数理解析研究所講究録
第472巻 1982年 88-108



# ヤコビ・ペロンの算法
## 階直交多項式、一般化された戸田格子

名大・理　青本和彦 Aomoto Kazuhiko
名大・工　加藤芳文 Kato Yoshifumi

§0. 2階の線型差分作用素（ヤコビ行列）は連分展開と関連する．その極限関数をStieltjes表示すれば、密度がヤコビ行列のスペクトル密度を定義し，この密度に関するSchmidtの直交化関数系を用いてヤコビ行列を再現出来る．以上が差分作用素についての逆散乱問題の筋書きである．（これを連続化したものが古典的な小平−Titchmarshの定理であった．）[S1][S2][G][Ko].これは当然高階に拡張可能なものである．上記は又，関数のPadé近似にも深い関連がある[M].そのためのアルゴリズムがあるはずである．これが前世紀から

知られていた ヤコビ・ペロン算法 によって
なされる[B]. この論稿では これらのいくつか
の概念の関連を示し, さらに この変形
(Lax型で表示される) が 函度の線型
方程式に他ならぬ事を示す. 最後に周期的
な場合の簡単な実例を与える事にする.
なお, 広田良吾氏が最初 Soliton 解
を求められた時, Padé 近似の考えを
使われた様ですが, これとの関係は定かで
はない. 氏の方法は多変数の場合も
暗示しているように見える. 今後の問題
であろう([H]参照).

§1. Green 関数

M, N ≧ 0 を正整数として 差分系

$$(1)\quad -zu_i + \sum_{j=i-M}^{i+N} a_{ij} u_j = v_i \qquad -\infty < i < \infty, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

を考える. ここに 行列 $L = ((a_{ij}))$ は
M+N 階線型差分作用素を定義
する. 形式的に, (1) は

(2) $(\mathbb{L}-z)u = v$ on $l^2(-\infty,\infty)$

と書かれ，これが解ければ，形式的に

(3) $u=(\mathbb{L}-z)^{-1}v$

と書かれる．以下，次を仮定する．

(C1) $a_{i,i-M}\neq 0$，$a_{j,j+N}\neq 0$

$-\infty<i<\infty$，$-\infty<j<\infty$

(C2) $M',N'\geq 0$，且つ $M'+N'=M+N$ となる組 $(M',N')$ に対して，$\mathbb{C}$ のある領域の点 $z$ に対して，

(4) $(\mathbb{L}-z)u=0$

を満たす解で，次のような線型独立なものが，各々丁度 $M',N'$ 個存在する：

$$U^{(0)}=\{U_j^{(0)}\},\dots,U^{(M'-1)}=\{U_j^{(M'-1)}\}\in l^2[0,\infty)$$

$$U^{(M')}=\{U_j^{(M')}\},\dots,U^{(M'+N'-1)}\in l^2(-\infty,0]$$

（(C2)の條件は $-\infty,\infty$ における境界條件が極限点となる場合に相当する（[Ko] 参照）．）

この時，

補題1. (3)は Green 関数 $G_{ij}(z)$ を用いて次のように表示される.

$$(5)\qquad u_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{ij}(z) v_j$$

ここに $G_{ij}$ は,

$$(6)\qquad G_{ij}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\sigma=0}^{M-1} (-1)^{\sigma+1} U_i^{(\sigma)} \begin{bmatrix} 0\ 1 \cdots \sigma-1, \sigma+1, \cdots, M+N-1 \\ j-M+1, j-M+2, \cdots\cdots, j+N-1 \end{bmatrix}}{a_{j,j-M} \begin{bmatrix} 0\ 1\ 2 \cdots\cdots M+N-1 \\ j-M, j-M+1, \cdots\cdots j+N-1 \end{bmatrix}} & i \geqq j \\[2ex] = \dfrac{\sum_{\sigma=0}^{N-1} (-1)^{M+\sigma} U_i^{(\sigma+M)} \begin{bmatrix} 0\ 1 \cdots M+\sigma-1, M+\sigma+1, \cdots, M+N-1 \\ j-M+1, j-M+2, \cdots\cdots, j+N-1 \end{bmatrix}}{a_{j,j-M} \begin{bmatrix} 0\ 1\ 2 \cdots\cdots M+N-1 \\ j-M, j-M+1, \cdots\cdots, j+N-1 \end{bmatrix}} & i < j \end{cases}$$

