数理解析研究所講究録
第 472 巻 1982 年 136-142

Discretization of soliton equations

京大 数理研 三輪 哲二
Miwa Tetsuji
神保 道夫
Jimbo Michio
教養 伊達 悦朗
Date Etsuro

ソリトン方程式を、N−ソリトン解を持つという性質を保って、discrete化するという問題は、種々の立場から扱われている。このノートでは、そのうちの一つである広田氏の結果[1)]、及びそれに続く三輪の結果[2)]を一般化した、一つの方法について述べる。詳細については、我々のプレプリント（RIMS. 401, 403, 4　, 4　, 4　）にゆずることにして、以下では、その概略について述べる。

我々は、以前の論文[3)]において、free fermion の言葉を援用して、（continuous な）ソリトン方程式の解の変換群を考察した。ソリトン方程式を扱う方法として、二つの主要な方法が知られている。一つは、線型化（ソリトン方程式を、線型方程式系の可積分条件に表わすこと）であり、もう一つは、双線型化（従属変数の変換により、方程式を双線型な形に表わすこと）である。我々の（continuous な場合の）

考察の基礎となったのは、線型方程式系の解（wave function）Bが、双線型方程式の解（τ-函数，広田の変数）が、クリフォード群の元を時間発展させたものの、真空期待値の形に表わされるということであった。この事実は又、τ-函数同志、あるいはτ-函数とwave functionがみたす、bilinear identity と呼ぶ、関係式の帰結であった。我々のdiscretizationは、このbilinear identityを出発点として行われる。free fermionの言葉でいえば、時間発展をとりかえることにあたる（continuousな場合のexponential function $\exp(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j)$ を rational function $(1-ak)^{-l}(1-bk)^{-m}\cdots$ ，a.b：パラメーター，$l.\ m, \cdots, \in \mathbb{Z}$ にする）。従って，解の変換群は不変である。

nonlinear Schrödinger 方程式

$$i q_t + q_{xx} - 2 q^* q^2 = 0$$
$$-i q^*_t + q^*_{xx} - 2 q^{*2} q = 0$$

を例にして、もう少し詳しく述べよう．
この方程式は，2成分KP hierarchy のreductionの一つである．2成分KP hierarchyのreductionに対するbilinear identityは次のものがある．

$$0=\oint\frac{dk}{2\pi ik}\Big[(-)^{l_2+l_2'+1}k^{s+l_1-l_1'}e^{\xi(x-x',k)}\tau_{l_1,l_2'+1}(x-y-\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times\tau_{l_1'+1,l_2'}(x'-y'+\epsilon(k^{-1}))+k^{s+l_2-l_2'}e^{\xi(y-y',k)}\tau_{l_1+1,l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times\tau_{l_1',l_2'+1}(x'-y'-\epsilon(k^{-1}))\Big],\qquad s\geq 0,\qquad s+l_1+l_2\geq l_1'+l_2',$$

$$p^s w^{(\alpha)}_{l_1+1,l_2+1}(x-y;p)\tau_{l_1',l_2'}(x'-y')e^{\xi(y-y',p)}$$

$$=\oint\frac{dk}{2\pi ik}\Big[(-)^{l_2+l_2'+1}k^{s+l_1-l_1'}e^{\xi(x-x',k)}\tau_{l_1,l_2+1}(x-y-\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times w^{(\alpha)}_{l_1'+1,l_2'}(x'-y'+\epsilon(k^{-1});p)+\frac{k}{k-p}k^{s+l_2-l_2'}e^{\xi(y-y',k)}\tau_{l_1+1,l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times w^{(\alpha)}_{l_1',l_2'+1}(x'-y'-\epsilon(k^{-1});p)\Big],\qquad s\geq 0,\qquad s+l_1+l_2\geq -1+l_1'+l_2'.$$

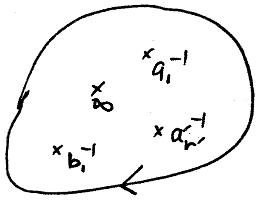
ここで．$\tau_{l_1,l_2}(x)$, $l_1, l_2\in\mathbb{Z}$ はτ一函数，$w^{(\alpha)}_{l_1 l_2}(x;k)$ $\alpha=1,2$, $l_1,l_2\in\mathbb{Z}$ は wave function である．この bilinear identity は任意の x, x', y, y', $x=(x_1,x_2,\cdots)$ について成り立つ．更に．上の積分路は．$\oint\frac{dk}{2\pi ik}=1$ となるような $k=\infty$ のまわりの contour であり．

$\xi(x,k)=\sum_{j=1}^{\infty}x_jk^j$, $\quad\epsilon(a)=(a,\frac{1}{2}a^2,\frac{1}{3}a^3,\cdots)$ である．

