数理解析研究所講究録
第 473 巻 1982 年 117-125

Tor Gives the Inverse to the Hilbert Function of a Graded Algebra

Cornell Univ. Moss E. Sweedler

k を体、$U = \oplus_{i=0}^{\infty} U_i$ を次数 k ベクトル空間で、各 i について、$\dim U_i < \infty$ とする。U の Hilbert generating function とは次のべき級数をいう。

$$\psi(U)(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim U_i) t^i \quad \in \mathbb{Z}[[t]]$$

V を k ベクトル空間、TV, ΛV, SV をそれぞれ V 上のテンソル代数、外積代数、対称代数とする。また $DV = SV/\langle vw \rangle_{v,w \in V}$ とする。従って、次数 k ベクトル空間として $DV = k \oplus V$ である。

Bass の K 理論の本の中に（528頁 (8.4)）、この結果の K 理論的一般化がある：

$$(き) \quad [\psi(SV)(t)][\psi(\Lambda V)(-t)] = 1$$

ここ数年の間、これは私が気に入った、そして美しく、

神秘的でもある結果のひとつでした。同じように見えるが、もっと簡単な公式は

$$[\psi(DV)(t)][\psi(TV)(-t)] = 1$$

です。$V \cdot k = \{0\}$ として k に自明な SV 加群、DV 加群の構造を入れ、$\mathrm{Tor}^{SV}(k,k)$, $\mathrm{Tor}^{DV}(k,k)$ を考える。次数ベクトル空間の同型

$$\Lambda V \simeq \mathrm{Tor}^{SV}(k,k)$$
$$TV \simeq \mathrm{Tor}^{DV}(k,k)$$

がある。これは、次数環 U ($U_0 = k$) に対する次の公式（実は正しくない）を示唆する。

$$(*) \quad [\psi(U)(t)][\psi(\mathrm{Tor}^U(k,k))(-t)] = 1$$

この(*)は正しくないが、それは $[\psi(U)(t)]^{-1}$ を表わすのに、$\mathrm{Tor}^U(k,k)$ を使うことができるという正しいアイデアを含んでいる。さらに(*)は、ほとんど正しい。(*)を正しい公式に直すためには、$\mathrm{Tor}^U(k,k)$ が自然な双次数をもっていて、その双次数を使って $\mathrm{Tor}^U(k,k)$ からべき級数を作れることに気づかねばならない。

双次数ベクトル空間 M に対して、べき級数 $\Phi(M)(t)$ を次の様に定義する。

$$(と) \quad \Phi(M)(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim M_{ij}\right)t^j$$

これが定義可能であるためには、次の有限性の条件が必要である。即ち「各 j について、$n_j \in \mathbb{N}$ が存在して、$l \geq n_j$ ならば、$M_{lj} = \{0\}$ である。」

k が体の時（一般の可換環の時は後述）の (*) の正しい形は次の通りである。

$$(**) \quad [\Psi(U)(t)][\Phi(\mathrm{Tor}^U(k,k))(t)] = 1$$

後で定理を正確に述べる時に、U や $\mathrm{Tor}^U(k,k)$ にどんな条件が必要かを述べる。注目すべきことは (き) から (**) に行くと、第二項の「$-t$」が「$+t$」に変化していることである。

ΛV と $\mathrm{Tor}^{SV}(k,k)$ を同一視すると、双次数ベクトル空間として、それは対角成分に集約される。（即ち、対角成分以外はすべて零ベクトル空間） 従って、

$$\Phi(\Lambda V)(t) = \Psi(\Lambda V)(-t)$$

TV と $\mathrm{Tor}^{DV}(k,k)$ についても、同様のことが成立する。

次に k を可換環とする。$\mathfrak{M}$ を有限生成 k 加群の類とする。各 $M \in \mathfrak{M}$ に対して、可換環 S の元 $[M]$ があり、次の (i), (ii), (iii) をみたすとする。

(i) $[k] = 1_S$

(ii) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が k 加群の完全系列ならば、$[M] = [M'] + [M'']$ である。

(iii) $[M][M'] = [M \otimes_k M']$

身近な例は、k が体、$\mathfrak{M}$ が有限次元 k ベクトル空間の類、$S = \mathbb{Z}$、$[M] = \dim_k M$ である。与えられた k に対するこのような [ ] と S の普遍例は $K_0(k)$ であり、これが $K_0(k)$ の定義である。