で与えられる. 但し

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} U_{j_1}^{(\alpha_1)} & \cdots & U_{j_p}^{(\alpha_1)} \\ \vdots & & \\ U_{j_1}^{(\alpha_p)} & \cdots & U_{j_p}^{(\alpha_p)} \end{vmatrix}, \qquad 1 \leqq p \leqq M+N$$

によって定義するものとする．

以下簡単のために $M=M'=1, N=N'=2$ の場合に話を限る． (6) は次の形となる．

$$(6)' \quad G_{ij}(z) = \frac{-U_i^{(0)}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ j & j+1 \end{bmatrix}}{a_{j\,j-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ j-1 & j & j+1 \end{bmatrix}} \qquad i \geqq j,$$

$$= \frac{-U_i^{(1)}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ j & j+1 \end{bmatrix} + U_i^{(2)}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ j & j+1 \end{bmatrix}}{a_{j\,j-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ j-1 & j & j+1 \end{bmatrix}} \qquad i<j$$

次節で $l^2[0,\infty)$ 上，左端が Dirichlet 条件を取り扱う．

§2. $\mathbb{C}$ の閉集合 $\Gamma$ 上に線型独立な2個の測度 $d\mu_0, d\mu_1$ が与えられているとする．これらの Stieltjes 変換

$$(1) \qquad \omega_0(z) = \int_\Gamma \frac{d\mu_0(\zeta)}{z-\zeta}, \quad \omega_1(z) = \int_\Gamma \frac{d\mu_1(\zeta)}{z-\zeta}$$

$\omega_0, \omega_1$ は $z=\infty$ において次のような Laurent 展開を持つものとする．

$$(2) \qquad \omega_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{0,\nu}\, z^{-\nu-1}, \quad \omega_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{1,\nu}\, z^{-\nu-1}$$

但し

(3) $$c_{\nu,0} = \int_{\Gamma} \zeta^{\nu} \mu_0(d\zeta), \quad c_{\nu,1} = \int_{\Gamma} \zeta^{\nu} \mu_1(d\zeta)$$

これに対して次の条件をおく。

(C 3)

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{2k-1,0} \\ \vdots & & \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{3k-2,0} \\ c_{0,1} & & c_{2k-1,1} \\ \vdots & & \\ c_{k-1,1} & \cdots & c_{3k-2,1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{2k,0} \\ \vdots & & \\ c_{k,0} & \cdots & c_{3k,0} \\ c_{0,1} & \cdots & c_{2k,1} \\ \vdots & & \\ c_{k-1,1} & \cdots & c_{3k-1,1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(以下この条件を満たすとき $\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta)$ は正則性をみたすと云う)

(4) $$\omega_0 = \frac{u_1}{w_1}, \quad \omega_1 = \frac{v_1}{w_1}$$

(但し $u_1 = 1$ とする)

とおくときは

$$(5)_0 \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots \\ w_1 = b_{-1} z + b_0 z + \dfrac{b_1}{z} + \dfrac{b_2}{z^2} + \cdots \end{cases}$$

の形に書けるが　これに対して　$\alpha_2, \beta_2, \beta_2'$ が存在して

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{v_1}{u_1} = \alpha_2 + \dfrac{u_2}{w_2} \\ \dfrac{w_1}{u_1} = \beta_2 z + \beta_2' + \dfrac{v_2}{w_2} \end{cases}$$

$$\frac{u_2}{w_2} = O(z^{-1}), \quad \frac{v_2}{w_2} = O(z^{-1})$$

と書ける．これを　matrix 表示すれば

$$(7) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \alpha_2 \\ & 1 & \beta_2 z + \beta_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

