数理解析研究所講究録
第 473 巻 1982 年 71-78

Automorphisms of Polynomial and Powerseries Rings

コーネル大　M.E.スウィドラー（M. E. Sweedler）

数年間、私はJacobian conjectureに興味を持っていた。この予想は次の様なものである。 Aを標数0の体上の$n(<\infty)$変数多項式環$F: A \to A$を代数射としたとき

FはAの自己同形射$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $|J(F)|$は零でない基礎体の元。

$|J(F)|$はヤコビアン行列の行列式であり、ヤコビアン行列は、$F(X_j)=F_j(X_1, \cdots, X_n)$のとき、各成分が$A$の元である下記の$n \times n$行列をいう。

$J(F)=\left(\frac{\partial}{\partial X_i}(F_j)\right)$ よって、$|J(F)| \in A$。

Fが自己同形射のときに、$|J(F)|$が零でない基礎体の元であることは簡単に証明できる。 よって、Jacobian conjectureは"$\Leftarrow$"の向きを示すことであり、それが前に"$\overset{?}{\Leftarrow}$"と書いた理由である。 1変数の場合には簡単に証明できるが、2変数以上の場合にはまだ知られていない！ Aの可逆元は基礎体の零でない元のみであるので、

線型代数から、Jacobian conjecture は次と同値である。

F は A の自己同形射 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $J(F)$ は逆行列を持つ。

$J(F)$ は逆行列 $L=(l_{ij})$ を持つとせよ。l_{ij} は A の元である。偏導関数 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ の代わりに ∂_i と書く。$a\in A$ に対して、導関数 $a\partial_i$ を次の様に定義する。

$$(a\partial_i)(b) = a\,\partial_i(b)$$

また、$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ は次の行列による関係式で、定義される導関数とする。

$$L\begin{pmatrix}\partial_1\\ \vdots\\ \partial_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}$$

つまり、$\varepsilon_i=\sum l_{ij}\partial_j$。

INVERSION FORMULA によって $\boxed{\text{ある条件のもとで}}$ ε_i を使って F^{-1} をあらわすことができる。

$$F^{-1}(a)=\underbrace{\sum_{0\le\nu_1,\cdots,\nu_n\in\mathbb{Z}}}\ \underbrace{(X_1-F_1)^{\nu_1}\cdots(X_n-F_n)^{\nu_n}}\ \underbrace{\frac{\varepsilon_1^{\nu_1}\cdots\varepsilon_n^{\nu_n}}{\nu_1!\cdots\nu_n!}}(a)$$

上記の n 組を $\nu\in|\mathbb{Z}|^n$ と書く。
ただし $|\mathbb{Z}|=\{z\in\mathbb{Z}\mid z\ge 0\}$

これを $(X-F)^\nu$ と書く。

分子は関数 ε_i の合成を示す。つまり

$$\underbrace{\varepsilon_1\circ\cdots\circ\varepsilon_1}_{\nu_1\text{個}}\cdots\underbrace{\varepsilon_n\circ\cdots\circ\varepsilon_n}_{\nu_n\text{個}}$$

これを $\frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}$ と書く。

WHEN IS THE SUMMATION IN THE INVERSION FORMULA WELL DEFIND?

Definition；ε_i が A 上 <u>locally nilpotently</u> に作用するとは、それぞれ $\alpha \in A$ に対して、$\varepsilon_i^m(\alpha)=0$ となる m（α による）が存在するときにいう。 ε_i が A 上 <u>locally finitely</u> に作用するとは、それぞれの $\alpha \in A$ に対して、下記の条件を満たす A の<u>有限</u>次元部分空間 V が存在するときにいう。

$\alpha \in V$ and $\varepsilon_i(V) \subseteq V$

明らかに、local nilpotence $\Rightarrow$ local finiteness。

次にいくつかの $\{\varepsilon_i\}$ の性質をあげる。

PROPERTIES

① $\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i$ すべての i, j に対して

② もし F が自己同形射ならば、すべての i に対して

$\varepsilon_i = F \circ \partial_i \circ F^{-1}$ よって、∂_i の locally nilpotently によって、ε_i も locally nilpotently に作用している。

③ もし ε_i が locally finitely に作用しているならば、ε_i は locally nilpotently に作用している。

④ もし、すべての i に対して ε_i が locally nilpotently に作用しているならば、F は automorphism である。

②と④は最初、私たちと違った方法で、David Wright 氏によって示された。彼が与えた定理；

(＊) F は A の自己同型射 $\Longleftrightarrow$ J(F) は逆行列を持ち、すべての i について、ε_i は locally nilpotently に作用する。

すべての i について、ε_i が locally nilpotent のときは、Inversion Formula における和は、有限個を除いて、項は 0 となるので well defined である。この場合、Inversion Formula は正しい。事実、F^{-1} を定義するのに使うことができ、また Wright 氏が与えた(*) における "$\Leftarrow$" 向きの証明と違った証明を与えるのに使える。

Inversion Formula はベキ級数環の場合、標数が正の場合にと、一般化される。

POWERSERIES RINGS:

A を標数 0 の体上の n 変数のベキ級数環、$F: A \to A$ を代数射とする。もし I が A の極大イデアルの場合、$F^{-1}(I)$ は極大イデアルとなり、$F^{-1}(I) = I$ である。よって、$F_j = F(x_j) \in I$、すべての j に対して。ヤコビアン行列 $J(F)$ は前と同じ様に定義される。定数項が零でないベキ級数は可逆であるので、$J(F)$ が逆行列（前と同じ様に L で表わす。）を持つことと、$|J(F)|$ が零でない定数項を持つことと同値である。$J(F)$ が逆行列を持つとき、前と同様に $\{\varepsilon_i\}$ を定義する。"$(X-F)$" がどんどんと、高い乗数の I^n に属していくので、Inversion

