関係がある：(i) KP hierarchyは擬微分作用素のスペクトル保存変形として定式化され，極めて美しい代数的構造をもつ．戸田方程式のhierarchyは，対照的に，形式的(或は擬)差分作用素のスペクトル保存変形として導入され，KP hierarchyとよく似た構造をもつ．差分作用素，或はそれと同値な$\infty\times\infty$行列表示を徹底的に利用する点が我々の理論の特徴である．(ii) 波動函数のレベルに於ては，r成分戸田hierarchyは2r成分KP hierarchyと結びつく．これにより，戸田hierarchyの解のparametrizationを与えたり，Schlesinger変換を導入したりすることも可能になる．(もっとも，具体的な解を論じる際には，このparametrizationはいささか不便なこともある．)——この2つが重要なポイントである．

§1. 1成分理論の復習 (c.f. [4])

離散変数 s, 連続変数 $x=(x_1, x_2, \cdots)$, $y=(y_1, y_2, \cdots)$ および形式的差分作用素 ($e^{\nu\partial_s} f(s) = f(s+\nu)$: shift operator)

$$L = e^{\partial_s} + u_1 + u_2 e^{-\partial_s} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu e^{(1-\nu)\partial_s} \quad (u_0=1),$$

$$M = v_0 e^{-\partial_s} + v_1 + v_2 e^{\partial_s} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu e^{(\nu-1)\partial_s} \quad (v_0 \neq 0),$$

を用意する. u_ν, v_ν は (s, x, y) の函数とする. また

$$B_n = (L^n)_+, \qquad C_n = (M^n)_-$$

とおく. 但し一般に $A = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu e^{\nu\partial_s}$ に対して $(A)_+ = \sum_{\nu\geq 0} a_\nu e^{\nu\partial_s}$, $(A)_- = \sum_{\nu<0} a_\nu e^{\nu\partial_s}$ という記号を用いる. このとき,

[$\mathbb{Z}$ = 整数全体]

定理 1.1 Lax 方程式系

$$(1.1)\ \begin{cases} [\partial_{x_n} - B_n, L] = [\partial_{y_n} - C_n, L] = 0 \\ [\partial_{x_n} - B_n, M] = [\partial_{y_n} - C_n, M] = 0 \qquad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

と Zakharov-Shabat 方程式系

$$(1.2)\ \begin{cases} [\partial_{x_m} - B_m, \partial_{x_n} - B_n] = [\partial_{y_m} - C_m, \partial_{y_n} - C_n] \\ = [\partial_{x_m} - B_m, \partial_{y_n} - C_n] = 0 \qquad (m, n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

は同値である. □

この (1.1) 或は (1.2) によって定義される連立方程式系を<u>戸田方程式の hierarchy</u> と呼んだのである. (1.2) は (0.2) を含むことに注意する.

(1.1), (1.2) に対して線型方程式系を通じて波動函数を導入

することができる。或は同じことだが，次のような差分作用素$W^{(\infty)}, W^{(0)}$を導入することができる（uniqueではない）：

$$L = W^{(\infty)} e^{\partial_s} W^{(\infty)-1}, \quad M = W^{(0)} e^{-\partial_s} W^{(0)-1};$$

$$W^{(\infty)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu^{(\infty)} e^{-\nu\partial_s}, \quad W^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu^{(0)} e^{\nu\partial_s}, \quad \begin{pmatrix} w_0^{(\infty)} = 1, \\ w_0^{(0)} \neq 0 \end{pmatrix},$$

$$(1.3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n} = B_n W^{(\infty)} - W^{(\infty)} e^{n\partial_s}, \\ \dfrac{\partial W^{(\infty)}}{\partial y_n} = C_n W^{(\infty)}, \\ \dfrac{\partial W^{(0)}}{\partial x_n} = B_n W^{(0)}, \\ \dfrac{\partial W^{(0)}}{\partial y_n} = C_n W^{(0)} - W^{(0)} e^{-n\partial_s} \qquad (n = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

逆にこのような$W^{(\infty)}, W^{(0)}$があれば，対応するL, Mは(1.1), (1.2)の解を与える。(1.1), (1.2)を場の方程式とみなすならば，$W^{(\infty)}, W^{(0)}$は場の量L, Mに対するpotentialにあたる，といえよう。L, Mに対して$W^{(\infty)}, W^{(0)}$をひとつえらぶことは一種のgauge固定である。$W^{(\infty)} \longrightarrow W^{(\infty)} \times$（定数係数差分作用素），$W^{(0)} \longrightarrow W^{(0)} \times$（〃）は$L, M$を変えない。これは一種のgauge変換である。

注意　(1.3)においてB_n, C_nが一般に$(B_n)_+ = B_n$, $C_n e^{-\partial_s} = (C_n e^{-\partial_s})_-$をみたす差分作用素であると仮定するだけで，実は，

$$B_n = (L^n)_+ = (W^{(\infty)} e^{n\partial_s} W^{(\infty)-1})_+, \quad C_n = (M^n)_- = (W^{(0)} e^{-n\partial_s} W^{(0)-1})_-$$

が従う。（このことは，実際に(1.3)の特殊解をつくるとき，しばしば有効である。）実際，(1.3)第1式，第3式，第4式により，

$$B_n = W^{(\infty)} e^{n\partial_s} W^{(\infty)-1} + \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n} W^{(\infty)-1},$$

$$C_n = W^{(0)} e^{-n\partial_s} W^{(0)-1} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y_n} W^{(0)-1} = \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial y_n} W^{(\infty)-1}.$$

$w_0^{(\infty)} = 1$ に注意しつつ各辺の $(\ )_+$, $(\ )_-$ をとれば結論を得る. □

$W^{(\infty)}, W^{(0)}$ の代数的な特徴づけ，多成分（2成分）KP理論との関係... などは，後に述べる多成分理論の中へ吸収されるのでここでは省く．（[4]）

最後に，差分作用素の代りに $\infty\times\infty$ 行列を用いる定式化について触れておく．（これは $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ の代数的特徴づけや周期的格子の取扱いなどに威力を発揮する．多成分理論も同様に $\infty\times\infty$ 行列で定式化できる．）次の対応を考える：

$$(1.4)\quad A = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu(s) e^{\nu\partial_s} \longleftrightarrow \mathbb{A} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \mathrm{diag}[a_\nu(s)]_{s\in\mathbb{Z}} \Lambda^\nu$$

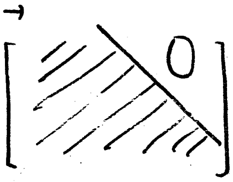
$$= \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & \cdots \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{-1}(-1) & a_0(-1) & a_1(-1) & \\ \hline & a_{-1}(0) & a_0(0) & a_1(0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{array} \ \mathbb{Z} \\ \longleftarrow \mathbb{Z} \longrightarrow & \end{array}$$

ここに $\Lambda = (\delta_{\mu,\nu-1})_{\mu,\nu\in\mathbb{Z}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \cdots & -1 & 0 \cdots \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|cc} \ddots\ 0 & 1 & \\ \hline & 0 & 1\ \ddots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{array} \end{array}$. (1.4) は和・積を保つ。