しかも　$u_2, v_2, w_2$　は　(5) と同じ形で書ける．以下これが　続行可能とすれば

$$(8) \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \alpha_{n+1} \\ & 1 & \beta_{n+1} z + \beta_{n+1}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

従て　$\omega_0 = v_0/u_0$, $\omega_1 = w_0/u_0$ とおけば,

$$(9)\qquad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n(z) & p_{n+1}(z) & p_{n+2}(z) \\ p'_n(z) & p'_{n+1}(z) & p'_{n+2}(z) \\ p''_n(z) & p''_{n+1}(z) & p'_{n+2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

と表示される. 但し $p_n(z)$, $p'_n(z)$, $p''_n(z)$ は次数が各々 $n-3$, $n-3$, $n-4$ 次の多項式であり, 右辺の行列式は 1 である.

$$(10)\qquad A_n(z) = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} & p_{n+2} \\ p'_n & p'_{n+1} & p'_{n+2} \\ p''_n & p''_{n+1} & p''_{n+2} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}[z])$$

よって

$$(11)\qquad {}^tA_n(z)^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_n(z) & \tilde{q}_n(z) & \tilde{r}_n(z) \\ \tilde{p}'_n(z) & \tilde{q}'_n(z) & \tilde{r}'_n(z) \\ \tilde{p}''_n(z) & \tilde{q}''_n(z) & \tilde{r}''_n(z) \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}[z])$$

とおけば　$\tilde{p}_n$, $\tilde{q}_n$, $\tilde{r}_n$, $\tilde{p}'_n$, $\tilde{q}'_n$, $\tilde{r}'_n$, $\tilde{p}''_n$, $\tilde{q}''_n$, $\tilde{r}''_n$ は多項式であり,

$$\deg \tilde{p}_{2k} = k-2,\ \deg \tilde{p}'_{2k} = k-1,\ \deg \tilde{p}''_{2k} = k-1,$$
$$\deg \tilde{p}_{2k+1} = k-1,\ \deg \tilde{p}'_{2k+1} = k,\ \deg \tilde{p}''_{2k+1} = k-1$$

以上の算法はヤコビ・ペロンの算法に他ならない[B]参.

命題 2.　条件(C3)の下で,

ヤコビ・ペロンの算法はどこまでも続行可能であり，次のPadé近似が成り立つ.

(i)

$$(12)\quad \begin{cases} \omega_0 - \dfrac{P'_{2k}}{P_{2k}} = O(z^{-3k+3}) \\[2ex] \omega_1 - \dfrac{P''_{2k}}{P_{2k}} = O(z^{-3k+4}) \end{cases} \qquad k \geqq 1$$

$$(13)\quad \begin{cases} \omega_0 - \dfrac{P'_{2k+1}}{P_{2k+1}} = O(z^{-3k+2}) \\[2ex] \omega_1 - \dfrac{P''_{2k+1}}{P_{2k+1}} = O(z^{-3k+2}) \end{cases} \qquad k \geqq 1$$

(ii) $V_n = \tilde{P}_n + \tilde{P}'_n \omega_0 + \tilde{P}''_n \omega_1$ と

おけば

$$(14)\quad V_{2k} = O(z^{-2k}),\ V_{2k+1} = O(z^{-2k-1})$$

しかも degree を指定された多項式の組 $(P_n, P'_n, P''_n)$ 又は $(\tilde{P}_n, \tilde{P}'_n, \tilde{P}''_n)$ に対して (13),(13),(14) を満たすものはスカラー倍を除いて一意である．この意味で関数の組 $(1, \omega_0, \omega_1)$ は K. Mahler の意味で完全(perfect)になっている([Ma]参照).

しかも $\beta_n \neq 0$.

