数理解析研究所講究録
第476巻 1983年 81-98

爆風方程式の解の存在

東京電機大 理工　桜井 明
新井 勉

§1. 序

静止理想気体中の一点に有限のエネルギーが瞬間的に注入されたとき発生する衝撃波の伝播の問題は，数学的には，以下の方程式系(1)(2)(3)を満す関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$，$h(x,y)$ $\lambda(y)$ をもとめる事に帰着される．

$$\left\{\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\lambda f + (f-x)\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma h}\frac{\partial g}{\partial x} \\ & (f-x)\frac{\partial h}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\alpha f}{x}\right) \qquad (1) \\ & -\lambda g + (f-x)\frac{\partial g}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial g}{\partial y} = -\gamma g\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\alpha f}{x}\right) \end{aligned}\right.$$

($0<x\leq 1$, $0\leq y\leq \bar{y}\leq 1$, $\bar{y}$：定数)

$$\left\{\begin{aligned} & f(1,y) = 2(1-y)/(\gamma+1) \\ & g(1,y) = 2\gamma/(\gamma+1) - (\gamma-1)y/(\gamma+1) \qquad (2) \\ & h(1,y) = (\gamma+1/\gamma-1)\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\right)^{-1} \end{aligned}\right.$$

$$f(0, y) = 0. \tag{3}$$

ただし，f，g，h，λ はそれぞれ波面背後の気体の速度，圧力，密度および減衰度をあらわし，γ は比熱の比($\fallingdotseq 1.4$)，$\alpha = 0$，1，2 はそれぞれ点源，線源，面源に対応する。ちなみに方程式系(1)(2)(3)は，連続，運動，エネルギーの式，及び波面での Rankine-Hugoniot の式に，適当な変換(Blast Wave 変換)を施こした結果得られるものである[2]。

この問題に対して，既に多くの研究がなされているが，その殆んどが，近似解についての解析である[2]，[3]，[5][8]。本小論では，y ($= C^2/U^2$，C：音速，U：波面の速度)の巾級数で表わされるような，(1)(2)(3)の解の存在を証明する。その為の数学的な道具は，線型常微分方程式の理論，及び，完備距離空間における縮小写像の原理(不動点の存在定理)が主なものである。

§2．方程式の変形

方程式系(1)(2)(3)を変形しよう。まず，関数 $f_0(x)$，$g_0(x)$ $h_0(x)$ を方程式：

$$\begin{cases} \left\{-\frac{\alpha+1}{2} f_0 + (f_0 - x) f_0'\right\} h_0 = -\frac{1}{\gamma} g_0', \\ -(\alpha+1) g_0 + (f_0 - x) g_0' = -\gamma g_0 \left(f_0' + \frac{\alpha f_0}{x}\right), \end{cases} \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(f_0-x)h_0' = -h_0\left(f_0' + \dfrac{\alpha f_0}{x}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0<x\leqq 1,\quad ' = \dfrac{d}{dx}) \\ f_0(1) = \dfrac{2}{\gamma+1},\quad g_0(1) = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1},\quad h_0(1) = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\end{array}\right.$$

の解とする．（(4)は，(1)で形式的に $y=0$，$\lambda=\alpha+1$ としたものである)。(4)の解は解析的に閉じた形で表わされ，その詳しい性質が調べられている[2]，[8]。

さて，これらの関数を用いて，

$$\left\{\begin{array}{l}f(x,y) = f_0(x) + y(x-f_0(x))\varphi(x,y), \\ g(x,y) = g_0(x)(1+y\psi(x,y)) \\ h(x,y) = h_0(x)(1+y\chi(x,y)) \\ \lambda(y) = (\alpha+1)(1+y\Lambda(y))\end{array}\right. \qquad (5)$$