$\{A : A = \sum_{-\infty<\nu\ll\infty} a_\nu e^{\nu\partial_s}\}$, $\{A : A = \sum_{-\infty\ll\nu<\infty} a_\nu e^{\nu\partial_s}\}$ は各々 $\mathbb{C}$-algebra をなし，交換子について Lie 環をなす．（$\sum_{-\infty<\nu\ll\infty}$, $\sum_{-\infty\ll\nu<\infty}$ は各々或る m —— A に依存する —— に対して $\sum_{-\infty<\nu\le m}$, $\sum_{m\le\nu<\infty}$ という範囲で総和をとる意味．）(1.4) によって，これらに無限次行列環が対応する：

$$\{A;\ A=\sum_{-\infty<\nu<<\infty} a_\nu e^{\nu\partial_s}\} \overset{(1.4)}{\simeq} \{\mathbb{A}=(a_{\mu,\nu})_{\substack{\mu,\nu\in\mathbb{Z}\\ \downarrow\ \rightarrow}} ;(\exists m)\ a_{\mu,\nu}=0 \text{ for } \nu-\mu>m\}$$

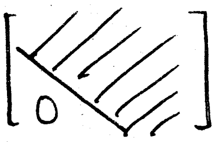
$$=\left\{\ \mathbb{A}=\right.$$



$$\left.\right\}$$

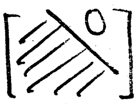
$$\{A;\ A=\sum_{-\infty<<\nu<\infty} a_\nu e^{\nu\partial_s}\} \simeq \{\mathbb{A}=(a_{\mu\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{Z}} ;(\exists m)\ a_{\mu,\nu}=0 \text{ for } \mu-\nu>m\}$$

$$=\left\{\ \mathbb{A}=\right.$$

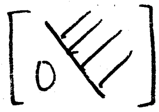


$$\left.\right\}$$

実際に各々の行列の集合の中で和・積が意味をもつことは明らかである。しかし



と



の間の積は一般には代数的に定義できない。(何らかの収束条件を課せば別だが。)

(1.4) は(交換子)積を保つので (1.1), (1.2), (1.3) はすべて対応する無限次行列に対する方程式に書き直される。$e^{\pm\partial_s}$ が $\Lambda^{\pm1}$ に対応することに注意せよ。(無限次行列表示については §3で多成分の場合も含めてもう少し詳しく説明する。)

§2. r成分理論の定式化(差分作用素による).

r成分理論を定式化するには、線型問題から出発してその積分可能条件として Lax 方程式や Zakharov-Shabat 方程式を導き出す方がわかりやすい。以下この道順で説明する。

1個の離散変数 s, および連続変数 $x=(x^{(1)},\dots,x^{(r)})$, $y=(y^{(1)},\dots,y^{(r)})$, $x^{(\alpha)}=(x^{(\alpha)}_n)_{n=1}^{\infty}$, $y^{(\alpha)}=(y^{(\alpha)}_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\alpha=1,\dots,r)$ を用意する。

1成分戸田方程式([4])や多成分KP方程式([1],[2],[3])

の場合から類推して，次のような線型問題を採用するのが自然である：

$$(2.1)\quad \begin{cases} (\partial_{x_n^{(\alpha)}} - B_n^{(\alpha)})\Psi = 0, \\ (\partial_{y_n^{(\alpha)}} - C_n^{(\alpha)})\Psi = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \Psi = \Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}, \\ \alpha = 1, \dots, r, \ n = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

ここに $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ は $r \times r$ 行列型の形式的波動函数，$B_n^{(\alpha)}, C_n^{(\alpha)}$ は $r \times r$ 行列型差分作用素で次のような形を仮定する：

$$(2.2)\quad \begin{cases} \Psi^{(\infty)}(s,x,y;\lambda) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{(\infty)}(s,x,y)\lambda^{-\nu}\right) \lambda^s \operatorname{diag}\left[e^{\eta(x^{(1)},\lambda)}, \dots, e^{\eta(x^{(r)},\lambda)}\right], \\ \Psi^{(0)}(s,x,y;\lambda) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{(0)}(s,x,y)\lambda^{\nu}\right) \lambda^s \operatorname{diag}\left[e^{\eta(y^{(1)},\lambda^{-1})}, \dots, e^{\eta(y^{(r)},\lambda^{-1})}\right], \\ W_0^{(\infty)} = 1_r,\ W_0^{(0)} \text{ は可逆行列.} \\ B_n^{(\alpha)} = E_\alpha e^{n\partial_s} + B_{n,1}^{(\alpha)}(s,x,y) e^{(n-1)\partial_s} + \cdots + B_{n,n}^{(\alpha)}(s,x,y), \\ C_n^{(\alpha)} = C_{n,0}^{(\alpha)}(s,x,y) e^{-n\partial_s} + \cdots + C_{n,n-1}^{(\alpha)}(s,x,y) e^{-\partial_s}. \end{cases}$$

ただし，λ は形式的 spectral parameter であり，また，

$$(2.3)\quad \begin{cases} \eta(x^{(\alpha)},\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(\alpha)} \lambda^n, \quad \eta(y^{(\alpha)},\lambda^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(\alpha)} \lambda^{-n}, \\ E_\alpha = \operatorname{diag}[0,\dots,0,\underset{\alpha}{1},0,\dots,0] = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{array}{l} (\alpha,\alpha)\text{成分} \\ \text{のみ } 1. \end{array} \right) \end{cases}$$

という記号を用いた．$\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ は λ について形式的 Laurent 級数であるが，各々 $\lambda = \infty, 0$ における局所的な波動函数を形式化したものになっている．即ち，(2.2)右辺の第1の級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\cdots)$ はそれぞれ $\lambda = \infty, 0$ において正則な函数，第2の因子 $\operatorname{diag}[\cdots]$ は $\lambda = \infty$，0 における真性特異点に対応している．また，$B_n^{(\alpha)}$，$C_n^{(\alpha)}$ はちょうど§1の B_n，C_n を行列化したものにあたる。

さて，(2.1)の積分可能条件を考えれば直ちに以下に述べる

Lax 方程式, Zakharov-Shabat 方程式を得るのだが, ここでは §1 の $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ にあたる作用素（少々紛らわしいが, 以下同じ文字 $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ であらわす）を使って (2.1) をいったん書き直してから Lax 方程式等を導こう. 則ち, (2.2) に対して

$$
(2.4) \begin{cases} W^{(\infty)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{(\infty)}(s,x,y)\, e^{-\nu\partial_s}, \\ W^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{(0)}(s,x,y)\, e^{\nu\partial_s} \end{cases}
$$

を導入する. すると (2.1) は次の方程式系に同値である：

$$
(2.5) \begin{cases} \dfrac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} = B_n^{(\alpha)} W^{(\infty)} - W^{(\infty)} e^{n\partial_s} E_\alpha, \\ \dfrac{\partial W^{(\infty)}}{\partial y_n^{(\alpha)}} = C_n^{(\alpha)} W^{(\infty)}, \\ \dfrac{\partial W^{(0)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} = B_n^{(\alpha)} W^{(0)}, \\ \dfrac{\partial W^{(0)}}{\partial y_n^{(\alpha)}} = C_n^{(\alpha)} W^{(0)} - W^{(0)} e^{-n\partial_s} E_\alpha \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1,\cdots,r \\ n = 1,2,\cdots \end{pmatrix}. \end{cases}
$$

[注意！ p.4〜5. の注意と同様のことがこの場合にも言える.]