$|\mathbb{Z}| = \{0, 1, 2, \cdots\}$。$\mathfrak{M}^{|\mathbb{Z}|}$ を $|\mathbb{Z}|$ 添数の次数射影 k 加群で、$U = \oplus_{i \in |\mathbb{Z}|} U_i$, $U_i \in \mathfrak{M}$ なるものの類とする。

このような U に対して ψ の一般的な形

$$\psi(U) = \sum_{i=0}^{\infty} [U_i] t^i \in S[[t]]$$

を得る。$U_0 = k$ ならば、$\psi(U)$ は $1 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i t^i$ なる形をしたべき級数である。従って、可逆元である。

双次数 k 加群に対しても同様に Ψ を一般化する。$\mathfrak{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ を $M = \oplus_{i,j \in |\mathbb{Z}|} M_{ij}$, $M_{ij} \in \mathfrak{M}$, 各 j について、充分大きな i に対して、$M_{ij} = \{0\}$ なる形の射影 k 加群の類とする。

$M \in \mathfrak{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ に対して、前述の (と) において $\dim M_{ij}$ を $[M_{ij}]$ に

置きかえて得られるべき級数 ($\in S[[t]]$) を $\Phi(M)$ と定義する。

定理　U を次数 k 代数で、$U_0 = k$, $U \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|}$ なるものとする。k は $U_i \cdot k = \{0\}$ $(i \geq 1)$ なる、自明な U 加群構造をもつものとする。このとき、$\mathrm{Tor}^U(k,k)$ は自然な双次数をもち、もし $\mathrm{Tor}^U(k,k)$ が射影 k 加群ならば、この双次数で、$\mathrm{Tor}^U(k,k) \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|^2}$ であり、次の式が成立する。

$$[\psi(U)][\Phi(\mathrm{Tor}^U(k,k))] = 1$$

この定理の証明の概略は最後に述べることにする。

⊗ Product properties of ψ & Φ

次数加群のテンソル積上の普通の次数に関して、次のことは簡単に確められる。即ち、$U, V \in \mathcal{M}^{|\mathbb{Z}|}$ に対して

$$\underbrace{\psi(U)\,\psi(V)}_{S[[t]]\text{での積}} = \psi(U \otimes V)$$

双次数加群 C, D に対して、$C \otimes D$ の双次数は、次で与えられる。

$$(C \otimes D)_{nm} = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ r+s=m}} C_{ir} \otimes D_{js}$$

この時、 $C, D \in \mathfrak{M}^{|Z|^2}$ に対して

$$\Phi(C)\Phi(D) = \Phi(C \otimes D)$$

定義　$\cdots \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \cdots$ を k 加群の系列とする。この系列が M で複体 (complex at M) とは、 $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ が成立するときにいう。この時、 $H(M) = \mathrm{Ker}\, g / \mathrm{Im}\, f$ と定義する。 M が系列の右端、或いは左端のときは、いつでも M で複体と約束し、 H(M) は次のように定義する。

$$H(M) = \begin{cases} \mathrm{Ker}\, g \ , & M\text{が左端のとき} \\ \mathrm{Im}\, f \ , & M\text{が右端のとき} \\ M \ , & \text{系列が}M\text{だけのとき} \end{cases}$$

各加群で複体のとき、その系列を複体という。

完全系列　$0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_0 \longrightarrow 0$ は $H(N_i) = 0$ なる複体　$N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0$ である。このような複体に対しては、[ ] の定義より

$$[N_0] - [N_1] + [N_2] = 0 \ 。$$

この結果の拡張として

補題 $N_{t+1} \longrightarrow N_t \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow N_0$ を $\{N_i\}_{i=0}^{t+1} \subset \mathcal{M}$ で $H(N_i)$ $(1 \le i \le t)$ が射影k加群になるような複体とすれば、次の2つのことがいえる。

$$\{H(N_i)\}_{i=0}^{t+1} \subset \mathcal{M}$$

$$\sum_{i=0}^{t+1} (-1)^i [N_i] = \sum_{i=0}^{t+1} (-1)^i [H(N_i)]$$

定義 C を $C \in \mathcal{M}^{|Z|^2}$ なる双次数加群とする。双次数 $(-1,0)$ の写像 $d: C \to C$ が C に「袖」(sleeves) を与えるとは、$d^2 = 0$ でホモロジー加群 $H(C) = \mathrm{Ker}\, d / \mathrm{Im}\, d$ が射影k加群のときにいう。