<u>命題3.</u> $p_n$, $p_n'$, $p_n''$ は 次の漸化式(差分系)をみたす:

$$\text{(15)}\quad \begin{cases} p_{n+3} = p_n + \alpha_{n+1} p_{n+1} + (\beta_{n+1} z + \beta'_{n+1}) p_{n+2} \\ p'_{n+3} = p'_n + \alpha_{n+1} p'_{n+1} + (\beta_{n+1} z + \beta'_{n+1}) p'_{n+2} \\ p''_{n+3} = p''_n + \alpha_{n+1} p''_{n+1} + (\beta_{n+1} z + \beta'_{n+1}) p''_{n+2} \end{cases}$$

或いは

$$z p_{n+2} = -\frac{p_n}{\beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} p_{n+1} - \frac{\beta'_{n+1}}{\beta_{n+1}} p_{n+2} + \frac{p_{n+3}}{\beta_{n+1}}$$

すなわち <u>$z$倍作用素</u> は 次の行列表示を与える:

(16)

$$z(p_3, p_4, p_5, p_6, \cdots) = (p_3, p_4, p_5, p_6, \cdots) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2'}{\beta_2} & -\frac{\alpha_3}{\beta_3} & -\frac{1}{\beta_4} & 0 & & \\ \frac{1}{\beta_2} & -\frac{\beta_3'}{\beta_3} & -\frac{\alpha_4}{\beta_4} & -\frac{1}{\beta_5} & 0 & \ddots \\ 0 & \frac{1}{\beta_3} & -\frac{\beta_4'}{\beta_4} & -\frac{\alpha_5}{\beta_5} & \ddots & \ddots \\ & 0 & \frac{1}{\beta_4} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & \end{bmatrix}$$

以下右辺の行列を $J$ とおく. 一方,

— $\tilde{p}_n$, $\tilde{p}_n'$, $\tilde{p}_n''$ は 双対

の漸化式を満たす：

(17)
$$z\begin{bmatrix}(\tilde{p}'_1 & \tilde{p}''_1)\\(\tilde{p}'_2 & \tilde{p}''_2)\\(\tilde{p}'_3 & \tilde{p}''_3)\\(\tilde{p}'_4 & \tilde{p}''_4)\\ \vdots & \end{bmatrix}=J\begin{bmatrix}(\tilde{p}'_1 & \tilde{p}''_1)\\(\tilde{p}'_2 & \tilde{p}''_2)\\(\tilde{p}'_3 & \tilde{p}''_3)\\(\tilde{p}'_4 & \tilde{p}''_4)\\ \vdots & \end{bmatrix}$$

すなわち，$e_{n-3}=p_n$ $(n\geqq 3)$ と $e^*_{n-1}=(\tilde{p}'_n,\ \tilde{p}''_n)^{(n\geqq 1)}$ とは双対基底を与える．実際次が成り立つ：

<u>命題4.</u> $n\geqq 1$ において，

(18)
$$\tilde{p}_n(z)=\int_\Gamma \frac{\tilde{p}'_n(\zeta)-\tilde{p}'_n(z)}{\zeta-z}\mu_0(d\zeta)+\int_\Gamma \frac{\tilde{p}''_n(\zeta)-\tilde{p}''_n(z)}{\zeta-z}\mu_1(d\zeta)$$

(19)
$$V_n(z)=\int_\Gamma \frac{\tilde{p}'_n(\zeta)\mu_0(d\zeta)}{\zeta-z}+\int_\Gamma \frac{\tilde{p}''_n(\zeta)\mu_1(d\zeta)}{\zeta-z}$$

且つ <u>陪直交関係</u>

(20)
$$\int_\Gamma p_n(\zeta)\left\{\tilde{p}'_m(\zeta)\mu_0(d\zeta)+\tilde{p}''_m(\zeta)\mu_1(d\zeta)\right\}=\delta_{n,m+2}$$

$n\geqq 3,\ m\geqq 1$.