そこで, 次の $2r+2$ 個の行列型形式的差分作用素を導入する：

$$
(2.6) \begin{cases} L = W^{(\infty)} e^{\partial_s} W^{(\infty)-1}, \quad U^{(\alpha)} = W^{(\infty)} E_\alpha W^{(\infty)-1}, \\ M = W^{(0)} e^{-\partial_s} W^{(0)-1}, \quad V^{(\alpha)} = W^{(0)} E_\alpha W^{(0)-1} \quad (\alpha = 1,\cdots,r). \end{cases}
$$

このとき, これらが次の代数的条件を満たすことは明らか！

$$
(2.7) \begin{cases} L, U^{(\alpha)} (\alpha=1,\cdots,r) \text{ は互いに可換}, \ U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} U^{(\beta)}, \ \sum_{\alpha=1}^{r} U^{(\alpha)} = 1_r, \\ M, V^{(\alpha)} (\alpha=1,\cdots,r) \text{ は互いに可換}, \ V^{(\alpha)} V^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} V^{(\beta)}, \ \sum_{\alpha=1}^{r} V^{(\alpha)} = 1_r, \\ L = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu e^{-\nu\partial_s}, \ U^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu^{(\alpha)} e^{-\nu\partial_s} \text{ と表わすとき}, \ L_0 = 1_r, \ U_0^{(\alpha)} = E_\alpha. \\ M = \sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu e^{\nu\partial_s}, \ V^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_\nu^{(\alpha)} e^{\nu\partial_s} \text{ と表わすとき}, \ M_0 = W_0^{(0)}(s) W_0^{(0)}(s-1)^{-1}, \\ \qquad V_0^{(\alpha)} = W_0^{(0)}(s) E_\alpha W_0^{(0)-1}(s). \end{cases}
$$

<u>定理2.1.</u> (2.5) をみたす $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ に対して $L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$ を (2.6) により定義し，更に

$$(2.8)\quad \begin{cases} B_n^{(\alpha)} = (L^n U^{(\alpha)})_+ , \\ C_n^{(\alpha)} = (M^n V^{(\alpha)})_- \end{cases}$$

[( )$_\pm$ の定義はスカラー差分作用素の場合と全く同様である.]

を導入するとき，Lax 方程式系

$$(2.9)\quad \begin{cases} [\partial_{x_n^{(\alpha)}} - B_n^{(\alpha)}, L] = [\partial_{x_n^{(\alpha)}} - B_n^{(\alpha)}, U^{(\beta)}] = 0, \\ [\partial_{y_n^{(\alpha)}} - C_n^{(\alpha)}, L] = [\partial_{y_n^{(\alpha)}} - C_n^{(\alpha)}, U^{(\beta)}] = 0, \\ \text{および}, L, U^{(\alpha)} \text{ を } M, V^{(\alpha)} \text{ で置き換えた方程式} \quad \begin{pmatrix} \alpha,\beta = 1,\cdots,r, \\ n = 1,2,\cdots \end{pmatrix} \end{cases}$$

および Zakharov - Shabat 方程式系

$$(2.10)\quad \begin{cases} [\partial_{x_m^{(\alpha)}} - B_m^{(\alpha)}, \partial_{x_n^{(\beta)}} - B_n^{(\beta)}] = [\partial_{y_m^{(\alpha)}} - C_m^{(\alpha)}, \partial_{y_n^{(\beta)}} - C_n^{(\beta)}] \\ = [\partial_{x_m^{(\alpha)}} - B_m^{(\alpha)}, \partial_{y_n^{(\beta)}} - C_n^{(\alpha)}] = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha,\beta = 1,\cdots,r, \\ m,n = 1,2,\cdots \end{pmatrix} \end{cases}$$

が成立する. □

<u>注意</u> (2.9), (2.10) が線型系 (2.1) の積分可能条件に他ならない. <u>$W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ という作用素を導入し，(2.5) を仲介にすることにより，積分可能条件の導出が極めて円滑に行われる</u>ことに注意されたい。なお (3.6) が次に同値であることにも注意をしたい:

$$(2.11)\quad \begin{cases} L\Psi^{(\infty)} = \lambda\Psi^{(\infty)}, & U^{(\alpha)}\Psi^{(\infty)} = \Psi^{(\infty)}E_\alpha, \\ M\Psi^{(0)} = \lambda^{-1}\Psi^{(0)}, & V^{(\alpha)}\Psi^{(0)} = \Psi^{(0)}E_\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,r). \end{cases}$$

この意味で (2.1) は<u>固有値問題 (2.11) のスペクトル保存変形</u>を与えるものとみなされる. これを L, <u>M に関する</u> (および $U^{(\alpha)}$, $V^{(\alpha)}$) 方程式に書き直したものが (2.9), (2.10) に他ならない. □

さて，今度は $\Psi^{(\infty)}$, $\Psi^{(0)}$, $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ のことは忘れて，改めて (2.9) (2.10) から出発することにしよう。このとき，次が成立する:

定理2.2. 一般に，(2.7)を満たす形式的差分作用素(r×r行列型) $L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\dots,r)$ に対して，$B_n^{(\alpha)}, C_n^{(\alpha)}$ を(2.8)により定義するとき，Lax方程式系(2.9)とZakharov-Shabat方程式系(2.10)は同値である．□

そこで$\underbrace{\text{，(2.9)}}_{\text{(2.7)の下で}}$或は同値な(2.10)をr成分戸田方程式hierarchyと呼ぶ．$r=1$の場合には§1で説明した1成分理論に一致する．これがr成分理論の定式化である．

定理2.1は(2.5)の解からr成分戸田方程式hierarchyの解が得られることを主張している．ところが逆に，

定理2.3. (2.7)の下でhierarchy(2.9),(2.10)をみたす$L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$に対して，(2.5),(2.6)をみたす$W^{(\infty)}, W^{(0)}$が存在する．(uniqueではない．)□

$W^{(\infty)}, W^{(0)}$に対して右から定数係数差分作用素をかけても$L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$は変わらない．これがgauge変換とでも呼ぶべき自由度であることは§1で述べた通りである．定理$\binom{2.1}{2.3}$により，r成分戸田方程式hierarchyは，いわばpotentialにあたる$W^{(\infty)}, W^{(0)}$に対する方程式(2.5)へと変換されるわけである．この意味で(2.5)の方がより根源的な性格をもつ．そのことは，§4で述べる波動函数の代数的特徴づけ・多成分KP理論との関連etcを見ればもっとはっきりする．

注意　いわゆる非可換戸田方程式は,

$$x^{(1)}=x^{(2)}=\cdots=x^{(r)}\underset{\text{とおく.}}{(=x)},\quad y^{(1)}=\cdots=y^{(r)}\underset{\text{とおく.}}{(=y)}$$

という sector において回復される．則ち, B_n, C_n を

$$B_n=\sum_{\alpha=1}^{r}B_n^{(\alpha)}\Big|_{\substack{x^{(1)}=\cdots=x^{(r)}=x\\ y^{(1)}=\cdots=y^{(r)}=y}},\quad C_n=\sum_{\alpha=1}^{r}C_n^{(\alpha)}\Big|_{\substack{x^{(1)}=\cdots=x^{(r)}=x\\ y^{(1)}=\cdots=y^{(r)}=y}}$$

とおくとき, B_n, C_n, L, M, $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$（後の4つもやはり上の sector に制限する．それを同じ文字で表わしている）は (1.1), (1.2), (1.3) と同じ形の方程式をみたす．これが非可換戸田方程式に他ならない．これでは，多成分理論における時間発展を十分に取り出していないのである．□

§3. r成分理論の定式化（無限次行列による）.