この identity で

$$x-x' = \sum_{i=1}^{r} \epsilon(a_i) - \sum_{j=1}^{r'} \epsilon(a_j'), \quad y-y' = \sum_{i=1}^{t} \epsilon(b_i) - \sum_{j=1}^{t'} \epsilon(b_j'),$$

a_i, a_j', b_i, b_j' は，その逆数が，上の積分路の内部にあるような数，とおけば，



$$e^{\xi(\epsilon(a),k)} = (1-ak)^{-1}$$

に注意して，

$$\tau_{\ell_1\ell_2}(n_1, n_2, \cdots, n_1', n_2', \cdots, m_1, m_2, \cdots, m_1', m_2' \cdots)$$

$$= \tau_{\ell_1\ell_2}(x-y+n_1\epsilon(a_1)+n_2\epsilon(a_2)+\cdots+n_1'\epsilon(a_1')+n_2'\epsilon(a_2')+\cdots)$$

$$w^{(\infty)}_{\ell_1\ell_2}(n_1, n_2, \cdots, n_1', n_2', \cdots, m_1, m_2, \cdots, m_1', m_2', \cdots)$$

$$= w^{(\infty)}_{\ell_1\ell_2}(x-y+n_1\epsilon(a_1)+n_2\epsilon(a_2)+\cdots \quad ; k)$$

に対する方程式が得られる。

この操作は，KP hierarchy を扱う際に用いる free fermion $\psi(k)$ $\psi^*(k)$ の時間発展を，continuous な場合には，

$$\psi(k) \longmapsto e^{\xi(x,k)}\psi(k), \quad \psi^*(k) \mapsto e^{-\xi(x,k)}\psi^*(k)$$

であったものを

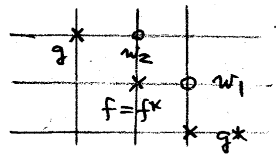
$$\psi(k) \longmapsto \frac{(1-a_1'k)^{n_1'}\cdots}{(1-a_1k)^{n_1}\cdots}\,\frac{(1-b_1'k)^{m_1'}\cdots}{(1-b_1k)^{m_1}\cdots}\,\psi(k)$$

$$\psi^*(k) \longmapsto \frac{(1-a_1k)^{n_1}\cdots}{(1-a_1'k)^{n_1'}\cdots}\,\frac{(1-b_1k)^{m_1}}{(1-b_1'k)^{m_1'}}\,\psi^*(k)$$

としたことにあたる.（r, r', t, t', a_i, a_j', b_i, b_j' を任意に動かすことにより．得られる方程式全体は．元の bilinear identity と同値になる）

$$f^* = f = \tau_{l_1 l_2}\ ,\quad g^* = \tau_{l_1+1, l_2-1}\ ,\quad g = \tau_{l_1-1, l_2+1}$$

$$w_1 = w^{(\alpha)}_{l_1+1, l_2}\ ,\quad w_2 = w^{(\alpha)}_{l_1, l_2+1}$$



なる．組み合わせで．パラメーターを高々2個 (a, b) 含む方程式を．とり出せば、例えば．次の式が得られる．

$$f(1,0)f(0,1) - f(11)f(00) - ab\, g^*(11)g(00) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} v_1(-1) \\ v_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \mathfrak{g}^*(0)\mathfrak{g}(-1) - a\hat{k} + 1 & a\mathfrak{g}^*(0) \\ a\mathfrak{g}(-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix},$$

$$f(n,m) = f(x-y+n\epsilon(a)+m\epsilon(b)),\ \text{etc.}$$

$$v_i = \frac{w_i}{f}\ ,\quad \mathfrak{g} = \frac{g}{f}\ ,\quad \mathfrak{g}^* = \frac{g^*}{f}\ .$$

前者の式が．nonlinear Schrödinger 方程式の．双線型化の形での discretization で．後者が．線型方程式の discretization である．従属変数 $\mathfrak{g}$ での nonlinear Schrödinger 方程式の discretization は．後者の可積分条件として与えられ．

$$(1+ab\,\xi^*(1,1)\,\xi(0,0))\,(a\,\xi(0,1)-b\,\xi(1,0)) = (a-b)\,\xi(0,0)$$

$$(1+ab\,\xi^*(1,1)\,\xi(0,0))\,(a\,\xi^*(1,0)-b\,\xi^*(0,1)) = (a-b)\,\xi^*(1,1)$$

となる。

$a, b \to 0$ とすることにより、continuous な双線型方程式、線型方程式、非線型方程式が回復される。

$$D_1^2 f\cdot f + 2g^*\cdot g = 0,$$

$$\partial_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -\xi^* \\ -\xi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-\xi^*\xi & -k\xi^*-\partial_1\xi^* \\ -k\xi+\partial_1\xi & \xi^*\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2\xi + \partial_1^2\xi - 2\xi^*\xi^2 = 0$$

$$-\partial_2\xi^* + \partial_1^2\xi^* - 2\xi^{*2}\xi = 0 \qquad x_2 = -it.$$

discrete 化した nonlinear Schrödinger 方程式のソリトン解は、上に述べた時間発展の取り扱いを考慮すれば、continuous な場合の式から容易に得られる。

ここであげた以外の $\tau_{l_1 l_2}$ の組みあわせから得られる。ソリトン方程式、KP 以外の hierarchy のソリトン方程式については、プレプリントを参照して下さい。

References

1. R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3785
2. T. Miwa, Proc. Japan Acad. **58** A (1982). 9.
3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa,
   J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 3806, 3813
   Physica **4** D (1982) 343
   RIMS preprint 394.