数理解析研究所講究録
第 474 巻 1982 年 38-51

複素解析的葉層構造の特異点 II

北大 理(教養)　諏訪 立雄

これは[I]の続きである．まず何らかの第1積分をもつ葉層構造の開折(unfolding)について述べ(第6,7,8節)，次に開折の七一横断性，葉層構造芽の有限既定性について考える(第9節)．記号，定義等は[I]に従う．

$\mathcal{F}=(\omega)$, $\omega=\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$, $f_i \in \mathcal{O}$, を $\mathbb{C}^n$ の 0 における余次元1の局所葉層構造([I]1. 参照)とするとき，$f_1,\cdots,f_n$ で生成される ideal を $J(\omega)$ とかく．これは又，$\mathcal{F}$ の生成元(および $\mathbb{C}^n$ の座標系)のとり方によらないので $J(\mathcal{F})$ とも書き，$\mathcal{F}$ の Jacobian ideal ということにする．さらに

$$I(\omega)=\{h \in \mathcal{O} \mid h\,d\omega = \eta \wedge \omega,\ \eta \in \Omega\}$$

とおくと，これは $\mathcal{O}$ の ideal で，$\mathcal{F}$ の生成元 ω のとり方によらないので $I(\mathcal{F})$ ともかく．積分可能条件 $d\omega \wedge \omega = 0$ より $f_i\,d\omega = (df_i - \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_j) \wedge \omega$ となるので $J(\mathcal{F}) \subset I(\mathcal{F})$ である．$\mathcal{F}$ の一次開折の同値類の集合 $U(\mathcal{F})$ は

$$\mathrm{T}(F) = I(F)/J(F)$$

で与えられる（[I] 3.）. 以下 F の特異点集合 $S(F)$ の $\mathbb{C}^n$ における余次元は常に2以上としておく.

6. 正則第1積分をもつ葉層構造. 葉層構造 $F=(\omega)$ が正則第1積分をもつとは, 正則関数芽 $f \in \mathcal{O}$ で

$$\omega \wedge df = 0$$

となるものが存在すること. このとき, $\mathrm{codim}\, S(F) \geqq 2$ より

(6.1) $\qquad g\omega = df, \quad g \in \mathcal{O}$

と書けることが分る. もし g が $\mathcal{O}$ の単元なら F は Haefliger 葉層構造で生成元として df がとれる. このとき, $I(F)=\mathcal{O}$, $J(F)=J(f)$ (f の Jacobian ideal) である. 従って $\mathcal{O}/J(f)$ が有限次元なら, [I] 5節の普遍性定理により $[u_1], \cdots, [u_m]$ を $\mathcal{O}/J(f)$ の $\mathbb{C}$-基底とするとき, $\mathbb{C}^m=\{(t_1,\cdots,t_m)\}$ をパラメータ空間とする F の開折 $\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega}=d\tilde{f}$, $\tilde{f}= f+\sum_{i=1}^{m} u_i t_i$ は universal である.

(6.2) 注意. $F=(df)$ の開折理論は f の strict right-morphisms に関する開折理論と同値である（[19] 参照. [I] の right-morphism は strict right-morphism に

おきかえる必要がある).

次に (6.1) の g が単元でない場合を考える. まず次の補題を示すのは難かしくない;

<u>(6.3) 補題.</u> f を $\mathcal{O}$ の単元でない元とし, g を $\mathcal{O}$ の元で $g = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ と表わしてあるとする. ただし k_i は自然数, f_i は $\mathcal{O}$ の元で (a) f_i は reduced, (b) f_i, f_j は互に素 であるもの. このとき, もし $df = g\theta$, $\theta \in \Omega$, とかけるなら, f は $f_1^{k_1+1} \cdots f_r^{k_r+1}$ で割り切れる.

さて g を (6.1) のものとし, (6.3) の条件をみたす f_i をとり $g = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ と表わす. そうすると,

$$f = f_1^{k_1+1} \cdots f_r^{k_r+1} f_{r+1}, \qquad f_{r+1} \in \mathcal{O}$$

と書けるので

$$(6.4) \qquad \omega = f_1 \cdots f_{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad \lambda_i = \begin{cases} k_i + 1 & \cdots 1 \le i \le r, \\ 1 & \cdots i = r+1 \end{cases}$$

となる. 従ってこの場合は第8節で考えるものに帰着できる.