と置き，φ，ψ，χ，Λ を求める事にする。その際，変数 x を $\tau = \int_x^1 dx/(x-f_0(x))$ によって変換し（この変換により x の変域 $(0,1]$ は，τ の変域 $[0,\infty)$ に一対一対応する事が知られている[2]，[8]），さらに $2y/(\gamma-1)$ を改めて y とかけば，φ，ψ，χ，Λ の満すべき方程式系は次のようになる．

$$\left\{\begin{array}{l}A(\tau)\vec{X}_\tau(\tau,y) + B(\tau)\vec{X}(\tau,y) - (\alpha+1)yI\vec{X}_y(\tau,y) \\ +\Lambda(y)\vec{a} = y\vec{Y}(\tau,y) \qquad 0\leq\tau<\infty,\ 0\leq y\leq\bar{y},\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \vec{X}(0, y) = \vec{C}(y), \\ \varphi(\tau, y) : \tau \text{について有界} \end{cases} \tag{6}$$

となる.

ここで,

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha+1}{2}\frac{f_0}{x-f_0} \\ \alpha+1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma} \\ -\frac{1}{1+y} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\gamma E} & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} Q & R & -R \\ -(\alpha+1)(\gamma-1) & -(\alpha+1) & 0 \\ -(\alpha+1) & 0 & -(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{h_0(x-f_0)^2}{g_0}, \quad Q = 2f_0' + \frac{\alpha-1}{2},$$

$$R = f_0' + \frac{\alpha+1}{2}\frac{f_0}{x-f_0}$$

であり, $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ は非線形部分で,

$$
\left\{
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{(1+y\Delta)(1+y\chi)}\Big[(\Delta+\chi+y\Delta\chi)\Big\{\varphi_\tau-\frac{\psi_\tau}{\gamma E}+Q\varphi \\
&\quad +R(\psi-\chi)-\frac{\alpha+1}{2}\frac{f_0}{x-f_0}\Delta\Big\}+\varphi\Big\{-\varphi_\tau+(1-f_0')\varphi \\
&\quad +\frac{\alpha+1}{2}\Delta\Big\}(1+y\chi)+\chi\Big(\varphi_\tau+Q\varphi-\frac{\alpha+1}{2}\frac{f_0}{x-f_0}\Big)\Big], \\
Y_2 &= \frac{1}{1+y\Delta}\Big[\Delta\{\gamma\varphi_\tau-\psi_\tau-(\alpha+1)((\gamma-1)\varphi+\psi-\Delta) \\
&\quad -\varphi\psi_\tau-\gamma\varphi_\tau\psi+(\alpha+1)(\gamma-1)\varphi\psi\Big], \qquad (7) \\
Y_3 &= \frac{1}{1+y\Delta}\Big[\Delta(\varphi_\tau-\chi_\tau)-(\varphi\chi)_\tau+(\alpha+1)\varphi(\chi-\Delta)\Big]
\end{aligned}
\right.
$$

である。

§3. 線型方程式.

方程式(6)において，右辺の関数 $\vec{Y}(\tau,y)$ が与えられ，さらにそれが

$$\vec{Y}(\tau,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{Y}_n(\tau)\,y^n \qquad 0\leq y\leq \bar{y}$$

と級数展開できるとする。この時，線型方程式(6)の解 $\vec{X}(\tau, y)$，$\Delta(y)$ を

$$\vec{X}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{X}_n(\tau) y^n, \quad A(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n \tag{8}$$

の形で求めよう。(8)を形式的に(6)に代入し，yの巾についての係数を比較すれば，線型常微分方程式：

$$\begin{cases} A(\tau) X_n'(\tau) + B_n(\tau)\vec{X}_n(\tau) = -\lambda_n \vec{a} + \vec{Y}_{n-1}(\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqq \tau < \infty. \\ \vec{X}_n(0) = \vec{C}_n = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \\ C_n^{(3)} \end{pmatrix}, \qquad {}' = \dfrac{d}{d\tau}, \end{cases} \tag{9}$$

が得られる。ただし，

$$\begin{cases} B_n = B - n(\alpha+1)I, \\ \vec{C}_n \text{ は } \vec{C} \text{ を } y \text{ について巾級数展開した係数}, \\ \vec{Y}_{-1} = \vec{0}. \end{cases}$$