無限次行列による定式化は差分作用素によるものと同値であるが，興味深い側面も持ち，時として非常に便利であるのでこの節で説明しておこう．

基本的には定式化は1成分の場合と同じで，(1.4)による対応を a_ν が $r\times r$ 行列の場合に拡張することにより得られる．則ち，次の対応を考える：

$$(3.1)\quad A=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}A_\nu(s)e^{\nu\partial_s}\longleftrightarrow \mathbb{A}=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\mathrm{Diag}\,[A_\nu(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\Lambda^\nu$$

$$(A_\nu(s):r\times r\text{行列})\qquad\qquad \overset{\cap}{(M_{\mathbb{Z}\times r}(\mathbb{C})=M(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{C}^r))}$$

$$
= \begin{array}{c}
\overleftrightarrow{\quad \mathbb{Z}\times r \quad} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
\ddots & & & & & & \\
\cdots & A_{-1}(-1) & A_0(-1) & A_1(-1) & \cdots & & \\
\hline
& \cdots & A_{-1}(0) & A_0(0) & A_1(0) & \cdots & \\
& & & & & & \ddots
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \}r \ -1 \\ \}r \ \ 0 \\ \\ \end{array}
\updownarrow \mathbb{Z}\times r \\
\cdots \ \underbrace{\ }_{r} \ \underbrace{\ }_{r} \ \underbrace{\ }_{r} \ \underbrace{\ }_{r} \ \cdots \\
\cdots \ -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \ \cdots
\end{array}
$$

ここに,

$$
\mathbb{\Lambda} = \Lambda\otimes 1_r = \begin{array}{c}
\cdots \ -1 \quad 0 \ \cdots \\
\left[\begin{array}{cccccc}
\ddots & & & & & \\
& \boxed{0} & \boxed{1_r} & & & \\
& & \boxed{0} & \boxed{1_r} & & \\
\hline
& & & \boxed{0} & \boxed{1_r} & \\
& & & & & \ddots
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ )-1 \\ )\,0 \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

また, $\mathrm{Diag}[A_\nu(s)]_{s\in\mathbb{Z}}$ は$(\mathbb{Z}\times r)\times(\mathbb{Z}\times r)$行列の対角blockに, $r\times r$行列 $A_\nu(s)$ $(s\in\mathbb{Z})$ を並べたものである. つまり(1.4)では$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$に作用する$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$行列を対応させたのに対して, ここでは$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{C}^{r}$に作用する$(\mathbb{Z}\times r)\times(\mathbb{Z}\times r)$行列を対応させるのである. 行・列をあらわすindex setを$\mathbb{Z}\times r$(但しrは集合$\{1,\cdots,r\}$の略記のつもり.)としている.

更に$(A)_+ = \sum_{\nu\geq 0} A_\nu(s)e^{\nu\partial_s}$, $(A)_- = \sum_{\nu<0} A_\nu(s)e^{\nu\partial_s}$ に対応して

$$
(3.2)\quad \begin{cases} (\mathbb{A})_+ = \sum_{\nu\geq 0} \mathrm{Diag}[A_\nu(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\,\mathbb{\Lambda}^\nu \\ (\mathbb{A})_- = \sum_{\nu<0} \mathrm{Diag}[A_\nu(s)]_{s\in\mathbb{Z}}\,\mathbb{\Lambda}^\nu \end{cases}
$$

とおく.

(3.1)は和と積を保ち, $(A)_\pm$もちょうど$(\mathbb{A})_\pm$と対応しているので, $W^{(\infty)}, W^{(0)}, L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}, B_n^{(\alpha)}, C_n^{(\alpha)}$ に対応する$(\mathbb{Z}\times r)\times(\mathbb{Z}\times r)$行列を$\mathbb{W}^{(\infty)}, \mathbb{W}^{(0)}, \mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{U}^{(\alpha)}, \mathbb{V}^{(\alpha)}, \mathbb{B}_n^{(\alpha)}, \mathbb{C}_n^{(\alpha)}$ というように字体を変えて記すことにすれば, (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), (2.10)がそのままの形でこれらの$(\mathbb{Z}\times r)\times(\mathbb{Z}\times r)$行列達に対する関係式に書きかえられる. $e^{\pm\partial_s}$は$\mathbb{\Lambda}^{\pm 1}$に対応することに注意.

また(2.1), (2.11)もまた$\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$に対応する無限次行列によ

り書き直される，則ち，(2.2)前半に対応して

$$
(3.3)\quad \begin{cases} \Psi^{(\infty)}_{(x,y)} = \mathbb{W}^{(\infty)}_{(x,y)} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{r} \eta(x^{(\alpha)}, \Lambda) \otimes E_\alpha\right) \\ \Psi^{(0)}_{(x,y)} = \mathbb{W}^{(0)}_{(x,y)} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{r} \eta(y^{(\alpha)}, \Lambda^{-1}) \otimes E_\alpha\right) \end{cases}
$$

とおく．ただし記号は(2.3)に準ずる．このとき(2.1)，(2.11)は各々次の(3.4)，(3.5)に同値である；

$$
(3.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_n^{(\alpha)}} = \mathbb{B}_n^{(\alpha)} \Psi, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial y_n^{(\alpha)}} = \mathbb{C}_n^{(\alpha)} \Psi. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} \Psi = \Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}, \\ \alpha = 1, \cdots, r, \quad n = 1, 2, \cdots \end{array} \right).
$$

$$
(3.5)\quad \begin{cases} \mathbb{L}\Psi^{(\infty)} = \Psi^{(\infty)}\Lambda, \ \mathbb{U}^{(\alpha)}\Psi^{(\infty)} = \Psi^{(\infty)}(1_{\mathbb{Z}} \otimes E_\alpha), \\ \mathbb{M}\Psi^{(0)} = \Psi^{(0)}\Lambda^{-1}, \ \mathbb{V}^{(\alpha)}\Psi^{(0)} = \Psi^{(0)}(1_{\mathbb{Z}} \otimes E_\alpha). \quad (\alpha = 1, \cdots, r). \end{cases}
$$

以上のように，r成分戸田方程式の理論は，無限次行列のスペクトル保存変形としてもとらえられる。

§4. 波動函数の特徴付け・2r成分KP理論との関係.

この節では$\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$或は$\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$を特徴づける双線型方程式について説明する．これにより2r成分KP理論との関連が明らかになる．

まず発見的に議論を進めよう，(3.4)に注目する．

$$
(4.1)\quad \begin{cases} \Psi^{(\infty)-1} = e^{-\sum_{\alpha=1}^{r} \eta(x^{(\alpha)}, \Lambda) \otimes E_\alpha} \, \mathbb{W}^{(\infty)-1}, \\ \Psi^{(0)-1} = e^{-\sum_{\alpha=1}^{r} \eta(y^{(\alpha)}, \Lambda^{-1}) \otimes E_\alpha} \, \mathbb{W}^{(0)-1} \end{cases}
$$

を(3.4)の右からかけて，

$$(4.2)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}}\cdot\Psi^{(\infty)-1}=\mathbb{B}_n^{(\alpha)}=\dfrac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_n^{(\alpha)}}\cdot\Psi^{(0)},\\[2ex] \dfrac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial y_n^{(\alpha)}}\cdot\Psi^{(\infty)-1}=\mathbb{C}_n^{(\alpha)}=\dfrac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial y_n^{(\alpha)}}\cdot\Psi^{(0)}.\end{cases}$$

