数理解析研究所講究録
第476巻 1983年 99-110

移流拡散方程式の有限要素近似

（財）電力中央研究所　池田　勉

1．はじめに　　熱対流問題におけるエネルギーの式は、次のような移流拡散方程式によって定式化される：

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathbb{B}\nabla u = a\Delta u + f & \text{in } \Omega \times (0,T) \equiv D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_N, & u = u_b \quad \text{on } \Gamma_D, \\ u = u^0 & \text{in } \Omega \text{ at } t = 0. \end{cases}
$$

ここに，$\mathbb{R}^2 \supset \Omega$ ： polyhedral domain，その境界 $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$，$0 < T$ ： fixed，$0 < a$ ：正定数，$\mathbb{B} \in \{C^1(\bar{\Omega})\}^2$，$f \in C(\bar{D})$，$n$ ：$\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル，$u_b \in C(\bar{\Gamma}_D)$，$u^0 \in C(\bar{\Omega})$ である。

この報告では、(1)の有限要素近似について述べる。

数値解法の作成の際には、安定性・収束性およびそのオーダーの議論だけではなく，連続問題が持つ物理的構造が離散化された問題ではどうなるかにも注目すべきであるという観点から(1)の有限要素近似を考えていく。方程式(1)の滑らかな解 u は、「最大値原理」

$$\min\{\min_{\overline{\Omega}} u^0, \min_{\overline{\Gamma_D}} u_b\} + t\min\{0, \min_{\overline{D}} f\} \le u(x,t)$$

$$\le \max\{\max_{\overline{\Omega}} u^0, \max_{\overline{\Gamma_D}} u_b\} + t\max\{0, \max_{\overline{D}} f\}$$

を満たす。さらに、$\Gamma = \Gamma_N$, $\mathrm{div}\,\mathbb{b} = 0$ in Ω の場合には「保存則」

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\int_\Omega u\,d\Omega = -\int_\Gamma u\,\mathbb{b}\,\mathbb{n}\,d\Gamma + \int_\Omega f\,d\Omega$$

も満たす。たとえば、未知関数 u が温度を表わし、熱入力がない（$f \equiv 0$）場合を考えよう。このとき、(2)は最高温度、最低温度とも境界上の点あるいは初期状態でとられることを示し、(3)は $\mathrm{div}\,\mathbb{b} = 0$ in Ω, $\mathbb{b}\mathbb{n} = 0$ on Γ, 断熱境界条件ならば全熱量が保存されることを示している。最大値原理，保存則とも上記のように物理的に重要な意味を持つので、(1)の離散近似解がこれらの法則の離散アナロジーを満たすかどうかは興味深い問題である。とりわけ、離散最大値原理の成立・不成立は数値計算の安定性にも係わる重要な問題である。

移流速度 $|\mathbb{b}|$ が拡散係数 a に比べて相対的に小さいときに離散最大値原理を満たす計算法を構成するのは比較的容易であるが、$|\mathbb{b}|/a$ が大きい際にも、空間メッシュ巾を厳しく制約しなくても離散最大値原理が成立する計算法を構成するには特別な工夫が必要である。そのような工夫として、差分法

では（i）上流差分法と（ii）人工拡散項を導入する方法が考案されている。一方、領域の形状および節点の位置に対する柔軟性，境界条件の表現の容易さなどの点で優れているため，差分法に代って数値計算の主流になってきた有限要素法に関しても、差分法での工夫（i），(ii）に対応して次のような方法が開発されてきた。

Scheme A. Tabata's upwind scheme [9]

Scheme B. Baba-Tabata's upwind scheme [1]

Scheme C. Kanayama's upwind scheme [7]

Scheme D. Ikeda's artificial viscosity scheme [3]

Scheme E. Ikeda's partial upwind scheme. [5]