以下，$\vec{X}_n = (\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$, $\vec{Y}_n = (Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, Y_n^{(3)})$と書こう．方程式(9)は，$\varphi_n, \psi_n, \chi_n$についての微分方程式であるが，次のように，未知関数χ_nを消去する事ができる。

<u>命題3.1.</u>　φ_n, ψ_nが，微分方程式：

$$\begin{cases} \varphi_n' - \dfrac{1}{\gamma E}\psi_n' + \left(Q - n(\alpha+1) + \dfrac{R}{(n+2)\gamma-1}\right)\varphi_n \\ + R\left(1 - \dfrac{n+2}{(n+2)\gamma-1}\right)\psi_n \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} = Y_{n-1}^{(1)} - a_1 \lambda_n + \dfrac{R S(\vec{Y}_{n-1}, \lambda_n)}{(n+2)\gamma - 1} \\ \gamma \varphi_n' - \psi_n' - (\alpha+1)(\gamma-1)\varphi_n - (\alpha+1)(n+1)\psi_n \\ = Y_{n-1}^{(2)} - a_2 \lambda_n \\ \begin{pmatrix} \varphi_n(0) \\ \psi_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix} \end{array}\right. \tag{10}$$

の解である時,

$$\chi_n = \frac{S - \varphi_n + (n+2)\psi_n}{(n+2)\gamma - 1} \tag{11}$$

とおくと,（φ_n, ψ_n, χ_n）は(9)の解である。ただし,

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{Y}_{n-1}, \lambda_n) &= -\frac{n+1}{n+2}\left(1 - e^{-(\alpha+1)(n+1)\tau}\right)\lambda_n \\ &+ e^{-(\alpha+1)(n+1)\tau}\Big[\int_0^\tau e^{(\alpha+1)(n+1)s}\Big\{-((n+2)\gamma-1)\,Y_{n-1}^{(3)}(s) \\ &+ (n+2)\,Y_{n-1}^{(2)}(s)\Big\}ds + C_n^{(1)} - (n+2)C_n^{(2)} + ((n+2)\gamma-1)C_n^{(3)}\Big] \end{aligned}$$

である。この命題は,(10)(11)を使って直接計算してみる事によって確かめられる。

そこで,以下,方程式(10)を考える事にする。(10)は,正規形:

$$\begin{cases} \vec{U}_n'(\tau) + D_n(\tau)\vec{U}_n(\tau) = \vec{F}_n(\tau) & 0 \leq \tau < \infty \\ \vec{U}_n(0) = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{12}$$

と書きなおす事ができる．ここで

$$\vec{U}_n = (\varphi_n, \psi_n),$$

$$D_n = \frac{E}{1-E}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\gamma E} \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q + \frac{R}{(n+2)\gamma-1} - n(\alpha+1) & R\left(1 - \frac{n+2}{(n+2)\gamma-1}\right) \\ -(\alpha+1)(\gamma-1) & -(\alpha+1)(n+1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_n = \frac{E}{1-E}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\gamma E} \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{n-1}^{(1)} - a_1\lambda_n + \frac{RS}{(n+2)\gamma-1} \\ Y_{n-1}^{(2)} - a_2\lambda_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1^{(n)} \\ F_2^{(n)} \end{pmatrix},$$

である．

線型常微分方程式の理論より，(12)の解 $\vec{U}_n$ は，斉次方程式：

$$\vec{U}' + D_n(\tau)\vec{U} = \vec{0} \tag{13}$$

の基本解行列，$\Phi_n(\tau)$を用いて，

$$\vec{U}_n(\tau) = \Phi_n(\tau)\begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix} + \Phi_n(\tau)\int_0^\tau \Phi_n^{-1}(s)\vec{F}_n(s)ds \tag{14}$$

と表示されるから，$\Phi_n(\tau)$を調べる事によって，(φ_n, ψ_n)が，従って(11)を使えば，(9)の解$(\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$が，$\vec{Y}_{n-1}$で評価される事になる．そこで(13)の基本解行列$\Phi_n(\tau)$を構成しよう。その為に，(13)を単独2階方程式に帰着させよう。次の