但し，

$$\frac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}}\cdot\Psi^{(\infty)-1}=\left(\frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}}+W^{(\infty)}(\Lambda^n\otimes E_\alpha)\right)W^{(\infty)-1},\ \text{etc}\ldots$$

というように，上式両式は常に $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ を使って書き直し，$\exp\sum_{\alpha=1}^{r}\eta(x^{(\alpha)},\Lambda)\otimes E_\alpha$，$\exp\sum_{\alpha=1}^{r}\eta(y^{(\alpha)},\Lambda^{-1})\otimes E_\alpha$ etc を消去した形で解釈する．((3.3), (4.1) に注意すればこれは可能.) こうすれば(4.2)両辺は無限次行列の積として意味をもつ．同様に解釈して，

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}\partial x_m^{(\beta)}}\cdot\Psi^{(\infty)-1}=\frac{\partial \mathbb{B}_n^{(\alpha)}}{\partial x_m^{(\beta)}}+\mathbb{B}_m^{(\beta)}=\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_n^{(\alpha)}\partial x_m^{(\beta)}}\cdot\Psi^{(0)-1},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\infty)}}{\partial y_n^{(\alpha)}\partial y_m^{(\beta)}}\cdot\Psi^{(\infty)-1}=\frac{\partial \mathbb{C}_n^{(\alpha)}}{\partial y_m^{(\beta)}}+\mathbb{C}_m^{(\beta)}=\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial y_n^{(\alpha)}\partial y_m^{(\beta)}}\cdot\Psi^{(0)-1},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}\partial y_m^{(\beta)}}\cdot\Psi^{(\infty)-1}=\frac{\partial \mathbb{B}_n^{(\alpha)}}{\partial y_m^{(\beta)}}+\mathbb{C}_m^{(\beta)}=\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_n^{(\alpha)}\partial y_m^{(\beta)}}\cdot\Psi^{(0)-1},$$

etc, …, 任意の高階導函数について同様のことが言える．

このようにして，結局，次の結果を得る：

<u>定理4.1.</u> r成分戸田方程式 hierarchy の波動函数 $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ に対して次が成立する：任意の多重指数 μ, ν に対して，

$$(4.3)\quad\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu}\Psi^{(\infty)}(x,y)\right]\cdot\Psi^{(0)}(x,y)^{-1}=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu}\Psi^{(0)}(x,y)\right]\cdot\Psi^{(0)}(x,y)^{-1}.$$

(ここに，$\mu=(\mu_1^{(1)},\mu_2^{(1)},\ldots;\ldots;\mu_1^{(r)},\mu_2^{(r)},\ldots)$, $\nu=(\nu_1^{(1)},\nu_2^{(1)},\ldots;\ldots;\nu_1^{(r)},\nu_2^{(r)},\ldots)$, $(\partial/\partial x)^{\mu}=\prod_{\alpha=1}^{r}\prod_{n=1}^{\infty}(\partial/\partial x_n^{(\alpha)})^{\mu_n^{(\alpha)}}$, $(\partial/\partial y)^{\nu}=\prod_{\alpha=1}^{r}\prod_{n=1}^{\infty}(\partial/\partial y_n^{(\alpha)})^{\nu_n^{(\alpha)}}$.
($\mu_n^{(\alpha)}, \nu_n^{(\alpha)}\geqq 0$，有限個を除き 0．))

逆に，これが(3.3)の形の$\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$に対して成立すれば，$\Psi^{(\infty)}$, $\Psi^{(0)}$はr成分戸田方程式hierarchyの波動函数を与える．即ち，対応する$W^{(\infty)}, W^{(0)}$が(2.5)をみたす．

［但し，(4.3)両辺の積は(4.2)の直後に注意したように解釈する。］□

これが波動函数の双線型方程式(4.3)による特徴づけである．

(4.3)は$\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$を使って次のようにも言いかえられる；

定理4.2. (4.3)は次に同値である；　　［"t"は転置をあらわす．］

$$(4.4)\quad \oint \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu}\Psi^{(\infty)}(s';x,y;\lambda)\right]\cdot{}^{t}\Psi^{*(\infty)}(s,x,y;\lambda)\,d\lambda$$
$$= \oint \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu}\Psi^{(0)}(s';x,y;\lambda)\right]{}^{t}\Psi^{*(0)}(s,x,y;\lambda)\,d\lambda \quad \text{for any } s, s'.$$

但し，ここに$\Psi^{*(\infty)}, \Psi^{*(0)}$は，$W_\nu^{*(\infty)}, W_\nu^{*(0)}$を

$$(4.5)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{*(\infty)}(s,x,y)\,e^{\nu\partial_s} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu\partial_s}\,{}^{t}W_\nu^{(\infty)}(s-1,x,y)\right)^{-1}, \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{*(0)}(s,x,y)\,e^{-\nu\partial_s} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu\partial_s}\,{}^{t}W_\nu^{(0)}(s-1,x,y)\right)^{-1} \end{cases}$$

によって定義するとき，

$$(4.6)\quad \begin{cases} \Psi^{*(\infty)}(s,x,y;\lambda) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{*(\infty)}(s,x,y)\lambda^{-\nu}\right)\lambda^{-s}\,\mathrm{diag}\left[e^{-\eta(x^{(1)},\lambda)},\dots,e^{-\eta(x^{(r)},\lambda)}\right], \\ \Psi^{*(0)}(s,x,y;\lambda) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu^{*(0)}(s,x,y)\lambda^{\nu}\right)\lambda^{-s}\,\mathrm{diag}\left[e^{-\eta(y^{(1)},\lambda^{-1})},\dots,e^{-\eta(y^{(r)},\lambda^{-1})}\right] \end{cases}$$

によって与える．また$\oint d\lambda$は形式的(Laurent)級数に対して形式的に(λ^{-1}の係数)×$2\pi\sqrt{-1}$を対応させる記号として用いている；

$$\oint \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu \lambda^{\nu}\,d\lambda = 2\pi\sqrt{-1}\,a_{-1}. \quad \Box$$

x_∞

さて，(4.3),(4.4)はTaylor係数の形をしているので，波動函数を特徴づける双線型方程式を次のようにまとめて書くことができる：

$$(4.3')\quad \Psi^{(\infty)}(x',y')\Psi^{(\infty)}(x,y)^{-1} = \Psi^{(0)}(x',y')\Psi^{(0)}(x,y)^{-1} \quad \text{for any } x,x',y,y'.$$

$$(4.4')\quad \oint \Psi^{(\infty)}(s',x',y';\lambda)\,{}^t\Psi^{*(\infty)}(s,x,y;\lambda)\,d\lambda = \oint \Psi^{(0)}(s',x',y';\lambda)\,{}^t\Psi^{*(0)}(s,x,y;\lambda)\,d\lambda$$

$$\text{for any } s,s',x,x',y,y'.$$

但し，今度は,(4.2)直後の解釈をしても，両辺の積は無限次行列或はλの形式的Laurent級数として代数的には意味をもたない．(4.3'),(4.4')は$x'-x$, $y'-y$を不定変数とする(4.3),(4.4)の母函数表示とみなすべきである．つまり，(4.3'),(4.4')は$x'-x$, $y'-y$に関する形式的巾級数であって，$\frac{(x'-x)^{\mu}}{\mu!}\frac{(y'-y)^{\nu}}{\nu!}$ $\left(=\prod_{n=1}\prod_{\alpha=1}\frac{(x'^{(\alpha)}_n-x^{(\alpha)}_n)^{\mu^{(\alpha)}_n}}{\mu^{(\alpha)}_n!}\frac{(y'^{(\alpha)}_n-y^{(\alpha)}_n)^{\nu^{(\alpha)}_n}}{\nu^{(\alpha)}_n!}\right)$の係数が(4.3),(4.4)に他ならない．