<u>7. 有理型第1積分をもつ葉層構造.</u> 葉層構造 $\mathcal{F} = (\omega)$ が有理型第1積分をもつとは, 有理型関数芽 $\frac{f}{g}$ $(f, g \in \mathcal{O})$

で

$$\omega \wedge d\left(\frac{f}{g}\right) = 0$$

となるものが存在すること．このとき，$\operatorname{codim} S(\mathcal{F}) \geq 2$ より

(7.1) $\quad h\omega = g\,df - f\,dg \quad , \; h \in \mathcal{O}$

と書けることが分る．

まず h は $\mathcal{O}$ の単元であるとすると，$\mathcal{F}$ の生成元として $g\,df - f\,dg$ がとれるので，以後 $\omega = g\,df - f\,dg$ とおく．f と g で生成される ideal を (f, g) とすると次を得る（[19]）：

<u>(7.2) 補題</u> $\quad I(\mathcal{F}) = (f, g)$．従って

$$T(\mathcal{F}) = (f, g)/J(\mathcal{F}).$$

これを用いると，普遍性定理（[I] 5.）の応用として次を得る．

<u>(7.3) 定理.</u> $\mathcal{F}$ を $\mathbb{C}^n$ の 0 での余次元 1 の葉層構造で，$\omega = g\,df - f\,dg$ $(f, g \in \mathcal{O})$ の形の生成元をもつとする．もし $\dim_{\mathbb{C}} (f, g)/J(\omega)$ が有限なら $\mathcal{F}$ は universal な開折をもつ．実際，$[u_1 g - v_1 f], \cdots, [u_m g - v_m f]$ を $(f, g)/J(\omega)$ の $\mathbb{C}$-基底とすると，パラメータ空間が $\mathbb{C}^m$

$=\{(t_1,\dots,t_m)\}$ である F の開折 $\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$,

$$\tilde{\omega}=\tilde{g}\,d\tilde{f}-\tilde{f}\,d\tilde{g},\quad \tilde{f}=f+\sum_{k=1}^{m}u_k t_k,\quad \tilde{g}=g+\sum_{k=1}^{m}v_k t_k$$

は universal である.

(7.4) 系. F を(7.3)のような葉層構造とすると，F の任意の開折は $\tilde{\omega}=\tilde{g}\,d\tilde{f}-\tilde{f}\,d\tilde{g}$ という形の生成元をもつ．ただし，$\tilde{f}$, $\tilde{g}$ はそれぞれ f, g の開折.

(7.5) 注意. $F=(\omega)$, $\omega=g\,df-f\,dg$ の開折理論は有理型関数 $\frac{f}{g}$ の開折理論と同値である（詳細は[19]）.

つぎに(7.1)において h が $\mathcal{O}$ の単元でない場合を考える。以下 g は reduced と仮定する．(7.1)は

(7.6) $\quad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{h}{g^2}\,\omega$

とも表わせる．f と g は互に素であるとしておくと，g が reduced だから g と h は互に素．従って(7.6)より $\frac{f}{g}=c$ は h の零点集合の上で定数でなければならない．$h=f_1^{k_1}\cdots f_r^{k_r}$ と表わしておく．ただし k_i は自然数で $i\neq j$ なら $k_i\neq k_j$，f_i は定数でない関数芽で(6.3)の条件(a),(b)をみたすものとする．そうすると

$$f-cg=f_1^{k_1+1}\cdots f_r^{k_r+1}f_{r+2},\qquad f_{r+2}\in\mathcal{O}$$

と書ける. $f_{r+1} = g$ とおくと

$$\omega = f_1 \cdots f_{r+2} \sum_{i=1}^{r+2} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad \lambda_i = \begin{cases} k_i + 1 & \cdots 1 \leq i \leq r, \\ -1 & \cdots i = r+1, \\ 1 & \cdots i = r+2 \end{cases}$$

となる. 従ってこの場合は次節で考えるものに帰着できる.

8. multiform 第1積分をもつ葉層構造.