Formula における和は収束する。 Inversion Formula はべき級数環では正しい。(local nilpotence の条件は、必要ない。) もし Inversion Formula を F^{-1} を定義するのに使えば、べき級数環における "$\Leftarrow$" 向きの今までの証明とは違った証明を得る。

F は A の自己同形射 $\Leftrightarrow$ $J(F)$ は逆行列を持つ。

すべての ε_i が、well defined であることと、F が自己同形射であることは同値である。 この場合、すべての i に対して、$\varepsilon_i = F \circ \partial_i \circ F^{-1}$ であり、これから簡単に、$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i$ がわかる。 よって、多項式環における PROPERTIES ①② と同じ様な結果をべき級数環についても得る。

POLYNOMIALS POWERSERIES OVER GENERAL RINGS, INCLUDING POSITIVE CHARACTERISTIC;

Inversion Formula における困難な点は "$\varepsilon^{\nu}/\nu!$" の分母 "$\nu!$" である。 しかしながら、偏導関数 $\{\partial_i\}$ に対して、次の様に定義するのは自然である。

$$\frac{\partial_i^{\ell}}{\ell!}(x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}) = \begin{cases} 0 \ (\ell > e_i \text{ のとき}) \\ \text{もしくは} \\ \binom{e_i}{\ell} x_1^{e_1}\cdots x_i^{e_i-\ell}\cdots x_n^{e_n} \end{cases}$$

上記は、標数が0の場合も正しい。$\partial_i^{\ell}/\ell!$ は形式的記号であり、正標数の場合は $\partial_i^{\ell}/\ell!$ の様に計算されないので、"$\partial_i^{\ell}/\ell!$" のまわりをまるくかこった。

$\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in|\mathbb{Z}|^n$ に対して、

$$\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}=\frac{\partial_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\circ\frac{\partial_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\circ\cdots\circ\frac{\partial_n^{\nu_n}}{\nu_n!}$$

と定義する。$\{\partial^{\nu}/\nu!\}_{\nu\in|\mathbb{Z}|^n}$ は、$a.\ b\in A$ に対して、Leibniz identity を満足する。

$$\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}(ab)=\sum_{\substack{\lambda+\mu=\nu\\ \lambda.\mu\in|\mathbb{Z}|^n}}\left[\frac{\partial^{\lambda}}{\lambda!}(a)\right]\left[\frac{\partial^{\mu}}{\mu!}(b)\right]$$

これは、Aが可換環R上のn変数多項式環、n変数べき級数環の場合に正しい。もし、FがAの自己同形射であるときは、$J(F)$は逆行列を持つ$n\times n$行列である。その逆行列をLとせよ。また

$$\frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!}=F\circ\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}\circ F^{-1}$$

とすれば、前と同じ様に、

$$L\begin{pmatrix}\partial_1\\ \vdots\\ \partial_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}.$$

ただし、$\varepsilon_i=\dfrac{\varepsilon^{(0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)}}{(0,\cdots,0,1,0\cdots 0)!}$.

Aが多項式環であるときに、次の意味でlocally nilpotentlyにAに作用している。つまり、$\alpha \in A$に対して、次が成り立つmが存在する。

$$\left(\frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!}\right)(\alpha)=0 \qquad \nu_1+\cdots+\nu_n \geq m \text{ となるすべての } \nu \text{ に対して、}$$

これは、$\{\partial^{\nu}/\nu!\}$がlocally nilpotentlyにAに作用しているので正しい。よって、Inversion Formulaにおける和は、有限和であり、その公式は成立する。もし、Aがべき級数環であるときには、$F_i=F(X_i)$が$\{X_i\}$で生成されるイデアルIに属するとは限らない。しかしながら、それぞれF_iがIに属するならば、"$(X-F)^{\nu}$"がどんどん高い乗数のI^nに属してゆくので、和は収束して、Inversion Formulaは正しい。

FIND THE MISSING FORMULA:

一般の場合に、$\left(\varepsilon^{\nu}/\nu!\right)$を$F\circ\left(\partial^{\nu}/\nu!\right)\circ F^{-1}$と定義するのに$F^{-1}$を使ったので、Inversion Formulaを使用することはできなかった。$F\circ - \circ F^{-1}$は内部自己同形であるので、標数0の場合は、$\left(\varepsilon^{\nu}/\nu!\right)=\varepsilon^{\nu}/\nu!$が成り立つ。$\{\varepsilon_i\}$は$L$と$\{\partial_i\}$で表現できるので、標数が0の場合$F^{-1}$でなく$J(F)^{-1}$

のみを含むF^{-1}についての公式を得る。 たぶん、$\varepsilon^{\nu}/\nu!$についても、F^{-1}を使わずに、$J(F)^{-1}$と$\{\partial^{\nu}/\nu!\}$のみを含む公式を見つけられるであろう。 私はそのような公式の存在を信ずるが、それを見つけることはできなかった。
その後で、多項式の場合、$\{\varepsilon^{\nu}/\nu!\}$が locally nilpotentlly に作用している時、またべき級数環の場合は、$F(I)\subset I$のとき、Inversion Formulaを使用して、定義することができる。

REFERENCE;

M.E. Sweedler & Pekka Nousiainen; Automorphisms of Polynomial and Powerseries Rings, to apper in Journal of Pure and Applied Algebra