(4.4')によって2r成分KP理論との関連がわかる．

[3, III]の記号に従って$W_{l_1,\dots,l_{2r}}(x^{(1)},\dots,x^{(2r)};\lambda)$を2r成分KP方程式の波動函数($l=(l_1,\dots,l_{2r})$はSchlesinger変換をあらわす)とする．(これは$(2r)\times(2r)$行列である．)すると結果は；

定理4.3. $W_l(x^{(1)},\dots,x^{(r)},y^{(1)},\dots,y^{(r)};\lambda)$を4つの$r\times r$ blockに分けて，$\Psi^{(\infty)}_l$, $\Psi^{(0)}_l$を次のように定義する；

$$(4.7)\quad W_{l+(\underbrace{s,\dots,s}_{r},\underbrace{-s,\dots,-s}_{r})}(x^{(1)},\dots,x^{(r)},y^{(1)},\dots,y^{(r)};\lambda) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \Psi^{(\infty)}_l(s,x,y;\lambda)\begin{bmatrix}\lambda^{l_1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda^{l_r}\end{bmatrix} & \Psi^{(0)}_l(s,x,y;\lambda^{-1})\begin{bmatrix}\lambda^{l_{r+1}-1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda^{l_{2r}-1}\end{bmatrix} \\ \hline * & ** \end{array}\right]\begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow r\end{array} \\ \quad\longleftarrow r \longrightarrow \qquad\qquad \longleftarrow r \longrightarrow \end{array}$$

このとき，適当な$\Psi_\ell^{*(\infty)}, \Psi_\ell^{*(0)}$（それは$W_\ell$と対をなす$W_\ell^*$を使って得られる.）をえらべば，$\Psi_\ell, \Psi_\ell^*$は(4.4), (4.4)$'$をみたす．従って，r成分戸田方程式の波動函数を与える．□

$\Psi_\ell^{(\infty)}, \Psi_\ell^{(0)}$は戸田方程式におけるSchlesinger変換というべきものだが，一般の波動函数$\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$に対してこのような離散変数を含む変換ができる訳ではない．上では，あくまで，2r成分KP方程式の解にparametrizeされた解のみ扱っている．ただ，例外的にr = 1（1成分理論）の場合には，sのshiftがちょうど2成分KPのSchlesinger変換の全体に一致している．その為，τ函数の導入や双線型化が円滑に行われる．

一般のr成分戸田方程式の解・波動函数に対しては，今のところ，τ函数の議論が余りうまく行っていない．勿論，定理4.3のように多成分KPの解でparametrizeされるものについては，多成分KPのτ函数を利用する議論が有効であるが，一般的に定理2.3で存在が保証される波動函数については，まだτ函数の導入のしかたはわかっていない．

注意．(4.7)の対応で得られる$\Psi_\ell^{(\infty)}, \Psi_\ell^{(0)}$の中には，すべてのsに対しては必ずしも定義されないものや，意味をもっても，対応する$W_0^{(0)}$（→ (2.2)）が可逆行列でないものが含まれる．

解釈を変えればこういう解も実は意味をもつと思われるのだが，無限格子を考える限りは排除しなければならない．2成分KP方程式の有理解や簡単なタイプのソリトン解はこれにより排除される．

§5. 或る種の特殊解の具体的な構成.

この節では，或る種のWronskianを用いてKP方程式の特殊解を構成する方法（[1]）のanalogyにより，戸田方程式の場合にも特殊解（ソリトン解を含む）が構成できることについて説明する．以下では簡単の為1成分の場合にのみ説明するが，多成分の場合も同様にできる．

まず次のような函数 $p_n(x)$, $p_n(y)$, $p_n(x,y)$ を導入する：

$$
(5.1)\quad \begin{cases} p_n(x) = \displaystyle\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots=n \\ \nu_1,\nu_2,\ldots\ \geq 0\text{：整数}}} \frac{x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots} & (n \geq 0), \\ p_n(y) = (\quad x \to y\ ) & (n \geq 0), \\ p_n(x;y) = \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} p_{m+n}(x)\, p_m(y) & (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}
$$

$p_n(x)$, $p_n(y)$ は多項式だが $p_n(x;y)$ は無限級数である．その収束条件を考えるには，次のように母函数に移って考えればよい：

$$
(5.2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\lambda^n = e^{\eta(x,\lambda)}, \quad \sum p_n(y)\lambda^{-n} = e^{\eta(y,\lambda^{-1})}, \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n(x;y)\lambda^n = e^{\eta(x,\lambda)+\eta(y,\lambda^{-1})}. \end{cases}
$$

(5.2)の各母函数をλの1変数Laurent級数と見て，収束域を考

えてみよう．Cauchy-Hadamard の判定条件により，$\eta(x,\lambda)$ は $|\lambda| < (\overline{\lim_\nu} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}})^{-1}$ で，また $\eta(y,\lambda^{-1})$ は $|\lambda| > \overline{\lim_\nu} |y_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ で，それぞれ広義一様絶対収束する．従って $\overline{\lim} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \cdot \overline{\lim} |y_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < 1$ ならば $e^{\eta(x,\lambda)+\eta(y,\lambda^{-1})}$ は円環領域 $\overline{\lim} |y_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < |\lambda| < (\overline{\lim} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}})^{-1}$ で正則函数を定める．特に $p_n(x;y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|\lambda|=\mathrm{cte}} e^{\eta(x,\lambda)+\eta(y,\lambda^{-1})} \lambda^{-n-1} d\lambda$（積分路はこの円環領域の中にとる.）が定まる．

しかし後に現れて来る $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n p_n(x,y)$ の形の級数を扱う為には，$p_n(x;y)$ に対する評価もこめてもう少し詳しく調べておく必要がある．これは上に述べたような Cauchy の積分定理などを用いて議論できる．ひとつの結果を与えよう：

__補題 5.1.__ (i) $\overline{\lim_\nu} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < \infty$ ならば任意の $r > \overline{\lim} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ に対して正定数 C が存在して

$$(5.3) \qquad p_n(|x_1|, |x_2|, \cdots) \le C r^n \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \cdots.$$

(ii) $\overline{\lim_\nu} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < \infty$, $\overline{\lim_\nu} |y_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < \infty$, $\overline{\lim} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \cdot \overline{\lim} |y_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < 1$ ならば級数

$$p_n(x;y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} p_{n+m}(x) p_m(y)$$

は絶対収束する．更に，

$$(5.4) \qquad r_1 > \overline{\lim} |x_\nu|^{\frac{1}{\nu}}, \quad r_2 > \overline{\lim} |y_\nu|^{\frac{1}{\nu}}, \quad r_1 r_2 < 1$$

をみたす正定数 r_1, r_2 を勝手に取り，(i) により対応する定数を C_1, C_2 とすれば，

$$(5.5) \qquad p_n(|x_1|, |x_2|, \cdots; |y_1|, |y_2|, \cdots) \le \sum_m p_{n+m}(|x_1|, |x_2|, \cdots) p_m(|y_1|, |y_2|, \cdots)$$
$$\le C_1 C_2 r_1^{\max(n,0)} r_2^{-\min(n,0)} / (1 - r_1 r_2)$$
$$(\text{for } n \in \mathbb{Z}). \ \square$$