葉層構造 $\mathcal{F} = (\omega)$ が multiform 第1積分をもつとは, $f_i \in \mathcal{O}$ と $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \cdots, p)$ で

$$\omega \wedge d(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}) = 0$$

となるものが存在すること. このとき $\operatorname{codim} S(\mathcal{F}) \geq 2$ より

$$g\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad g \in \mathcal{O}$$

と書けるが, ここでは g は $\mathcal{O}$ の単元であるとする. 従って $\mathcal{F}$ の生成元として $f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ がとれるので以後 $\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ とする. f_i を regroup することにより, $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ としてよい. さらに, $\operatorname{codim} S(\mathcal{F}) \geq 2$ より, 各 f_i は reduced かつ $i \neq j$ ならば f_i と f_j は互に素であることが分る. 各 i に対し $F_i = f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_p$ (f_i をのぞく) とおき, $(F_1, \cdots, F_p)$ で $F_1, \cdots, F_p$ で

生成された$\mathcal{O}$の ideal を表わす．また $ht(f_i, f_j, f_k)$ で f_i, f_j, f_k で生成される ideal の height を表わすと次を得る（[20]）．

(8.1) 補題. $df_1 \wedge \cdots \wedge df_p \neq 0$ かつ f_i, f_j, f_k が単元でないような任意の相異なる i, j, k に対し，$ht(f_i, f_j, f_k) = 3$ ならば $I(F) = (F_1, \cdots, F_p)$ 従って

$$U(F) = (F_1, \cdots, F_p)/J(F).$$

これを用いると，普遍性定理（[I] 5）の応用として次を得る．

(8.2) 定理. F を $\mathbb{C}^n$ の 0 での余次元 1 の葉層構造で，$\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \dfrac{df_i}{f_i}$ の形の生成元をもつとし，$f_1, \cdots, f_p$ は (8.1) の条件をみたすとする．もし $\dim_{\mathbb{C}} (F_1, \cdots, F_p)/J(\omega)$ が有限なら F は universal な開折をもつ．実際，$[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i^{(1)} F_i], \cdots, [\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i^{(m)} F_i]$, $u_i^{(k)} \in \mathcal{O}$，を $(F_1, \cdots, F_p)/J(\omega)$ の $\mathbb{C}$-基底とするとパラメータ空間が $\mathbb{C}^m = \{(t_1, \cdots, t_m)\}$ である F の開折 $\mathcal{F} = (\tilde{\omega})$,

$$\tilde{\omega} = \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{d\tilde{f}_i}{\tilde{f}_i}, \quad \tilde{f}_i = f_i + \sum_{k=1}^{m} u_i^{(k)} t_k$$

は universal である.

(8.3) 系. F を (8.2) のような葉層構造とすると, F の任意の開折は $\tilde{\omega} = \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{d\tilde{f}_i}{\tilde{f}_i}$ という形の生成元をもつ. ただし各 $\tilde{f}_i$ は f_i の開折.

(8.4) 注意. $F = (\omega)$, $\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ の開折理論は多価関数 $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ の開折理論と同値である (詳細は [20]).

最後に, 正則第1積分をもつ葉層構造 (第6節後半参照) F で $U(F)$ に obstruct された元をもつ例をあげておく.

(8.5) 例. $F = (\omega)$ を $\mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ の 0 での葉層構造で

$$\omega = y(3x + 2y)dx + x(3x + 4y)dy$$

で生成されたものとする. $f = x^2 y^3 (x + y)$, $g = x^2 y^3$ とすると (6.1) が成り立っている. (6.4) において, $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = x + y$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ である.
$\mathrm{ht}(f_1, f_2, f_3) = 2$ であるので (8.1) の条件は満たされて

いない. $h=3x+4y$ とすると $\eta=3dx$ に対し $hd\omega=\eta\wedge\omega$ となるので $[h]$ は $U(F)$ に入っており $\mathcal{F}^{(1)}=(\tilde{\omega})$,

$$\tilde{\omega}=y(3x+2y)dx+(3x^2+4xy+t)dy+(3x+4y)dt$$

は $[h]$ に対応する F の1次開折 ([I] 3) であるが, $[h]$ に対応する開折が存在しない (上の $\tilde{\omega}$ に高次の項をつけ加えて積分可能条件をみたすようにすることができない) ことは容易にたしかめられる.

