数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 162-169

l_∞上2重可移の有限射影平面について

大阪大学教養部　平峰　豊
(Yutaka Hiramine)

点上2重可移に作用する collineation group をもつ有限射影平面はデザルグ平面に限ることが Ostrom-Wagner [4] により証明されている。デザルグ平面の直線を一つ固定し l_∞とおく。l_∞上の任意の点 P_1, Q_1, P_2, Q_2 (ただし $P_1 \neq Q_1$, $P_2 \neq Q_2$) をとると、2重可移性より適当な collineation x があって、$P_1^x = P_2$, $Q_1^x = Q_2$ となる。一方では $(l_\infty)^x = (P_1Q_1)^x = P_2Q_2 = l_\infty$ である。従って l_∞ を固定する collineation 全体からなる部分群は l_∞上2重可移に作用する。つまり、デザルグ平面は次の性質 [P] をもつ。

[P] ある直線 l_∞ 上2重可移に作用する collineation group G をもつ.

逆は成りたたない。つまり性質[P] をもつ、デザルグ平面でない射影平面が存在する。Lüneburg plane [2] がその例である。

以下では性質[P]をもつ射影平面について考える。射影平面の order 及び群の位数等はすべて有限であるとする。

1. Translation plane の定義及び Lüneburg plane

知られている有限射影平面の多数が translation plane と呼ばれる類の中に入る。André の方法により translation plane を定義する。(詳細は[3]の第1章参照)

$q = p^r$ を素数 p の巾とし、Vを位数がq^2の elementary abelian p-群であるとする。Vの$q+1$個の部分群 $V_1, V_2, \cdots, V_{q+1}$ がすべて位数qで、かつ $V^\# = V - \{0\}$, $V_i^\# = V_i - \{0\}$ とするとき、次をみたすとする。

$$V^\# = V_1^\# \cup V_2^\# \cup \cdots\cdots \cup V_{q+1}^\# \qquad (\text{disjoint sum})$$

このとき、$P_1^\infty, P_2^\infty, \cdots, P_{q+1}^\infty$ をVに属さない$q+1$個の"記号"として次のように点と直線を定める。$V_i + x$ を$x \in V$を含むV/V_iの剰余類，$l_x^{(i)} = V_i + x \cup \{P_i^\infty\}$ とおくとき、

点全体の集合 $\mathcal{P} = V \cup \{P_1^\infty\} \cup \{P_2^\infty\} \cup \cdots \cup \{P_{q+1}^\infty\}$

直線全体の集合 $\mathcal{L} = \{ l_x^{(i)} \mid 1 \leqq i \leqq q+1, \quad x \in V\} \cup \{l_\infty\}$

Incidence：集合としての包含関係

ここで P_i^∞ $(1 \leqq i \leqq q+1)$ を無限遠点，$l_\infty = \{P_1^\infty, P_2^\infty, \cdots, P_{q+1}^\infty\}$ を無限遠直線という。剰余類 V/V_i ; $1 \leqq i \leqq q+1$ は次の性質をもつ。

$$x, y \in V, \quad V_i + x \neq V_i + y \Rightarrow V_i + x \cap V_i + y = \phi$$

$$i \neq j \Rightarrow |V_i + x \cap V_j + y| = 1 \qquad \forall x, y \in V.$$

このことにより $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は射影平面となることが容易に示される。このような $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ に同型となる射影平面を <u>translation plane</u> という。

$V = V(2, GF(q))$ とし，$V_1, V_2, \cdots, V_{q+1}$ を V の1次元 $GF(q)$-部分空間の全体として得られる translation plane はデザルグ平面と同型になる。従ってデザルグ平面は translation plane である。

$q = 2^m$（m は3以上の奇数）とし $q_0 = q^2$ とおく。$GL(4, q)$ は Suzuki 群 $Sz(q)$ と同型な部分群を含む。これを G とする。G の 2-Sylow 群全体の集合を $\mathcal{S}$ とし，$V = V(4, q)$，$\mathcal{P}_0 = \{C_V(Z(S)) \mid S \in \mathcal{S}\}$ とおくと次が成りたつことが確かめられる。

$$|V| = q_0^2 \quad , \quad |V_i| = q_0 \quad {}^\forall V_i \in \mathcal{P}_0 \quad , \quad |\mathcal{P}_0| = q_0 + 1$$

$$V^\# = \bigcup_{V_i \in \mathcal{P}_0} V_i^\# \qquad (\text{disjoint sum})$$

従って上述の André の方法により translation plane が構成される。この平面を <u>Lüneburg plane</u> $L(q)$ という。

G は $GL(4, q)$ の部分群として V に自然に act するが，Suzuki群の性質により G は conjugation で $\mathcal{S}$ 上2重可移である。一方では G は無限遠直線 l_∞ 上の点の全体 $\{P_1^\infty, P_2^\infty, \cdots, P_{q_0+1}^\infty\}$ を集合として固定するから，この上に2重可移に作用する

collineation group となっている。つまり、Lüneburg plane $L(\mathfrak{F})$ は、性質[P] をもつ射影平面である。

2. 性質[P] をもつ射影平面

上で述べたように、デザルグ平面及び Lüneburg plane はいずれも translation plane でありかつ性質[P] をもつものであったが、性質[P] をもつ射影平面はこの２種類しか知られていない。これについては translation plane であるという条件のもとで次が証明されている。