__注意__ (i) は，$e^{\eta(x,\lambda)}$ が λ について $|\lambda| \le r^{-1}$ で有界正則なことと，

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|\lambda|=r^{-1}} e^{\eta(x,\lambda)} \lambda^{-n-1} d\lambda$$

とから直ちに従う．(ii)は(i)の評価を用いて $n \geq 0$, $n < 0$ に分けて考えればすぐ示せる．(例えば，$n \geq 0$ のときには

$$\sum_m p_{n+m}(|x_1|, |x_2|, \cdots) p_m(|y_1|, |y_2|, \cdots) = \sum_{m=0}^{\infty} (\cdots\cdots)$$
$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} C_1 r_1^{n+m} \cdot C_2 r_2^m = \frac{C_1 C_2 r_1^n}{1 - r_1 r_2} .)$$

補題の(5.5)の評価を用いれば直ちにわかるように，

(5.6) $\quad |c_n| \leq \mathrm{Const} \cdot R_1^{-\max(n,0)} R_2^{\min(n,0)} \quad$ ($n \in \mathbb{Z}$; R_1, R_2 は $R_1 > r_1$, $R_2 > r_2$ をみたす定数)

という形の不等式をみたす $c_n (n \in \mathbb{Z})$ に対して，級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n p_n(x; y)$ は (5.4)の形の (x, y)のなす領域で広義一様絶対収束する．$\square$

さて戸田方程式の(特殊)解の構成に進もう．我々は(1.3)の解 $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ を構成する．

N個の無限タテベクトル $\xi^{(j)} = (\xi_\nu^{(j)})_{\nu \in \mathbb{Z}\downarrow}$ $(j = 0, 1, \cdots, N-1)$ を用意する．これらに対して次の級数をつくる；

(5.7) $\quad \xi^{(j)}(s, x, y) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} p_{\nu - s}(x; y) \xi_\nu^{(j)} \quad (j = 0, \cdots, N-1).$

(この級数の収束条件については，上の注意で論じた通り．)

更に次の条件を課す：

(5.8) $\quad \det\left[\xi^{(j)}(s+i, x, y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1} \neq 0 \qquad \text{for any } s \in \mathbb{Z}.$

このような $\xi^{(j)}(s, x, y)$ $(j = 0, \cdots, N)$ に対して差分作用素

(5.9) $\quad W_N = e^{N\partial_s} + w_1 e^{(N-1)\partial_s} + \cdots + w_N$

を次の方程式により定める：

$$(5.10)\qquad W_N\, \xi^{(j)}(s,x,y) = 0 \qquad (j=0,\cdots,N-1).$$

これは $w_1,\cdots,w_N$ に対する1次方程式なのでCramerの公式により具体的に解ける．結果は； $k=0,1,\cdots,N-1$ に対して

$$(5.11)\qquad w_{N-k} = -\det\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \xi^{(0)}(s,x,y), & \cdots, & \xi^{(N-1)}(s,x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi^{(0)}(s+N,x,y), & \cdots, & \xi^{(N-1)}(s+N,x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi^{(0)}(s+N-1,x,y), & \cdots, & \xi^{(N-1)}(s+N-1,x,y) \end{bmatrix} & \begin{matrix} (0) \\ \vdots \\ (k) \\ \vdots \\ (N-1) \end{matrix} \end{array} \Big/ \det\left[\xi^{(j)}(s+i,x,y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1}$$

$$= -\frac{\det\left[\xi^{(j)}(s+i,x,y) : 第k行 \xrightarrow{\text{おきかえ}} \xi^{(j)}(s+N,x,y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1}}{\det\left[\xi^{(j)}(s+i,x,y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1}}.$$

ここで仮定(5.8)により，分母は消えない．しかも，特に

$$(5.12)\qquad w_N = (-)^N \det\left[\xi^{(j)}(s+i+1,x,y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1} \Big/ \det\left[\xi^{(j)}(s+i,x,y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1} \neq 0.$$

こうして定まる W_N に対して，求める解は次の形で与えられる：

定理5.2. $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ を

$$(5.13)\qquad \begin{cases} W^{(\infty)} = W_N e^{-N\partial_s} e^{\eta(y,e^{-\partial_s})}, \\ W^{(0)} = W_N e^{\eta(x,e^{\partial_s})} \end{cases}$$

により定義すると，これらは(1.3)をみたす．□

注意．更にτ函数 $\tau(s,x,y)$ ([4]) は (5.11) の分母に現れている行列式に一致する．□

この定理を示す為に，W_N が x,y についてみたす方程式を

導こう．その為に補題を2つ用意する．

補題5.3. $p_\nu(x;y)$ に対して次が成立する：

$$\frac{\partial p_\nu(x;y)}{\partial x_n} = p_{\nu-n}(x,y), \quad \frac{\partial p_\nu(x;y)}{\partial y_n} = p_{\nu+n}(x,y).$$

従ってまた，$\xi^{(j)}(s,x,y)$ に対して次が成立する：

$$(5.14) \qquad \frac{\partial \xi^{(j)}(s,x,y)}{\partial x_n} = \xi^{(j)}(s+n,x,y), \quad \frac{\partial \xi^{(j)}(s,x,y)}{\partial y_n} = \xi^{(j)}(s-n,x,y). \square$$

（これは母函数表示(5.2)を微分することによりすぐ示せる．）

補題5.4.（割算定理） 差分作用素Vが次の形をしているとする；

$$(5.15) \qquad V = v_0(s)e^{N\partial_s} + v_1(s)e^{(N-1)\partial_s} + \cdots + v_N(s), \quad v_0(s):\text{可逆}.$$

このとき，$U = \sum_{\ell \geq 0} u_\ell(s)e^{\ell\partial_s}$ という形の任意の差分作用素に対して次のようなQ，Rが一意的に存在する；

$$(5.16) \qquad \begin{cases} U = QV + R, \\ Q = \sum_{\ell \geq 0} q_\ell(s)e^{\ell\partial_s}, \quad R = \sum_{\ell=0}^{N-1} r_\ell(s)e^{\ell\partial_s}. \end{cases}$$

以上のことは，e^{∂_s} をすべて $e^{-\partial_s}$ とおきかえた設定に於ても同じ形で成立する．□
（即ち，e^{∂_s} の負巾からなる差分作用素の間で）

（実際に(5.17)を書き下してみれば，$v_0(s)$ の可逆性により，Q，Rの係数が一意的に定まってゆくことは容易に示せる．）

さて，これらを用いて議論を進める．

まず，(5.10)の両辺を x_n で微分する．そして(5.14)を用いると，

$$(5.17)\qquad \left(\frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s}\right)\xi^{(j)}(s,x,y) = 0. \quad (j=0,\cdots,N-1).$$

$\frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s}$ を補題(5.4)を用いて W_N で割算すると，[商Qを B_n と記す.]

$$\begin{cases} \frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s} = B_n W_N + R_n \\ B_n = (B_n)_+, \\ R_n = \sum_{\ell=0}^{N-1} r_\ell(s,x,y)\, e^{\ell\partial_s} \end{cases}$$