従って

(21) $\left(e_m, (J-z)^{-1} e_n^*\right) =$

$$= \int_{\Gamma} \frac{p_{m+3}(\zeta)\left(\tilde{p}'_{n+1}(\zeta)\mu_0(d\zeta) + \tilde{p}''_{n+1}(\zeta)\mu_1(d\zeta)\right)}{\zeta - z}$$

と与えられる，$m, n \geqq 0$．或いは，

(22) $$\begin{cases} p_{n+3}({}^tJ)e_0 = e_n, \\ \tilde{p}'_{n+1}(J)e_0^* + \tilde{p}''_{n+1}(J)e_1^* = e_n^* \end{cases}$$

が成立する．すなわち 行列 $J$ は
$\omega_0 = (e_0, (J-z)^{-1}e_0^*)$, $\omega_1 = (e_0, (J-z)^{-1}e_1^*)$ のみによって
一意に決定されている．又逆に
これから スペクトル密度 $\mu_0(d\zeta)$, $\mu_1(d\zeta)$
が 公式 (1) によって 決まる．これが
今の場合の 逆散乱問題 及び
スペクトル分解 を与える 道筋 である．

問題 A．(12), (13) によって $p_n, p'_n, p''_n$
を求めた場合，いかなる $z \in \mathbb{C}$ に対して

(23) $$\omega_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{p'_n}{p_n}, \quad \omega_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{p''_n}{p_n}$$

が存在するか？ この収束域と $J$ のレゾル

ベント集合とはいかなる関係にあるか？ 後にひとつの実例を与える事にする（[Me] 参照）.

## §3. 周期的な行列の場合

以下，§1の行列 $L$ は $n$-周期条件を満たすものとする（$M=1$；$N=2$ は仮定する）

(1) $$a_{i,j} = a_{i+n,j+n}, \quad -\infty < i, j < \infty$$

標準的な方法により，$n$ 次行列 $L_h$ を

(2) $$L_h = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & 0 & \cdots & a_{0\,n-1}h^{-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-2,n}h & & \ddots & \ddots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ a_{n-1\,n}h, & a_{n-1,n+1}h & 0 & \cdots\ 0 & a_{n-1\,n-2}, & a_{n-1\,n-1} \end{bmatrix}$$

とおいて（[Mo and Mu] 参照），

(3) $$\det(-x + L_h) = 0$$

の根を $h, h', h''$ をおく.

今 $|h|<1$, $|h'|>1$, $|h''|>1$ とする.

このとき §1,(4) の解で次の条件をみたす

ものが存在する：

$$(4)\quad \begin{cases} U^{(0)}=\{U_j^{(0)}\} & U_{j+n}^{(0)}=h\,U_j^{(0)}\ , \\ U^{(1)}=\{U_j^{(1)}\} & U_{j+n}^{(1)}=h'\,U_j^{(1)}\ , \\ U_j^{(2)}=\{U_j^{(2)}\} & U_{j+n}^{(2)}=h''\,U_j^{(2)} \end{cases}$$

すなわち　$U^{(0)}\in l^2[0,\infty)$; $U^{(1)}, U^{(2)}\in l^2(-\infty,0]$

これより　§1，公式(6)′ によって　$G_{ij}(z)$ が得られる．

次に　$|h|<1$, $|h'|<1$, $|h''|>1$ の場合を考える．このとき　$U^{(0)}, U^{(1)}\in l^2[0,\infty)$，$U^{(2)}\in l^2(-\infty,0]$ だから　§1，公式(6)により

$$(5)\quad G_{ij}(z)=\frac{-U_i^{(0)}\begin{bmatrix}1 & 2\\ j & j+1\end{bmatrix}+U_i^{(1)}\begin{bmatrix}0 & 2\\ j & j+1\end{bmatrix}}{a_{j,j-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ j-1 & j & j+1\end{bmatrix}}\qquad i\geq j$$

$$=\frac{U_i^{(2)}\begin{bmatrix}0 & 1\\ j & j+1\end{bmatrix}}{a_{j,j-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ j-1 & j & j+1\end{bmatrix}}\qquad i<j$$