ような関数を導入する。

$$\begin{cases} V(\tau) = \dfrac{1}{2(1-E)}\left\{\dfrac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma} + E(Q+(\gamma-1)R+\alpha+1)\right\}, \\ I_n(\tau) = \dfrac{(\alpha+1)E}{1-E}\left\{[Q+(2-\gamma)R] + nQ - (\alpha+1)n(n+1)\right\} + V^2 - dV/d\tau, \\ Y(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau V(s)\,ds. \end{cases}$$

すでに得られている結果[2][8]から，以下の事が分かる。

(i) $\exists C>0,\ \delta>0;\quad |E(\tau)| \leqq C e^{-\delta\tau}$

(ii) $I_n(\tau) \longrightarrow \left\{\dfrac{1}{2}\dfrac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}\right\}^2 \ (\equiv I_\infty)$ as $\tau \to \infty$

(iii) $I_n(\tau) = \dfrac{1}{2} I_\infty$ なる τ を T_n とかくと，

$T_n = O(\log n)$。

さて，次の命題の成立する事が，確かめられる。

<u>命題3.2.</u> w を2階微分方程式：

$$w''(\tau) = I_n(\tau)\,w(\tau) \qquad 0 \leq \tau < \infty \qquad (15)$$

の解とする。この時，

$$u(\tau) = \frac{e^{Y}}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\left[w' + \{V + (\alpha+1)(n+1)\}w\right]$$

$$v(\tau) = \frac{\gamma e^{Y}}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\left[w' + \left\{V - \frac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}\right\}w\right]$$

なる $\vec{U}(\tau) = (u(\tau), v(\tau))$ は，斉次方程式(13)の解である。

次に，2階方程式(15)の基本解を作ろう。

命題 3.3.

方程式(15)は，以下の評価を満足するような，一次独立な解 $w_1^{(n)}$, $w_2^{(n)}$ をもつ。(K_1 は n, τ によらない定数)。

(i) $$|w_1^{(n)}(\tau)|,\ |w_1^{(n)\prime}(\tau)| \leqq \begin{cases} K_1 & (0 \leqq \tau \leqq T_n) \\ K_1\, e^{\int_{T_n}^{\tau}\sqrt{I_n(s)}\,ds} & (T_n \leqq \tau) \end{cases}$$

(ii) $$|w_2^{(n)}(\tau)|,\ |w_2^{(n)\prime}(\tau)| \leqq \begin{cases} K_1 & (0 \leqq \tau \leqq T_n) \\ K_1\, n\, e^{-\int_{T_n}^{\tau}\sqrt{I_n(s)}\,ds} & (T_n \leqq \tau) \end{cases}$$

証明　$\tau \geqq T_n$ のとき，$w_1^{(n)}(\tau)$ を $w'' = I_n(\tau)\,w$ の解で，$w_1^{(n)}(T_n) = 1$　$w_1^{(n)\prime}(T_n) = \sqrt{I_n(T_n)}$ なるものとする．比較定理を用いて，(i)を示せる。$w_2^{(n)}(\tau) = w_1^{(n)}\int_{\tau}^{\infty}\frac{ds}{w_1^{(n)2}}$ とおけば，やはり比較定理により(ii)を得る．$0 \leqq \tau \leqq T_n$ に対しては，もう少し詳しい解析が必要であるが，ここでは割愛する。

さて，定数 $k_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, 2)$ を適当にとり，

$$\begin{cases} u_i^{(n)}(\tau) = \dfrac{e^{Y(\tau)}}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\Big[k_{i1}^{(n)}\big(w_1^{(n)\prime} + (V(\tau)+(\alpha+1)(n+1))w_1^{(n)}\big) \\ \qquad + k_{i2}^{(n)}\big(w_2^{(n)\prime} + (V(\tau)+(\alpha+1)(n+1))\,w_2^{(n)}\big)\Big], \\ v_i^{(n)}(\tau) = \dfrac{\gamma e^{Y(\tau)}}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\Big[k_{i1}^{(n)}\Big(w_1^{(n)\prime} + \Big(V - \dfrac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}\Big)w_1^{(n)}\Big) \end{cases}$$

$$\left. + k_{i2}^{(n)}\left(w_2^{(n)\prime} + \left(\nabla - \frac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}\right) w_2^{(n)}\right)\right] \tag{16}$$