という B_n, R_n が存在する．<u>$R_n = 0$ となることを示そう．</u>

実際，(5.17) とあわせると

$$R_n \xi^{(j)}(s,x,y) = 0. \quad (j=0,\cdots,N-1)$$

これを r_ℓ についての1次方程式に書き直すと，

$$[r_0, r_1, \cdots, r_{N-1}]\left[\xi^{(j)}(s+i,x,y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1\ (i\downarrow, j\rightarrow)} = 0.$$

仮定(5.8)により $[r_0,\cdots,r_{N-1}] = 0$ でなければならない。

かくして，<u>次の方程式が示された：</u>

$$(5.18)\qquad \begin{cases} \frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s} = B_n W_N, \quad (n=1,2,\cdots), \\ B_n = (B_n)_+. \end{cases}$$

次に，(5.10) を y_n で微分し(5.14)を用いると，

$$(5.19)\qquad \left(\frac{\partial (W_N e^{-N\partial_s})}{\partial y_n} + (W_N e^{-N\partial_s})e^{-n\partial_s}\right)\xi^{(j)}(s+N,x,y) = 0. \ (j=0,\cdots,N-1$$

$W_N e^{-N\partial_s}$ には((5.12)に注意すると)補題5.4（但し，今度は e^{∂_s} の負巾からなる差分作用素の間の割算）が使える．これで割算して，

$$\begin{cases} \frac{\partial (W_N e^{-N\partial_s})}{\partial y_n} + (W_N e^{-N\partial_s})e^{-n\partial_s} = C_n W_N e^{-N\partial_s} + S_n, \\ C_n e^{-\partial_s} = (C_n e^{-\partial_s})_-, \quad S_n = \sum_{\ell=0}^{N-1} s_\ell(s,x,y)\, e^{-\ell\partial_s}. \end{cases}$$

という C_n, S_n が存在する．今度は $\underline{\underline{S_n = 0}}$ を示さねばならない，

(5.19) から，

$$S_n\, \xi^{(j)}(s+N, x, y) = 0 \qquad (j = 0, \cdots, N-1).$$

これを $s_0, \cdots, s_{N-1}$ に対する1次方程式に書直すと，

$$[s_{N-1}, s_{N-2}, \cdots, s_0]\left[\xi^{(j)}(s+1+i, x, y)\right]_{i,j=0,\cdots,N-1\ (i\downarrow, j\rightarrow)} = 0.$$

仮定 (5.8) により，$[s_{N-1}, \cdots, s_0] = 0$ でなければならない．

かくして次の方程式を得た：

$$(5.20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_N}{\partial y_n} + W_N e^{-n\partial_s} = C_n W_N, & (n = 1, 2, \cdots), \\ C_n e^{-\partial_s} = (C_n e^{-\partial_s})_- . \end{cases}$$

(5.18), (5.20) から (5.13) により定義される $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ が (1.3) をみたすことは明らかであろう．(1.3) の直後の注意により B_n, C_n が $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ により explicit に表示されることにも注意せよ．

——————以上により，定理5.2の検証が終わった．

注意．以上の議論は r 成分の場合も同様である．変更すべきところは，$\xi_\nu^{(j)}$ を $r\times r$ 行列にすること，$\xi_\nu^{(j)}(s, x, y)$ も $r\times r$ 行列で (α, β) 成分 $\xi^{(j)}(s, x, y)_{\alpha,\beta}$ を次のように与えることである；

$$\xi^{(j)}(s, x, y)_{\alpha\beta} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} p_{\nu-s}(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})\, \xi^{(j)}_{\nu,\alpha\beta}.$$

W_N の係数 $w_1, \cdots, w_N$ も $r\times r$ 行列とし，やはり (5.10) によって定める．

Cramerの公式を使って得られる$w_1,\cdots,w_N$の表示は(5.11)よりも複雑になる．そういう複雑化を別にすれば，あとの議論はほぼ同様である．$\square$

<u>注意</u>　Bessel函数$J_n(z)$の母函数表示

$$e^{\frac{t}{2}(\lambda-\lambda^{-1})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(t)\lambda^n$$

は(5.2)第3式の特別な場合になっている．従って，$\xi_\nu^{(j)}$が適当な条件をみたしていれば1次元戸田方程式((0.1)に於て$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\varphi=0$が成立するとき，$q(s,t)=\varphi(s,\frac{t}{2},\frac{-t}{2})$は1次元戸田方程式に従う.)の解でBessel函数を使って書けるものが得られることになる．(1次元戸田方程式(のhierarchy)の解を与えるような$\xi_\nu^{(j)}$の完全な特徴づけはまだよくわからない．(1982年7月10日現在)) $\square$

<u>最後にソリトン解について触れておく：</u>

(5.21)　$$\xi_\nu^{(j)} = \sum_{\ell=1}^{M} k_\ell^\nu a_{\ell j}, \qquad \left.\begin{array}{l} k_\ell \ (\ell=1,\cdots,M) \\ a_{\ell j} \ (\ell=1,\cdots,M,\ j=0,\cdots,N-1) \end{array}\right\}:\text{定数},$$

の場合には，

(5.22)　$$\xi^{(j)}(s,x,y) = \sum_{\ell=1}^{M} k_\ell^s e^{\eta(x,k_\ell)+\eta(y,k_\ell^{-1})} a_{\ell j}$$

となり，(5.11)の分子分母は指数函数の1次結合のWronskianの形になる．これがソリトンタイプの解を与える．特に$M=2N$で

$$\underset{\substack{\ell=1,\cdots,2N,\ (\downarrow) \\ j=0,\cdots,N-1\ (\rightarrow)}}{\left[a_{\ell j}\right]} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline -c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -c_N \end{array}\right] \\ \longleftarrow N \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow N \\ \\ \updownarrow N \end{array} \qquad c_1,\cdots,c_N:\text{定数}$$

の場合には適当な指数函数をくくり出すことにより，classicalなGram行列式型のソリトン解を得る．

References

1. M. Sato : Lectures at Tokyo University. (February · May, 1981; February · June, 1982), Lectures at Nagoya University. (February, 1982), etc.....

2. M. Sato : Soliton Equations as Dynamical Systems on a Infinite Dimensional Grassmann Manifolds, Sûri Kaiseki Kenkyûsho (RIMS, Kyoto University) Kôkyûroku 439 (1981).

3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa ; Transformation Groups for Soliton Equations I, II, Proc. Japan Acad. 57A (1981); III, VI, J. Phys. Soc. Japan, 50 (1981); IV, Physica 4D (1982); V, RIMS preprint 360.

4. K. Ueno, K. Takasaki : On the Toda lattice hierarchy, RIMS preprint 397 (1982).

戸田方程式に関しては戸田盛和先生の画期的な成果以来，逆散乱法，アーベル積分とヤコビの逆問題による方法，広田の直接法，表現論的方法，等々様々な方向から数学的研究が行われた．その為，引用すべき重要な文献だけでも極めて多数にのぼる．そこで本稿の性格にかんがみ，非可換戸田方程式に触れている比較的最近の下記の文献のみ掲げることでお許し願いたい．

5. A. G. Reĭman, M. A. Semenov-Tjan-Šanskiĭ, I. E. Frenkel: Graded Lie Algebras and Completely Integrable Dynamical Systems, Soviet Math. Dokl., 20 (1979), No. 4.

6. A. V. Mikhailov : The Reduction Problem and the Inverse Scattering Method, Physica 3D (1981) 1&2.

以上.