定理１（Schulz, Czerwinski [3] §39） translation plane Π が性質[P] をもち、次の条件をみたすとする。

(*) Π の order が奇数の場合は Baer involution を含まない。

このとき Π はデザルグ平面か又は Lüneburg plane である。

知られている射影平面の多くのものが translation plane として得られていることは先に述べたが、すべての射影平面の中ではかなり特別なものであろうと予想される。[P] をみたす射影平面を translation plane であるという仮定なしで決定することが望ましいと思われる。

これについては G. Korchmáros[1]により次の定理が得られている。

定理2（Korchmáros）性質[P]をもつ射影平面πのorderが2^rであるとき (a) πはデザルグ平面であるか 又は次のいずれかが成りたつ。

$H = \langle t \mid t \in G,\ t^2 = 1,\ t$はelationで$l_\infty$をaxisとしない$\rangle$ とおくとき

(b) $H \cong Sz(2^s)$ $r = 2s$ 又は

(c) $H \cong PSU(3, 2^s)$ $r = 3s$

（H^{l_∞}はいずれも通常の2重可移表現）

ある直線上の点の数から1引いたものが射影平面のorderであるが 知られている有限射影平面ではすべてorderは素数の巾乗になっていて そうでないものは知られていない。上の定理の仮定"orderが2^r"の部分はorderが偶数の場合は自然なものであるのはこのことによる。しかし 単純群の分類定理を仮定するならば regular normal subgroupをもたない2重可移群はすべて決まるので その一つ一つについて性質[P]をもつ射影平面があるかないかを確かめることができる。次が分かる。

補題3. [P]をみたす射影平面πのorderが偶数で G^{l_∞}がregular normal subgroupを含まなければ orderは2の巾である。

3. Case (C) : $G^{l_\infty} \rhd PSU(3, q)$ について

デザルグ平面及び Lüneburg plane はそれぞれ定理2の(a), (b)をみたす例となっている。定理1, 2, 補題3からみて次が成りたつであろうと予想される。

"Conjecture" : order が偶数で性質[P]をもつ射影平面はデザルグ平面か又は Lüneburg plane である。

"Conjecture" を示す一つの step として定理2の(C)の場合が起りえないことを証明しなければならない。これについては次の定理が知られている最良のものと思われる。

定理4 (Schulz [5]) (C)において、Hが fixed point をもち、かつ $s \equiv 1 \pmod 2$ ならば (C)をみたす射影平面は存在しない。

これに関して次が証明できた。

定理5 (C)において H が fixed point をもたないならば、(C)をみたす射影平面は存在しない。

従って(C)については次が証明できればよいことが分かる。

問題6 (C)において H が fixed point をもちかつ $s \equiv 0 \pmod 2$ ならば(C)をみたす射影平面は存在しないことを示せ。

問題6のような射影平面が存在するとすれば、Gのaffine points上への作用は置換群として完全に決る([5] p 262)。

このことを用いて、このような射影平面の存在するための必要十分条件を群Hの両側分解についての条件で述べることができる。

<u>補題7</u>. $H = PSU(3, q)$ の2-Sylow群の一つをS, そのHでのnormalizerを $SD\ (\triangleright S)$; $|S| = q^3$, $D \simeq \mathbb{Z}_{q^2-1}$ とおき、$1 \neq t \in N_H(D)$, $t^2 = 1$, $Z = Z(S)$, $D = V \times K$, $V \simeq \mathbb{Z}_{q+1}$, $K \simeq \mathbb{Z}_{q-1}$, $M = ZV$ とおく。このとき問題6の射影平面が存在するための必要十分条件は、Hの元 $x_1, x_2, \cdots, x_{q-1}$, 及び Z を含む S のorder q^2 の部分群 S_0 が存在して、Hが (B, S_0), (S, S_0), (S_0, S_0) により次のように両側分解されることである。ここで $B = SD$ とする。

$$
\begin{aligned}
H - B = BtB &= B\{x_1, x_2, \cdots, x_{q-1}, t\}S_0 \\
&= StM\{x_1, x_2, \cdots, x_{q-1}\}S_0 \\
&= S_0 t S^{\#} t S_0 \cup \Big(\bigcup_{i \neq j} S_0 x_i^{-1} M x_j S_0\Big) \cup \Big(\bigcup_i S_0 x_i^{-1} M^{\#} x_i S_0\Big)
\end{aligned}
$$

この補題を用いて、問題6をみたす射影平面が存在するための必要十分条件は、Hを表現している有限体 $GF(q^2)$ の中でのいくつかの方程式として表わすことが可能となる。一般的に非存在を示すにはこれらの方程式は複雑すぎるが、q の

値が小さいときには計算が可能である。$q=4$では次が成りたつ。

<u>定理8</u> $PSU(3,4)$がl_∞上2重可移に作用するorder 64の射影平面は存在しない。

文献

[1] G. Korchmáros : Collineation groups doubly transitive on the points at infinity in an affine plane of order 2^r. Arch. Math. 37. (1981) 572–576.

[2] H. Lüneburg : Über projektive Ebenen, in denen jede Fahne von einer nicht trivialen Elation invariant gelassen wird. Abh. Math. Sem. Hamburg 29.(1965). 37–76.

[3] H. Lüneburg : Translation Planes. Springer-Verlag, 1980.

[4] T. G. Ostrom - A. Wagner : On projective and affine planes with transitive collineation groups, Math. Z. (1959) 186-199.

[5] R. H. Schulz : Über Translationsebenen mit Kollineationsgruppen, die die Punkte der ausgezeichneten Geraden zweifach transitiv permutieren. Math. Z. 122. (1971) 246–266.