数理解析研究所講究録
第474巻 1982年 88-97

On the discriminant and the bifurcation set

国際基督教大 寺尾宏明

$F: U \to V$ を正則写像、U, V は各々 $\mathbb{C}^m$ 内の open domains とする。$C \subset U$ を F の critical set、$D \subset V$ を F の critical values の集合 (= discriminant) とよぶ。ここでは、斎藤恭司によって定義された logarithmic vector fields と、discriminant 及び bifurcation set (§3で定義する) との間の、いくつかの新しい結果を手短かに述べる。

§1. Finite map の discriminant

F が有限正則 (従って、$m = n$) のときは、C も D も各々 U, V 内で超曲面 (~~a germ~~) になる。今、V 上の vector field に対して "liftable by F" という概念を定義する。

定義1. θ を正則ベクトル場 (on V) とするとき、θ が liftable by F とは、U 上の正則ベクトル場 ψ があって、

$$(F_*)_p \psi(p) = \theta(F(p))$$

がすべての $p \in U$ に対して成立することをいう。もし、θ が liftable by F ならば、このような ψ は unique に定

まることがすぐにわかるから、

$$\psi = F^{-1}\theta$$

と書いてもよい。Fが正則有限写像の芽であるときも、勿論 'liftable by F' という概念は定義できる。

$$f : \underset{\shortparallel \atop X}{(\mathbb{C}^m, 0)} \longrightarrow \underset{\shortparallel \atop Y}{(\mathbb{C}^m, 0)}$$

を有限正則写像の芽とせよ。C, Dを各々、critical set, discriminant (の germs) とする。このとき、

定理1. i) $\mathrm{Der}_Y(\log D)_0 = \{$germs of holomorphic vector fields on Y liftable by $f\}$,

ii) $\mathrm{Der}_Y(\log D)_0$ が $\mathcal{O}_{Y,0}$-free module なら、

$$\mathrm{Der}_X(\log f^{-1}(D)) \simeq f^{-1}\mathrm{Der}_Y(\log D)_0 \underset{f^{-1}\mathcal{O}_{Y,0}}{\otimes} \mathcal{O}_{X,0}$$

特に、$\mathrm{Der}_X(\log f^{-1}(D))$ は free $\mathcal{O}_{X,0}$-module.

iii) f が、

$$\mathcal{O}_{X,0} \supset (\mathcal{O}_{X,0})^G = \mathcal{O}_{Y,0} \quad (G\text{は有限群},$$

$((\mathcal{O}_{X,0})^G$ は G-不変 subring) という状況から来ているときは、

$$(\mathrm{Der}_{X,0})^G = f^{-1}\mathrm{Der}_Y(\log D)_0$$

その上、$\mathrm{Der}_Y(\log D)_0$ は free $\mathcal{O}_{Y,0}$-module.

Remark. i) については、V. I. Arnol'd [1] が、

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \underset{\mathbb{C}^n}{\overset{}{\mathbb{C}^n/G \atop \wr\wr}} \qquad (G:\text{Coxeter 群})$$

の場合に証明している。iii) によって、G が finite unitary reflection group のとき、($G \subset \mathbb{C}^n$) G による鏡映面の集合がいわゆる 'free arrangement' になることがわかる。このあたりのことについては、Cartier [3], Orlik-Solomon [6], Terao [8] [9] などで扱われ、面白いところだが、割愛する。

定理1 の証明については [10] を見られたい。

§2. Discriminant of a free deformation

定義2. $(D, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ なる超曲面の芽が free であるとは、$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}^n}(\log D)_0$ が free $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ - module であることをいう。（$(D, 0)$ は $(\mathbb{C}^n, 0)$ の free divisor であるという）

free divisor というのは、かなり特殊な class であるが、例えば、$(D, 0)$ が超平面の和集合の芽であるときには、興味ある class を構成することが知られている。何故か、Coxeter 群とか、universal deformation とかと関係のある divisor は、大体 free になっているというのは、とても不思議なことだが、

その理由はよくわからない。complement の $K(\pi,1)$ 性とかなり類似した性質をもつことは知られている [8]。以下、free deformation というもの（矢野環 [12] によって定義されたもので、semiuniversal deformation の一般化）について、その discriminant が free になっているという結果をきちんと state する。

定義 3. $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$：正則で、$f^{-1}(0)$ が原点で isolated singularity をもつとする。このとき、

$$F_1(x_1,\cdots,x_n,t_2,\cdots,t_m)\quad(F(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0)=f)$$