これらの解法は、次のような共通の特徴を持つ．

- Galerkin式有限要素法である。すなわち、(1)の弱型式の有限次元アナロジーとして定義される。
- 有限要素分割は弱鋭角型を仮定する。領域を鋭角三角形および直角三角形で分割し、未知関数を各三角形上では線形な連続関数で近似する．
- 時間微分項には質量集中型の近似（区分的定数関数による近似）を用いる。質量集中化の方法としては．

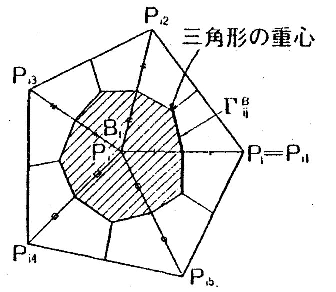

図 1 重心領域 B_i

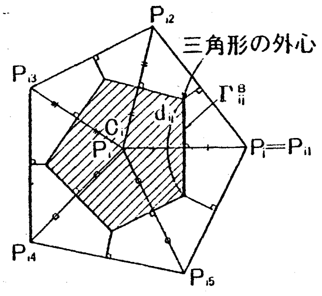

図 2 外心領域 C_i

Scheme A, B では重心領域（図1），Schemes C, D, Eでは外心領域（図2）が用いられる。

○ 全てのスキームの解が空間きざみ巾に対する制約条件なしに，離散最大値原理を満たす。

また、離散保存則は Schemes B, C, D, Eでは満たされるが、Scheme Aでは満たされない。

さて、各スキームの詳細な記述はオリジナルの論文はもとより、池田［4］，Ikeda［5］にも述べてあるので、ここでは、各スキームの特徴だけを述べるにとどめる。

Scheme A. Tabata's upwind scheme

普通のGalerkin近似では、各節点 P_i での ∇w_h の値は P_i の回りの全ての要素上での ∇w_h の値を用いて近似されることになるが、このスキームでは、流速 $\boldsymbol{b}$ に関する上流要素 e_i 上での値だけで $(\nabla w_h)(P_i)$ を表現する。P_i での $\boldsymbol{b}$ に関す

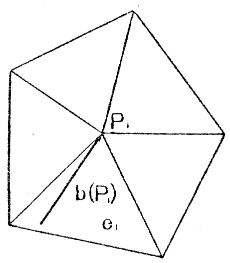

図 3 上流側要素 e_i

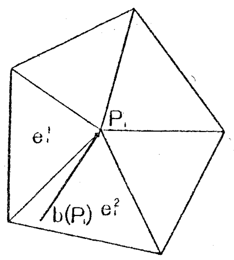

図 4 上流側要素 e_i^1, e_i^2

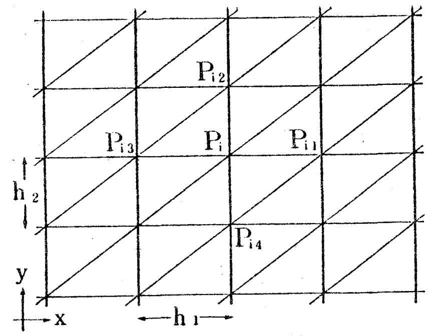

図 5 Friedrichs-Keller 型有限要素分割

る上流要素とは P_i が終点になるようにベクトル $\mathbf{b}(P_i)$ を描いたときに $\mathbf{b}(P_i)$ を含む要素のことである。(図3)上流要素の存在を保障するための条件として、$\mathbf{b}\,n \geq 0$ on Γ_N であることが要求される。このスキームは、$a=0$ の場合(移流方程式)へも適用できる。

流速 $\mathbf{b}$ (b_1, b_2) の成分毎に上流要素 e_i^1, e_i^2 (図4)をとり、$(\partial w_h/\partial x)(P_i)$ は e_i^1 上の値で、$(\partial w_h/\partial y)(P_i)$ は e_i^2 上の値で表現することによって移流項を近似してもよい。この方式をとると、Friedrichs-Keller 型の分割(図5)では、Tabata's scheme は上流差分法と一致する。しかし、Union-Jack 型分割の場合は、上流差分法と一致はしない。