(命題 3.2より，これらの$(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})$は，斉次方程式$\overset{(13)}{}$の解である）が，初期条件：

$$\begin{pmatrix} u_1^{(n)}(0) \\ v_1^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_2^{(n)}(0) \\ v_2^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満すようにとる。このような$k_{ij}^{(n)}$が存在する事は容易に確められる。こうして得られた関数の組$(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})$を用いて，

$$\Phi_n(\tau) = \begin{pmatrix} u_1^{(n)}(\tau) & u_2^{(n)}(\tau) \\ v_1^{(n)}(\tau) & v_2^{(n)}(\tau) \end{pmatrix}$$

なる行列を作れば，Φ_nは方程式(13)の基本解行列である。これを解の公式(14)に代入し、その第2成分を調べれば，

$$\begin{aligned} \psi_n(\tau) &= C_n^{(1)} v_1^{(n)}(\tau) + C_n^{(2)} v_2^{(n)}(\tau) \\ &+ v_1^{(n)}(\tau)\int_0^\tau \frac{1}{\det \Phi_n(s)}\left[F_n^{(1)}(s)\, v_2^{(n)}(s) - F_n^{(2)}(s)\, u_2^{(n)}(s)\right] ds \\ &+ v_2^{(n)}(\tau)\int_0^\tau \frac{1}{\det \Phi_n(s)}\left[-F_n^{(1)}(s)\, v_1^{(n)}(s) + F_n^{(2)}(s)\, u_1^{(n)}(s)\right] ds \end{aligned}$$

となる。（$n \geq 1$ のとき，$(C_n^{(1)}, C_n^{(2)}) = (0,0)$ である事に注意）。$w_\tau^{(2)}$ の性質（命題3.3）及び，$\vec{F}_n$ の具体的な表示を用いて，この式を調べれば，$\psi_n(\tau)$ に関する，n，τ についての評価として，

$$|\psi_n(\tau)| \leqq K_2\Big\{|\psi_n(0)|\overbrace{\,}^{+|\varphi_n(0)|} + \sup_{\tau \geqq 0}|\vec{Y}_{n-1}(\tau)| + |\lambda_n|\Big\}$$

$$|\psi_n'(\tau)| \leqq K_2\, E(\tau)\Big\{|\psi_n(0)|\overbrace{\,}^{+|\varphi_n(0)|.} + \sup_{\tau \geqq 0}|\vec{Y}_{n-1}(\tau)| + |\lambda_n|\Big\}$$

なる不等式が得られる。ここで K_2 は，n，τ によらない定数（以下 K_i でそのような定数を表わすものとする）。
さて，この $\psi_n(\tau)$ を既知として，方程式(10) の第1式を，φ_n についての線型微分方程式とみなす。これは容易に積分できて，$\varphi_n(\tau)$ が τ について有界であるという条件を課せば，λ_n が $\vec{Y}_{n-1}$ に応じて一意的に定まり，そのような λ_n に対して不等式：

$$|\lambda_n|,\ |\varphi_n(\tau)|,\ |\varphi_n'(\tau)| \leqq K_3\Big\{|\varphi_n(0)| + |\psi_n(0)| + \sup_{\tau \geqq 0}|\vec{Y}_{n-1}(\tau)|\Big\}$$

が得られる。更に(11)を用いるなら，　線型方程式(9)の解の評価として，結局次の命題を示せたことになる。

命題 3.4. 線型方程式(9) の解に対し，$\varphi_n(\tau)$ が τ について有界という条件から，λ_n が一意にきまり，さらに不等式：

$$|\varphi_n(\tau)|,\ |\varphi_n'(\tau)|,\ |\psi_n(\tau)|,\ |\psi_n'(\tau)|,\ |\chi_n(\tau)|,$$
$$|\chi_n'(\tau)|,\ |\lambda_n|$$
$$\leqq K_4\Big\{|C_n^{(1)}|+|C_n^{(2)}|+|C_n^{(3)}|$$
$$+\sup_{\tau\geqq 0}|\vec{Y}_{n-1}(\tau)|\Big\}$$