我々は、各 d のつくる下の絵より、用語「袖」を使う。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
C_{03} & \leftarrow & C_{13} & \leftarrow & C_{23} & \leftarrow & C_{33} & \leftarrow & C_{43} & \leftarrow & \cdots \\
\hline
C_{02} & \leftarrow & C_{12} & \leftarrow & C_{22} & \leftarrow & C_{32} & \leftarrow & C_{42} & \leftarrow & \cdots \\
\hline
C_{01} & \leftarrow & C_{11} & \leftarrow & C_{21} & \leftarrow & C_{31} & \leftarrow & C_{41} & \leftarrow & \cdots \\
\hline
C_{00} & \leftarrow & C_{10} & \leftarrow & C_{20} & \leftarrow & C_{30} & \leftarrow & C_{40} & \leftarrow & \cdots \\
\hline
\end{array}$$

補題と「袖」を合わせて、次の命題を得る。

命題 $C \in \mathcal{M}^{|Z|^2}$ で d が C に「袖」を与えるならば、$H(C) \in \mathcal{M}^{|Z|^2}$ かつ $\Phi(C) = \Phi(H(C))$ である。

定理の証明。

次の5つの等号を説明する。

$$\Psi(U)\,\Phi(\mathrm{Tor}^U(k,k)) \overset{(1)}{=} \Phi(C)\,\Phi(\mathrm{Tor}^U(k,k)) \overset{(2)}{=} \Phi(C)\,\Phi(D) \overset{(3)}{=} \Phi(C \otimes D) \overset{(4)}{=} \Phi(H(C\otimes D)) \overset{(5)}{=} 1$$

(1) C は U から次のように得る。

$$C_{ij} = \begin{cases} U_j, & i = 0 \text{ のとき} \\ 0, & i \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき、$\Psi(U) = \Phi(C)$ は自明である。

(2) D は次の双次数加群である。

$$D_{n\ell} = \bigoplus_{\substack{j_1+\cdots+j_n=\ell \\ j_1,\cdots,j_n \in \mathbb{N}}} U_0 \otimes U_{j_1} \otimes \cdots \otimes U_{j_n} \otimes U_0$$

次の写像、

$$\begin{array}{ccc} D_{n\ell} & & \alpha \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n-1\,\ell} & & \displaystyle\sum_{i=2}^{n} (-1)^i \alpha \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes (u_{i-1} u_i) \otimes \cdots \otimes u_n \otimes \beta \end{array}$$

は D に袖を与える。これらの袖で、双次数加群として、$H(D) = \mathrm{Tor}^U(k,k)$ である。これらの袖は、$\mathrm{Tor}^U(k,k)$ を計算するのに使われる棒分解（bar resolution）だからである。この Tor の双次数付けは、次数 U 加群の圏で考えているのだから自然にでてくる双次数付けである。前述の命題より、$\Phi(D) = \Phi(H(D))$ がでる。

(3) これは前述の Φ の product property より出る。

(4) と (5) $C \otimes D$ は次の双次数加群である。

$$(C \otimes D)_{nl} = \bigoplus_{\substack{j_0 + \cdots + j_n = l \\ j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N} \\ j_0 \in |\mathbb{Z}|}} U_{j_0} \otimes U_{j_1} \otimes \cdots \otimes U_{j_n} \otimes U_0$$

この双次数加群は袖を持ち、それが $\mathrm{Tor}^U(U,k)$ を計算するのに使われる棒分解になっている。従って

$$H(C \otimes D) = \mathrm{Tor}^U(U,k)$$

等号(4)は前述の命題からでる。等号(5)は、$\mathrm{Tor}^U(U,k)$ が自明であるということ ── 次数 $(0,0)$ に k があり、他はすべて $\{0\}$ ということ ── からでる。

参考文献

Sweedler, M.E., Tor gives the inverse to the Hilbert function of a graded algebra, to appear (J. Pure & Applied Algebra).