Scheme B. Baba-Tabata's upwind scheme

このスキームは離散最大値原理のみならず離散保存則も成立するように設計されたものである。移流項の近似は次のようにして定められる。

(a) 移流項の弱型式 $\int_\Omega (\mathbb{b}\nabla u)\cdot\phi\, d\Omega$ を

$$\int_\Omega (\phi\, \mathrm{div}(\mathbb{b}u) - \phi u\, \mathrm{div}\,\mathbb{b})\, d\Omega$$

と書き換え、ϕ および第2項の u を重心領域に基づいて質量集中化する。すると，Green の公式によって上記積分は、

$$\sum_i \phi(P_i)\int_{\partial B_i} \mathbb{b}(u - u(P_i))\, \mathbb{n}_i\, d\Omega$$

（$\mathbb{n}_i$ は ∂B_i 上の外向き単位法線ベクトル）

とかける。

(b) 重心領域の境界 ∂B_i 上での未知関数の値をその上流側の節点での値で近似する。

Scheme C. kanayama's upwind scheme

Baba - Tabata's scheme では重心領域を用いて移流項の近似が構成されている。重心領域の代りに外心領域を利用して、Baba - Tabata's scheme と同様な方針によって移流項の近似を構成したのが、kanayama's scheme である。このスキームは上流差分法の不規則メッシュの拡張になっている。実際，図6のような直交格子を用いた分割（Friedrichs - Keller 型分割，

Union-Jack型分割などを含む）の際には，Kanayama's scheme は (1) の上流差分近似と一致する。

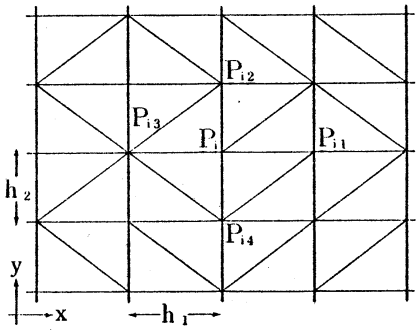

図　6　直交格子を利用した一般的有限要素分割

Scheme D. Ikeda's artificial viscosity scheme

空間一次元のときには、上流差分近似より人工拡散項を導入する方法の方が誤差が小さいことに注目して，人工拡散項を導入する有限要素法を構成したものである。移流項の弱型式は Kanayama's scheme の場合と同様に

$$\sum_i \phi(P_i)\int_{\partial C_i} \mathbf{B}\,(u-u(P_i))\,\tilde{n}_i \; d\Omega$$

（$\tilde{n}_i$ = ∂C_i 上の外向き単位法線ベクトル）

に変形，近似されるが、外心領域の境界 ∂C_i 上での未知関数の値は両側の節点での値の平均値で近似される。これは上流型の近似をしないことを意味している。その代りに、各要素 e ごとに一定値

$$\max\left\{0,\ \frac{1}{2}(e\text{の最大辺長})(e\text{での}\,|\mathbf{B}|\,\text{の最大値}) - a\right\}$$

を拡散係数とする人工拡散項が導入されている。

Ikeda's artificial viscosity scheme は、不規則メッシュの場合への人工拡散項を導入する差分法の拡張になっている。実際、図6のような分割の場合には、Ikeda's sheme は、x, y 両方向に $\max\{0, \frac{1}{\alpha}(h_1^2+h_2^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2)-a\}$ を拡散係数とする人工拡散項を導入する差分近似と一致する。

Scheme E: Ikeda's partial upwind scheme

人工拡散はもとより、上流近似も数値解が"なまる"原因になることはよく知られている。この数値解のなまりをできるだけ小さくすることを目的に考案されたのがこのスキームである。この方法でも移流項の弱型式は(4)に変形・近似されるが、外心領域の境界 ∂C_i 上での未知関数の値は、

$$\beta(\text{上流側節点値}) + (1-\beta)(\text{両側の節点値の平均})$$

で近似される。ここに β は $0 \le \beta \le 1$ なる量で、上流型近似の割合を示す。β の値は離散最大値原理の成立が保障される範囲内での最小値として決定される。そのような β の値は a, $|b|$ などから簡単に計算することができる。なお、Scheme C では $\beta=1$, Scheme D では $\beta=0$ になっていることから、Scheme E は、Scheme C と Scheme D の中間的な手法ともいえ