が成立する。

この命題より，$\vec{X}(\tau,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{X}_n(\tau)y^n$，$\Lambda(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n y^n$ は，$\vec{Y}(\tau,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{Y}_n(\tau)y^n$ に対する線型方程式(6) の解となる事が分かる。

§4. 非線型方程式(6) の解の存在

さて，上に得られた線型方程式についての結果を用いて，非線型方程式(6)の解の存在を証明しよう。問題を不動点定理にのせるために，次のような関数空間を定義する。ただし，$\bar{y}\in(0,1)$ を固定し，変数は $0\leqq\tau<\infty$，$0\leqq y\leqq\bar{y}$ とする。

$$\Omega_0=\Big\{\varphi(\tau,y)\ \Big|\ \varphi(\tau,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\tau)y^n,\ \varphi_n(\tau)\in C^1,$$
$$\|\varphi\|_0\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\tau\geqq 0}\{|\varphi_n(\tau)|+|\varphi_n'(\tau)|\}\bar{y}^n<\infty\Big\},$$

$$\Omega_1 = \{ \Lambda(y) \mid \Lambda(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n \quad \|\Lambda\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \bar{y}^n < \infty \},$$

$$\Omega = \{ \mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, \Lambda) \in \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_1, \quad \|\mathbb{X}\| = \|\varphi\|_0 + \|\psi\|_0 + \|\chi\|_0 + \|\Lambda\|_1 \}.$$

ΩがBanach空間となる事は容易に確められる．さて(6)の右辺の非線型項$\vec{Y}$は，(7)から$\mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, \Lambda)$によって定められるが，この対応を$\vec{Y}(\mathbb{X})$と書こう．$\vec{Y}(\mathbb{X})$の持つ性質を調べる必要がある。

<u>命題4.1.</u>　$\mathbb{X} \in \Omega$, $\bar{y}\|\mathbb{X}\| < 1$に対し$\vec{Y}(\mathbb{X})$は

$$\vec{Y}(\mathbb{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_n(\tau) y^n$$

と巾級数に展開され，さらに不等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \ge 0} |\vec{Y}_n(\tau)| \bar{y}^n \le \frac{K_5}{(1-\bar{y}\|\mathbb{X}\|)^2} (\|\mathbb{X}\|^3 + \|\mathbb{X}\|^2)$$

が成りたつ。

次に$\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \Omega$に対し，$\vec{Y}(\mathbb{X}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_n^{(i)}(\tau) y^n$ $(i=1,2)$とかけば，次の命題も成立する.

<u>命題4.2.</u>　$R > 0$, $0 < d < 1$を固定し，$\bar{y}$は$\bar{y}R \le d$を

満すとする．この時，$\mathbb{X}_i \in \Omega$ が $\|\mathbb{X}_i\| \leqq R$ であれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geq 0} \left| \vec{Y}_n^{(1)}(\tau) - \vec{Y}_n^{(2)}(\tau) \right| \eta^n$$

$$\leqq K_6(d) \|\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2\|.$$

ここで $K_6(d)$ は d にのみ依存する定数である。

命題4.1，4.2の証明は，(7)で与えられる非線型項 $\vec{Y}$ の形が複雑であるから，ノルムの定義にもどって，かなりの計算をしなくてはならないので，ここでは省略する。

以上の準備のもとに，問題(6)を，Ωでの作用素の不動点を求める問題として定式化しよう。まず $\mathbb{X} \in \Omega$ が与えられると，(7)により $\vec{Y}(\mathbb{X})$ が定まり，命題4.1より，それは η について巾級数に展開される。次に，このような $\vec{Y}$ に対して，