9. k-横断性, 有限確定性. この節では関数芽の場合の結果を葉層構造芽の場合に拡張することを試みる. 関数芽の場合は [15], [16], [18] 等を参照されたい. $\mathcal{O}$ の元 f の Taylor 級数の k 次までの項の和を f の k-jet といい j^kf で表わす. また Ω の元 $\omega=\sum_{i=1}^{n}f_idx_i$ の k-jet $j^k\omega$ は

$$j^k\omega=\sum_{i=1}^{n}(j^{k-1}f_i)dx_i$$

により定義する. 正則1形式の0での芽の k-jet 全体を J^k で表わし $\pi_k:\Omega\longrightarrow J^k$ を ω に $j^k\omega$ を対応させる写像とする. 明らかに J^k は Euclid 空間の構造をもつ. さらに, $J^k(n)$ で $\mathbb{C}^n$ 上の正則1形式の芽の k-jet 全体を表わす. $J^k(n)$ は $J^k\times\mathbb{C}^n$ と同一視できる. 標準的全射 $J^k(n)\longrightarrow J^k$ を π と書く. $\mathbb{C}^n$ の 0 を固定する局所双正則

写像の芽の k-jet のなす Lie群を $L^k(n)$ で表わす; $L^k(n) = \{ j^k \Phi \mid \Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \circlearrowleft ,\ d\Phi(0) \neq 0 \}$. $L^k(n)$ の J^k への作用 $L^k(n) \times J^k \longrightarrow J^k$ は $(j^k\Phi, j^k\omega) \longmapsto j^k \Phi^* \omega$ により与えられる。

さて，$\mathbb{C}^n$ の 0 での余次元1の葉層構造 $F = (\omega)$ に対し

$$\Omega(\omega) = \{ \theta \in \Omega \mid \theta \wedge \omega = dh \wedge \omega - h\, d\omega ,\ h \in \mathcal{O} \}$$

とおく. 右辺の条件は，$F = (\omega)$ の1次開折 $\mathcal{F}^{(1)} = (\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)} t + h\, dt \pmod{t^2, t\,dt}$ において $\omega^{(1)}$ の満たすべき条件である. $\mathcal{F} = (\tilde{\omega})$ が $\mathbb{C}^m$ をパラメタ空間とする F の開折であるとき，写像

$$j_1^k \tilde{\omega} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \longrightarrow J^k(n)$$

を $j_1^k \tilde{\omega}(x,t) = j^k \omega_t(x)$ ($\omega_t = \tilde{\omega}|_{t=t}$ の x における芽の k-jet) により定める.

<u>(9.1) 定義.</u> F の開折 $\mathcal{F}$ が infinitesimally に k-横断的であるとは

$$\Big[\bigcup_{\tilde{\omega}} d(\pi \circ j_1^k \tilde{\omega})(T_0(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)) \Big] + T_z(L^k(n)(z)) = \pi_k \Omega(\omega) , \qquad z = j^k \omega$$

となること. ただし左辺第1項は $\tilde{\omega}|_{t=0} = \omega$ なるすべての $\mathcal{F}$ の generator についての union で生成される $\mathbb{C}$-

ベクトル空間，第２項は $z=j^k\omega$ の $L^k(n)$ の作用の軌道の z における接空間で，J^k の z における接空間は J^k と同一視する．

一般に I が $\mathcal{O}$ の ideal であるとき

$$I*J(\omega)=\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i\,d\varphi_i+\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_j \,\middle|\, \varphi_i\in I\right\}$$

とおく．さらに $\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$ が $\mathbb{C}^m=\{(t_1,\cdots,t_m)\}$ をパラメタ空間とする $F=(\omega)$ の開折であるとき，

$$\tilde{\omega}=\omega+\sum_{l=1}^{n}\omega^{(l_l)}t_l+\sum_{l=1}^{m}h_l\,dt_l+\text{高次の項}$$

と書いておくと次を得る：

(9.2) 補題．

(1) $T_z(L^k(n)(z))=\pi_k(m*J(\omega))$ （m は $\mathcal{O}$ の maximal ideal）．

(2) $d(\pi\circ j_1^k\tilde{\omega})\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=j^k\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_j\right)$，$i=1,\cdots,n$，