る。

数値計算例

長方形領域および円環領域でのいくつかの定常問題の数値計算を行った。その結果、

A. 全般的にみて Ikeda's partial upwind scheme の誤差が一番小さい。

B. |b|・(空間きざみ幅) が小さいときには、Ikeda's artificial viscosity scheme による数値解の誤差は upwind

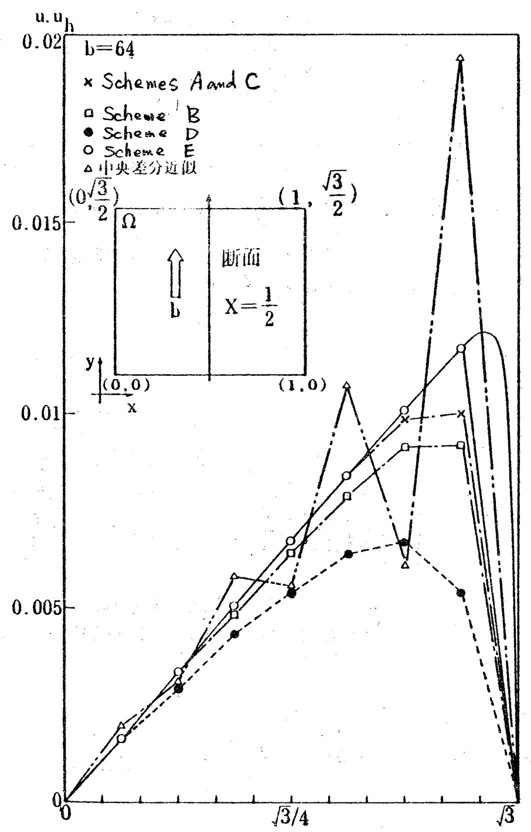

図 7 断面 $x=\frac{1}{2}$ での真の解と x 方向, y 方向を 8 等分したときの数値解 (例題 1, $b=64$)

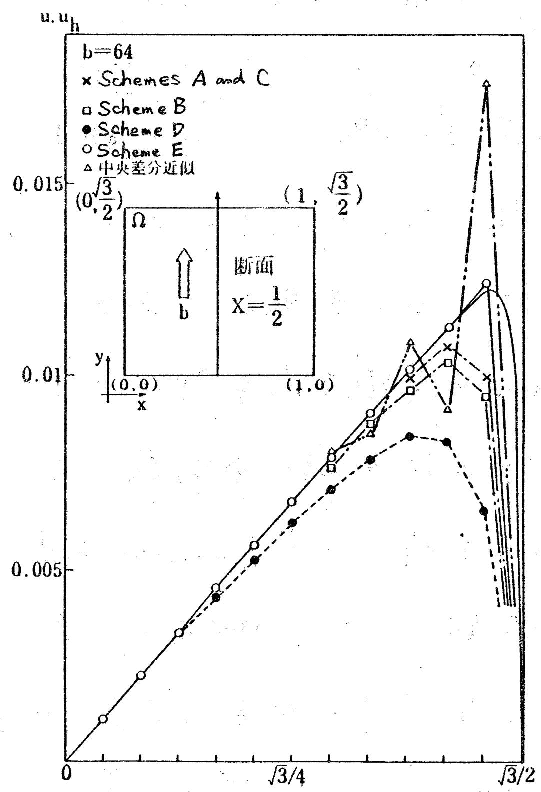

図 8 断面 $x=\frac{1}{2}$ での真の解と x 方向, y 方向を12等分したときの数値解 (例題 1, $b=64$)