なる正則函数の芽を考えて、

$$\varphi:X=(\mathbb{C}^{n+m-1},0)\to(\mathbb{C}^m,0)=S$$

を、$\varphi^*t_1=F_1$，$\varphi^*t_i=t_i\ (i>1)$ として $f^{-1}(0)$ の変形を定義する。このとき、C は、

$$\mathcal{O}_C=\mathbb{C}\{x_1,\cdots,x_n,t_2,\cdots,t_m\}/(\partial F_1/\partial x_1,\cdots,\partial F_1/\partial x_n)$$

の support である。$\varphi_*\mathcal{O}_C$ は、$\mathcal{O}_C$ を、（φ を通じて）$\mathcal{O}_S$-module とみなしたものとする。

$\mathcal{M}:=\varphi_*\mathcal{O}_C$ の $\mathcal{O}_S$-submodule で、$\partial F_1/\partial t_1,\cdots,\partial F_1/\partial t_m$ で $\mathcal{O}_S$ 上 generate されるもの

と定義する。φ が semiuniversal なら、$\mathcal{M}=\varphi_*\mathcal{O}_C$ である。さて、矢野による free deformation の定義とは、次の通

り。

φが free deformation であるとは，Mが$\mathbb{C}\{t_2, \ldots, t_m\}$-module として free であって，その free base として，$\partial F_1/\partial t_1, \ldots, \partial F_1/\partial t_m$ がとれることをいう。

semiuniversal deformation は free deformation であるが，それ以外にも重要な free deformation の例が文献[1]にある。

定理2．上の記法で，φが free deformation とせよ。しかも，次の条件を仮定する。

(GTQ) critical set (of φ) の generic point では，そこに沿って，quasi-homogeneous singularity の trivial family が並んでいる。

（注：この条件は，semi-universal deformation，或は rational double point のいかなる deformation についても成立している条件である）

このとき，φの discriminant は free divisor になる。

Remark 1．φが semiuniversal なときは，齋藤[7]に述べられている。

Remark 2. 定理2の条件と、しかるべき reasonable な条件のもとで、φの discriminant の'ふたつの exponents' についての"duality"が成立する。それは、Orlik-Solomon [6] によって発見された 'unitary reflection group の exponents duality' の intrinsic meaning をよく説明する。この話題については、Yano-Terao [14] を見られたい。

§3. Bifurcation set of a semiuniversal deformation

§2では、ある種の deformation の discriminant が free になることを述べた。ここでは、semiuniversal deformation の bifurcation set が free divisor になることを述べる。これは Arnol'd-Lyashko [1][5] の結果と関連がある。

補題1. $(D,0)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ が　　divisor とする。$(\mathbb{C}^{n+1},0)$ の座標を $(t_0,\cdots,t_n)$ ととって、

$$\begin{tikzcd}
(D,0) \arrow[d, "\pi"'] & \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)=S \arrow[dl] & (t_0,\cdots,t_n) \arrow[d, mapsto] \\
T=(\mathbb{C}^n,0) & & (t_1,\cdots,t_n)
\end{tikzcd}$$

という diagram を考えて、π が finite map であると仮定せよ。
$B:=\pi(\mathrm{Sing}\,D)$ とすると、$\mathrm{Der}_S(\log D)$ の lowerable な元

(i.e. $\{\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\partial/\partial t_i\ ;\ f_1,\cdots,f_n\in\mathbb{C}\{t_1,\cdots,t_n\}\} =: K$ に属している)をπで落とすと、

$\mathrm{Der}_T(\log B)$ に落ちる。

証明は易しい。

従って、 $K\cap\mathrm{Der}_S(\log D)\xrightarrow{\pi_*}\mathrm{Der}_T(\log B)$
なる map が define されることになる。この写像が surjective になる条件を与える：

補題2. 上の写像π_*は $(D,0)$の multiplicity (at 0)が 2ならば、surjective である。

証明は[11]で述べるが、次の結果を得る：

定理3 補題1の条件に加えて、以下の4条件を仮定する：

(i) $\pi_*: K\cap\mathrm{Der}_S(\log D)\longrightarrow\mathrm{Der}_T(\log B)$を$T$上の sheaves の写像と見て、codim $\geqq 2$ を除いて surjective,

(ii) $(D,0)$が free divisor,

(iii) πの discriminant $= B$,

(iv) $\mathrm{mult}_0(D) = n+1$.

$\Rightarrow$ π_*は surjective で、しかも Bも free divisor になる。

特に、$(D,0)$ が semiuniversal deformation の discriminant であるとき、Bのことを <u>bifurcation set</u> とよぶ。そのときは、定理3の4条件はすべて満されているので、(補題2を用い)

系1. semi-universal deformation の D, B に関して、π_* は onto.