§3で述べた通り，線型方程式(6)は，η について巾級数であらわされる解をもつ。この解を $\tilde{\mathbb{X}}$ とすれば $\tilde{\mathbb{X}} \in \Omega$ である。すなわち，$\mathbb{X} \in \Omega$ に対し，(6)の解 $\tilde{\mathbb{X}} \in \Omega$ が定まる。この対応を T と書こう。この T が不動点 $\mathbb{X}$ をもつなら，不動点 $\mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, A)$ が，非線型方程式(6)の解となる。そこで，η を適当に小さくとった時，写像 T が Ω 内に不動点をもつ事を証明しよう。それには，以下の2つの命題を

示せばよい。（縮小写像の原理）

(i) γ を適当にとれば，Tは Ω のある閉球 $B=\{\mathbb{X}\in\Omega \mid \|\mathbb{X}\|\leqq R_B\}$ を，それ自身の中へうつす。

(ii) Tは，その閉球 B において縮小的である。すなわち，ある定数 $k\in(0,1)$ が存在して，任意の $\mathbb{X}_i\in B\ (i=1,2)$ に対し，不等式： $\|T\mathbb{X}_1-T\mathbb{X}_2\|\leqq k\|\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2\|$ が成立する。

(i)の証明： $R_B>0$ を $R_B>K_4\|\vec{c}\|_1$，$\alpha\in(0,1)$ を固定し，γ は $\gamma R_B\leqq\alpha$ なるものとする。$\mathbb{X}\in B$ に対し，命題3, 4，4.1より

$$\|T\mathbb{X}\|\leqq K_4\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|\vec{c}_n|\gamma^n+\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\tau\geqq0}|\vec{Y}_n(\tau)|\gamma^n\right\}$$

$$\leqq K_4\|\vec{c}\|_1+\gamma K_4K_5(R_B^3+R_B^2)/(1-\alpha)^2.$$

この右辺は，$R_B>K_4\|\vec{c}\|_1$ であるから，γ を十分小さくとれば，R_B より小さくできる。つまり，このように決めた，R_B, γ に対し，T は B を B 自身の中へ写す事になる。

(ii)の証明　上で定めた R_B, γ を用いる。$\mathbb{X}_i\in B\ (i=1,2)$ とする。この時，$T\mathbb{X}_1-T\mathbb{X}_2$ は，方程式(6)において，右辺の $\vec{Y}$ を $\vec{Y}(\mathbb{X}_1)-\vec{Y}(\mathbb{X}_2)$ に，初期値を $\vec{0}$ としたものの解

であるから，やはり，命題3.4及び4.2が使えて，

$$\|T\mathbb{X}_1 - T\mathbb{X}_2\| \leqq K_4\,\bar{y}\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\tau\geq 0}|\vec{Y}_n^{(1)}(\tau) - \vec{Y}_n^{(2)}(\tau)|\,\bar{y}^n$$

$$\leqq K_4 K_6\,\bar{y}\,\|\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2\|$$

となる。よって，必要なら $\bar{y}$ をさらに小さくとり，$k = K_4K_6 \times \bar{y} < 1$ なるものとすれば，T は B で縮小的である。

こうして，次の定理が得られた。

<u>定理</u> $\bar{y}$ を適当に小さく取れば，方程式(6)は，y について巾級数で表わされる解をもつ。この解 $\varphi, \psi, \chi, \Lambda$ から，式(5)によって，$f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$, $\lambda(y)$ をつくれば，これらは問題(1)(2)(3)の解である。

参考文献

[1] 桜井明：爆風の理論，「ながれ」12（1980）3-12

[2] A. Sakurai : Blast Wave Theory, Basic Development in Fluid Dynamics I, (Academic Press, 1965) 309

[3] V. T. Korobeinikov 他 : The Theory of Explosions, Trans. U.S. Dept. Commerce, FPRS 14 (1962)

[4] G. B. Whitham : Linear and Nonlinear Waves, (Willy 1974)

[5] 東野文男：爆風の理論，「ながれ」5 (1973) 1-18.

[6] G. G. Back & J. H. Lee : Higher-Order Perturbation Solutions for Blast Waves, AIAA Journal, 7 (1969) 742-744.

[7] 桜井明：爆風解の計算，才11回 流体力学講演集 (1977) 174

[8] 桜井明：爆風の伝播及び構造に関する理論的研究．東京電機大学研究報告 3 (1955) 51-96