Schemes A, B, C のものより小さいが、|h|・(空間きざみ幅)が大きくなるとその関係は逆転する。

ことがわかった。

(例題1)

領域 $\Omega \equiv (0,1)\times(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ として定常問題

$$b\frac{\partial u}{\partial y}=\Delta u+1 \ \text{in}\ \Omega,\quad u|_{\partial\Omega}=0$$

を数値的に解いて、その結果を比較した。(図7~9)

ここに b= 正定数である。

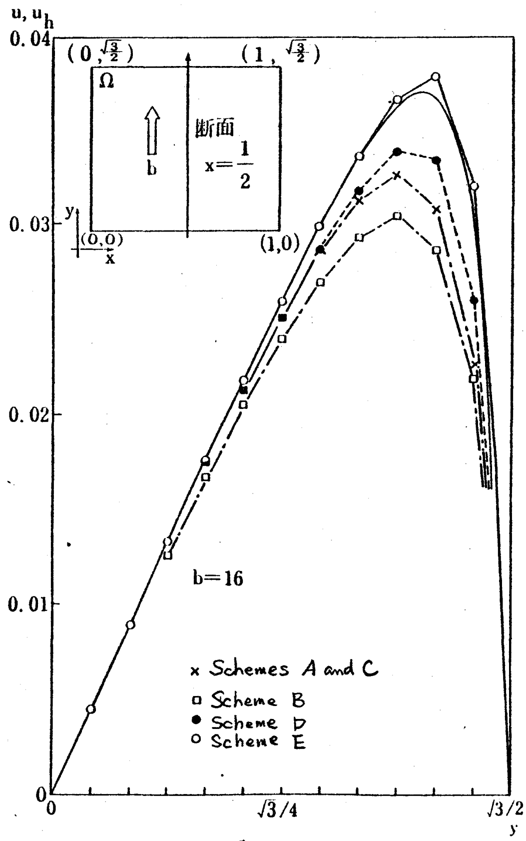

図 9 断面 $x=\frac{1}{2}$ での真の解と x 方向, y 方向を12等分したときの数値解 (例題 1, $b=16$)

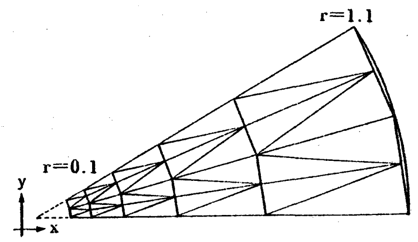

図 10 Ω_1 の有限要素分割例 (r 方向5分割, θ 方向4分割)

領域Ωの有限要素分割はx方向, y方向を同じ分割数で等分割して得られるFriedrichs-Keller型の分割とした。例題1の真の解と数値解の断面 $x=\frac{1}{2}$ での profile を比較したのが図7 (b=64, 8等分), 図8 (b=64, 12等分)、図9 (b=16, 12等分) である。中央差分近似では離散最大値原理が成立しないため、その数値解は振動する(図7, 図8中の△)。

(例題2)

領域 $\Omega \equiv \{(x,y);\ (0.1)^2 < x^2+y^2 < (1.1)^2\}$ として、
定常問題

$$-\frac{bx}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{by}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial y} = \Delta u + 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega}=0$$

に対する数値結果を比較した。ここに、b=正定数である。数値計算に当っては領域およびデータの対称性から、Ωのうち $\Omega_1 = \{(r,\theta);\ 0.1<r<1.1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{6}\}$ をとり出し((r,θ)は極座標系)、付加境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \theta = 0 \quad \text{and} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

を与えた。領域 Ω_1は図10のように有限要素分割した。例題2の真の解と数値解の断面 $\theta = \frac{\pi}{12}$ でのprofileを比較したのが図11($b=64$), 図12($b=16$)である。