$h\,h'\,h''=1$ だから　これ以外の可能性はない．

(4)の公式を使って　$G_{ij}(z)$ は簡単になる．

$G_{ij}(z)$ は $z$ の代数関数である．実際，

$|h|=1$ のとき

$$\tilde{u}_i(h) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_{i+n\nu} h^{\nu} \qquad 0 \leqq i \leqq n-1 \tag{6}$$

と定義すれば，$|h|=1$ 上の $n$ 個の関数系が得られ，行列 $\mathbb{L}$ は これらについて，掛け算の行列作用素

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0(h) \\ \tilde{u}_1(h) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}(h) \end{pmatrix} \longrightarrow L_h \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(h) \\ \tilde{u}_1(h) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}(h) \end{pmatrix} \tag{7}$$

とも見做せる．従って Green 関数は $(-z+L_h)^{-1}$ に等しい．これを用いてスペクトル(密度)が計算される．その結果，$\mathbb{L}$ のスペクトルは Riemann 面 ((3) によって定義された) $\mathfrak{L}$ の中で

$$\Gamma : |h|=1 \tag{8}$$

と一致する事が証明される．その詳細は省く．$h$ は $z$ の 代数関数であるが，$\mathfrak{L}$ が さらに Galois 被覆であるとする．$n$ が偶数ならば，$h$ は次の形に表示される：

(9) $$h = -\varphi(z) + \sqrt[3]{1-\varphi(z)^3}$$ （戸田曲線）

（ここに $\varphi$ は $\frac{n}{2}$ 次多項式）特に $n=2$ ならば、

(10) $$h = -z + \sqrt[3]{1-z^3}$$

$|h|<1$ なる範囲では

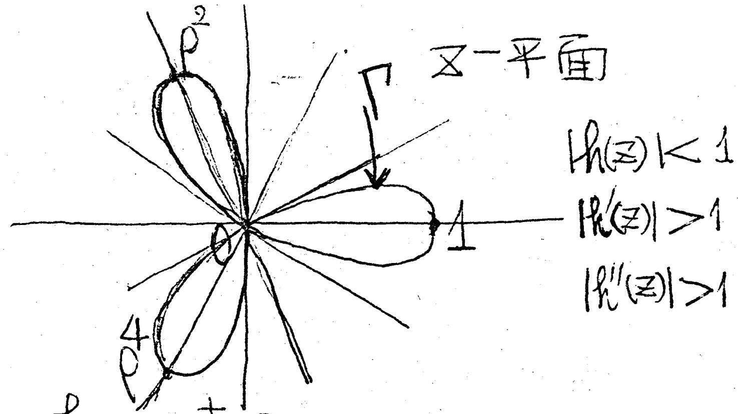
(11) $$\begin{cases} U_j^{(0)} = O(z^{-j-1}) \\ U_j^{(0)} = V_{j+1} = \tilde{P}_{j+1}(z) + U_0^{(0)}\tilde{P}'_{j+1}(z) + U_1^{(0)}\tilde{P}''_{j+1}(z) \end{cases}$$

となっており、対応するヤコビ行列 $J$ は

(12) $$(\rho^2-1)\cdot J = \begin{bmatrix} h'(w), & \rho^2 h'(w)h''(w), & -1 & 0 & \\ 1 & -h'(w) & , -\rho^2 h'(w)h(w), & \rho^2 & \ddots \\ 0 & -\rho^2 & , & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\rho = e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad w \in \mathbb{C}$$

なお $|h|=1$ なる軌跡を $z$-平面で表示すれば下図のような概略となる。




## §4. Lax 表示

§2において 陪直交基底 $\{e_n\}$, $\{e^*_m\}$ を定義した. これに 順序 を 導入する：

$$(1)\quad \begin{array}{l} e_0 < e_1 < e_2 < e_3 < \cdots \\ e^*_0 < e^*_1 < e^*_2 < e^*_3 < \cdots \end{array}$$

すると, 作用素 $A$ に対して $A^{(+)}, A^{(-)}$ が 次のように 定義出来る

$$(2)\quad (e_n, A^{(+)} e^*_m) = \begin{cases} (e_n, A e^*_m) & m > n \\ \frac{1}{2}(e_n, A e^*_n) & m = n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

$$(3)\quad A^{(-)} = A - A^{(+)},$$

この時 次の一般的事実が成り立つ.