系2. semi-universal deformation の bifurcation set は free divisor になる.

を得る.

Remark. 系1は Arnol'd [1] によって A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 の場合、計算で確かめられ、一般の場合に予想されていて、Lyashko [ ] がその予想を解いた。ここでは、その別証を与えたことになる。(とはいっても、Lyashko の証明は available でないので、別証かどうかは判らない)

Remark. rational double の semiuniversal deformation に対する bifurcation set B については、Looijenga が $T \setminus B$ が $K(\pi,1)$ になることを証明している [4]. $K(\pi,1)$ 性と、free divisor の関係には、ますます興味が持たれる所以である。

最後に、$\mathrm{Der}_S(\log D)$ の free base から、どのように、

$\mathrm{Der}_T(\log B)$ の free base を構成するかを、具体的に述べよう（semiuniversal deformation の場合）.

$\mathrm{Der}_S(\log D)$ の free base を

$$
\begin{cases}
\theta_0 = (t_0 - a_{00})\,\partial/\partial t_0 + a_{01}\,\partial/\partial t_1 + \cdots + a_{0n}\,\partial/\partial t_n \\
\theta_1 = a_{10}\,\partial/\partial t_0 + (t_0 - a_{11})\,\partial/\partial t_1 + \cdots + a_{1n}\,\partial/\partial t_n \\
\quad\vdots \\
\theta_n = a_{n0}\,\partial/\partial t_0 + \cdots + a_{n,n-1}\,\partial/\partial t_{n-1} + (t_0 - a_{nn})\,\partial/\partial t_n
\end{cases}
$$

の $(n+1)$ 個でとれることは難しくない（$^\forall a_{ij} \in \mathbb{C}\{t_1,\cdots,t_n\}$）[7] [10].

$\theta_1' \underset{def}{=} t_0\theta_0 - a_{01}\theta_1 - a_{02}\theta_2 - \cdots - a_{0n}\theta_n$ とおくと.

$\theta_1' \in K = \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,\partial/\partial t_i \ ;\ f_1,\cdots,f_n \in \mathbb{C}\{t_1,\cdots,t_n\} \right\}$ となる.

以下は.

$$\theta_i' \underset{def}{=} t_0^i\theta_0 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\theta_j \in K \quad (i=2,\cdots,n-1)$$

となるような $b_{ij} \in \mathbb{C}\{t_0,\cdots,t_n\}$ たちが unique に定まることがわかる.

すると、$\pi_*(\theta_1'),\cdots,\pi_*(\theta_{n-1}')$ が丁度 $\mathrm{Der}_T(\log B)$ の base を与えている。

REFERENCES

1. Arnol´d, V.I.: Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. Uspekhi Mat. Nauk 34,no. 2, 3-38 (1979). = Russian Math. Surveys 34, no. 2, 1-42 (1979).
2. Arnol´d, V.I.: Wave front evolution and equivariant Morse lemma. Communication on pure and appl. math., 29, 557-582 (1976).
3. Cartier, P.: Les arrangements d´hyperplans: un chapitre de geometrie combinatoire. Seminaire Bourbaki 33e annee, 1980/81, n 561. Springer Lecture Notes No.901, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1982.
4. Looijenga, E.: The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. Inventiones math. 32, 105-116 (1974).
5. Lyashko, O.V.: The geometry of bifurcation diagrams. Uspekhi Mat. Nauk 34, no.3, 205-206 (1979) = Russian Math. Surveys 34, no.3, 209-210 (1979).
6. Orlik, P., Solomon, L.: Unitary reflection groups and cohomology. Inventiones math., 59, 77-94 (1980).
7. Saito, K.: Primitive forms for an unfolding of a function with an isolated critical point. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 28, no.3,775-792 (1982).
8. Terao, H.: Arrangements of hyperplanes and their freeness I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 27, no. 2, 293-312 (1980).
9. Terao, H.: Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. Inventiones math. 63, no.1, 159-179 (1981).
10. Terao, H.: Discriminant of a holomorphic map and logarithmic vector fields (to appear).
11. Terao, H.: The bifurcation set and logarithmic vector fields (in preparation).
12. Yano, T.: Free deformations of isolated singularities. Sci. Rep. of the Saitama Univ., Ser. A, 9, no.3, 61-70 (1980).
13. Yano, T.: Deformation of isolated singularities and folding of Coxeter systems (in preparation).
14. Yano, T., Terao, H.: Duality between the two exponents of free deformations attached to unitary reflection groups (to appear).