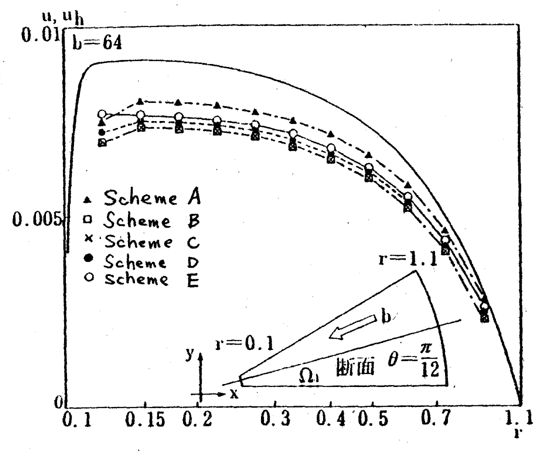

図 11 断面 $\theta=\frac{\pi}{12}$ での真の解と r 方向を12分割，θ 方向を8分割したときの数値解(例題 2, $b=64$)

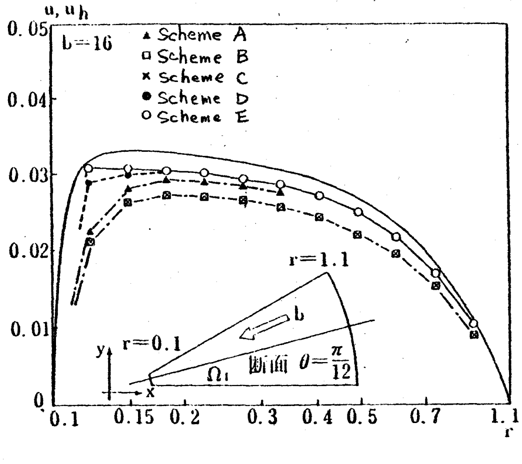

図 12 料面 $\theta=\frac{\pi}{12}$ での真の解と r 方向を12分割，θ 方向を8分割したときの数値解(例題 2, $b=16$)

References

1. K. BABA & M. TABATA, "On a conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equations," R.A.I.R.O. Numerical Analysis, v. 15, 1981, pp. 3-25.

2. P.G. CIARLET & P.A. RAVIART, "General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbf{R}^n$ with applications to finite element methods," Arch. Rational Mech. Anal., v. 46, 1971, pp. 177-199.

3. T. IKEDA, "Artificial viscosity in finite element approximations to the diffusion equation with drift terms," Lecture Note in Num. Appl. Anal., v. 2, 1980, Kinokuniya, pp. 59-78.

4. 池田, "移流を伴う拡散現象の数値解析 ― 空間二次元有限要素法 ―" 電力中央研究所研究報告, 1980.

5. T. IKEDA, "Fnite element approximations for diffusion equation with considerable drift terms," in preparation.

6. T. IWAKI, "Comparison of FEM and triangular FDM in heat conduction problems," Theoretical Appl. Mech., v. 23, 1975, pp. 279-288.

7. H. KANAYAMA, "Discrete models for salinity distribution in a bay: conservation law and maximum principle," Theoretical Appl. Mech., v. 28, 1978, pp. 559-579.

8. F. KIKUCHI, "The discrete maximum principle and artificial viscosity in finite element approximations to convective diffusion equations," Institute of Space and Aeronautical Science Report, No. 550, 1977.

9. M. TABATA, "A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing," Mem. Numer. Math., v. 4, 1977, pp. 47-63.

10. M. TABATA, "Uniform convergence of the upwind finite element approximation for semilinear parabolic problems," J. Math. Kyoto Univ., v. 18, 1978, pp. 327-351.

11. M. TABATA, "L^∞-analysis of finite element method," Lecture Note in Num. Appl. Anal., v. 1, 1979, Kinokuniya, pp. 25-62.

12. M. TABATA, "Some applications of the upwind finite element method," Theoretical Appl. Mech., v. 27, 1979, pp. 277-282.

13. M. TABATA, "Conservative upwind finite element approximation and its application," Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis, (S. Axelsson et al. Ed.), North-Holland, 1981, pp. 369-381.