$d(\pi\circ j_1^k\tilde{\omega})\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right)=j^k(\omega^{(l_l)})$，$l=1,\cdots,m$．

証明は［18］第７章 主要補助定理 III，IV と同様である．

(9.3) 系. $\mathcal{F}=(\omega)$ の開折 $\tilde{\mathcal{F}}=(\tilde{\omega})$ が k-横断的であるためには

$$\Omega(\omega)=[\omega^{(l_1)},\dots,\omega^{(l_m)}]+\mathcal{O}*J(\omega)+\mathcal{O}\omega+\pi_k^{-1}(0)\cap\Omega(\omega)$$

であることが必要十分. ただし右辺第1項は $\omega^{(l_1)},\dots,\omega^{(l_m)}$ で生成される $\Omega(\omega)$ の $\mathbb{C}$-ベクトル部分空間である.

次に, 一次開折の空間 $U(\mathcal{F})=I(\omega)/J(\omega)$ との関係は次のようになる.

(9.4) 補題.

$$I(\omega)/(J(\omega)+\{g\mid g\,d\omega=dg\wedge\omega\})\simeq\Omega(\omega)/(\mathcal{O}*J(\omega)+\mathcal{O}\omega).$$

同型対応は, $h\in I(\omega)$, $h\,d\omega=\eta\wedge\omega$ の類 $[h]$ に $[dh-\eta]$ を対応させることにより得られる.

(9.5) 系. $\tilde{\mathcal{F}}$ が $\mathcal{F}$ の infinitesimally に versal な開折ならば, すべての k に対し infinitesimally に k-横断的な開折である.

次に $\mathcal{F}=(\omega)$ の有限既定性について考える.

(9.6) 定義. $\mathcal{F}=(\omega)$ が k-既定であるとは, $j^k\omega'=j^k\omega$ なる生成元 ω' を持つ任意の葉層構造 $\mathcal{F}'$ に対し, $\mathbb{C}^n$ の0における局所双正則写像芽 Φ $(\Phi(0)=0)$ と, $\mathcal{O}$ の単元 u で

$\Phi^*\omega = u\omega'$ となるものが存在すること．Fが有限確定であるとは，あるkに対しk-確定となること．

周知のように，関数芽fに対しては，次のMatherの結果がある：

$$m^k \subset mJ(f) + m^{k+1} \quad \text{なら} \quad f\text{は}k\text{-確定}.$$

これを用いると，$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/J(f)$ の有限性からfの有限確定性が出るわけである．そこで葉層構造芽の場合に次のようなことを考えてみる．

<u>(9.7) 問題.</u> $U(F) = I(F)/J(F)$ が有限次元ならFはは有限確定か？

これを示すには，関数芽のときの類似で

$$\pi_{k-1}^{-1}(0) \cap \Omega(\omega) \subset m * J(\omega) + \mathcal{O}\omega + \pi_k^{-1}(0)$$

ならば Fはk-確定

であることを証明すればよい．現在のところ，これは特別な場合（例えばωがhomogeneousのとき）のみ証明できる．ωがhomogeneousの特殊な場合として $\omega = x_1 \cdots x_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i}$ に対する有限確定性の結果があった（Cerveau-Neto [2]，[17] Théorème B_5，なお[I]5節普遍性定理の系(II)も参照．また(9.7)を肯定的に裏づけるものと

して $\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ に対する弱い意味の有限決定性（Cerveau - Mattei [17] Théorème 2.1）等がある。

References

[I] 諏訪立雄, 複素解析的葉層構造の特異点, 数理研講究録「特異点をめぐる位相的解析的様相」1981年10月

以下は [I] の references のつづきである。

[16] Th. Bröcker, Differentiable Germs and Catastrophes, Cambridge University Press, Cambridge 1975.

[17] D. Cerveau, Contribution à l'étude des formes intégrables singulières, Thèse, Dijon 1981.

[18] 野口広, 福田拓生, 初等カタストロフィー, 共立全書208 共立出版, 1976.

[19] T. Suwa, Unfoldings of meromorphic functions, preprint.

[20] T. Suwa, Unfoldings of foliations with multiform first integrals, preprint.