<u>命題5.</u> $J$ が 時間 $t$ に 依存 しているものとし,

(4) $$\dot{J} = [J, f(t,J)^{(+)} - f(t,J)^{(-)}]$$

を満たすとする. この時 $J$ のスペクトル密度 $\mu_0(d\zeta)$, $\mu_1(d\zeta)$ は線型方程式

(5) $$\frac{d}{dt}(\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta)) = f(t,\zeta)\,(\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta))$$

を満たす. 又逆も成り立つ.

この命題は(作用素の)Lax 定式化の普遍的特徴を表わしている([A], [Ka] 参照). これがいかなる意味で一般化出来るかは又別の機会にゆずりたい.

文献

[$S_t$] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, A.M.S., 1932.

[$S_z$] G. Szegö, Orthogonal polynomials, A.M.S. 1959.

[G] F. R. Gantmacher and M. G. Krein Oscillation matrices and kernels and small vibrations of dynamical systems, Moscow, 1959.

[Ko] K. Kodaira, On ordinary differential equations of any order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer. J. Math., 72(1950), 502–544.

[B] L. Bernstein, The Jacobi–Perron algorithms its theory and application, Springer Lec. Notes 207(1971)

[H] R. Hirota, Direct methods in Soliton theory, Current Topics in Physics, Springer Verlag, Vol. 17 (1980).

[Ma] K. Mahler, Zur Approximationen der Exponentialfunktion und des Logarithms, I, II Crelle J. 166(1932), 118–136

——, Lectures on transcendental numbers, Springer Lec. Notes 546 (1976)

[Me] S.N. Mergelyan, Uniform approximation of functions of complex variables, Usphi, Mat. Nauk 7(1952), 31–122

[Mo] P. Van Moerbeke and D. Mumford, The spectrum of difference operaters and algebraic curves, Acta. Math. Vol. 143(1979)

93–154

[A] K. Aomoto Lax equation and the spectral density of Jacobi matrices for orthogonal polynomials, (preprint 1981).

[Ka] Y. Kato On the spectral density of periodic Jacobi matrices, to appear in World Sci. Pub., 1982.

[Be, 2] J.M. Berezanski, Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operaters, Transla. 17 (1968)

[Mi] H. Minkowski, Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta Math. Bd 26 (1902), 333–351.

[Mc] H.P. Mckean, Boussinesq's equation on the circle, Courant Inst. of Math. Sci., 1980.

[Ch] G.V. Chudonovsky, The inverse scattering problem and applications to arithmetics, Lec. Notes in Physics, 120 (Springer 1980)

なお，竹中茂氏，渡辺敏弘氏には有益な情報をいただいた.

93–154

[A] K. Aomoto Lax equation and the spectral density of Jacobi matrices for orthogonal polynomials, (preprint 1981).

[Ka] Y. Kato On the spectral density of periodic Jacobi matrices, to appear in World Sci. Pub., 1982.

[Be, 2] J.M. Berezanski, Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operaters, Transla. 17 (1968)

[Mi] H. Minkowski, Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta. Math. Bd 26 (1902), 333–351.

[F] H.P. Mckean, Boussinesq's equation on the circle, Courant Inst. of Math. Sci., 1980.

[Ch] G.V. Chudonovsky, The inverse scattering problem and applications to arithmetics, Lec. Notes in Physics, 120 (Springer 1980)

なお，竹中茂氏，渡辺敏弘氏には有役な情報をいただいた．