数理解析研究所講究録
第477巻 1983年 38-56

格子球をすぎるStokes解について

宇都宮大 教養部 増田秀行

(Masuda Hideyuki)

1. 目的

格子点 $n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$（以下 na と略記）に中心を持つ同一半径 a の球をすぎるStokes流の基本的研究は H. Hasimoto (JFM 1959)[1] である。今年になって Zick, Comsy[2] は応力方程式を積分方程式化して高い密度の場合に対しても抵抗を求めた。本研究は H. Hasimoto の設定した路線にそって多重極近似を遂行することを目標とする。境界条件は粘着条件を採用し，直角座標テンソルの代りに球関数表示のテンソルを用いる。後者はプログラム化しやすいとの利点をもつ。

格子 $\{a_i\}$ の逆格子 $\{b_i\}$ によって定まる格子点 $k_1 b_1 + \dots + k_3 b_3$ は k と略記し，また τ は格子点一個を含む単位胞の体積とする。

球は密着していないと仮定する。

格子は　立方晶系に属するものとする。

2. 基礎方程式とポテンシャル。

周期性の利用をしやすくするために球のしめる部分も流体でうずめ、かわりに球内には適当な周期的外力分布 $\mathbf{f}$ を仮定する。流速 $\mathbf{v}$，圧力 p，粘性係数 μ を用いれば Stokes 近似の方程式等は

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} p - \mathbf{f}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & (\text{到るところ}) \\ \mathbf{v}\big|_{\text{表面}} = 0 & \\ \mathbf{f} = 0 & (\text{流体中}) \end{cases} \qquad (1)$$

となる。Fourier 級数になおして考えれば $\mathbf{v}$，$\operatorname{grad} p$，$\mathbf{f}$ が周期的 distribution であるとの仮定のもとで周期的なポテンシャル $\mathbf{g}$ があり

$$\begin{cases} \operatorname{grad} p = -\mathbf{f}_0 + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Delta \mathbf{g} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \dfrac{1}{\mu}\left\{ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g} - \Delta \mathbf{g} \right\} \end{cases}$$

と表わされ，$\mathbf{g}$ は

$$\Delta\Delta \mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_0 \qquad (2)$$

を満すことがわかる。$\mathbf{v}_0$，$\mathbf{f}_0$ は $\mathbf{v}$，$\mathbf{f}$ の Fourier 級数の定数項である。球1個のうける抵抗を $\mathbf{D}$ とすれば

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{D}/a$$

となる。(1)，(2) から流体中の開領域では

$$\Delta\Delta \mathbf{g} = -\mathbf{f}_0$$

となり $\mathbf{g}$ は流体中で解析的となる。

3　多重極近似の根拠

重調和方程式の解についてもつぎの定理が成立する。

「定理1.　中心が原点にあり厚さがゼロでない閉環殻 S_{ab} $=\{P : a \leq OP \leq b\}$ を含む開集合 Ω である定数 f_0 に対して

$$\Delta\Delta u = -f_0$$

となる distribution u は球面調和関数 $\Theta_l^m(\theta,\varphi)$ を用いて $r \leq b$ で絶対一様収束し $\Delta\Delta u_1 = -f_0$ となる

$$u_1 = -f_0 r^4/120 + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{l,m} r^2 + B_{l,m}) r^l \Theta_l^m(\theta,\varphi)$$

と、$r \geq a$ で広義絶対一様収束し $\Delta\Delta u_2 = 0$ となる

$$u_2 = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(C_{lm} r^2 + D_{l,m}) r^{-(l+1)} \Theta_l^m(\theta,\varphi)$$

により S_{ab} で

$$u = u_1 + u_2$$

と表わされる。u_1, u_2 を u の reg.p, sing.p とよぶことにする。」

証明.　$\Delta\Delta$ が楕円型であるから u は実解析的であること。球面上の C^∞ 関数に対して球関展開が一様絶対収束であることと[illegible]で若干の不等式による。

「定理2.　u が periodic で $\Delta\Delta u = -f_0$ ならば $f_0 = 0$ かつ $u = 0$ が成立する。」

定理1の u_1 を u の reg.p, u_2 を u の sing.p とよぶことにする。

環が密着していない場合を考えているので g に対しては、

定理1の閉環殻を考えることができる。ある一つの格子球Pをとりその中心を原点として定理1の分解を考え sing. P を $\mathfrak{g}_{P_2}$ とする。解析的延長を考えていくことにより、つぎの定理をうる。

「定理3　$\mathfrak{g}_{P_2} = 0$ ならば $\mathfrak{g}$ は流体中で定数となり $\mathfrak{f}_0$ はゼロでなければならぬ」

このことは $\mathfrak{f}_0$、つまり抵抗Dをきめた場合 $\mathfrak{g}_{P_2}$ のみで $\mathfrak{g}$ 全体が確定されることを意味する。$\mathfrak{g}_{P_2}$ の各成分と同じ型をもつ解をよせあつめることで $\mathfrak{g}$ を定めようとするのが多重極近似で十分な理論的根拠があると考えられる。

4. 周期的多重極解

以下　球面調和関数は正規化してあるものとし

$$\Theta_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

また $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とする。

また、対応する体調和関数を

$$Y_l^m(\mathfrak{r}) = r^l\,\Theta_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(x, y, z)$$

$\mathbb{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を微分 operator とし $\mathfrak{r} \to \mathbb{D}$ にした

$$Y_l^m(\mathbb{D})$$

なる l 次微分 operator を用いる。

このとき

$$Y_l^m(\mathfrak{r}) = \frac{1}{2\pi i^m l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}(l-m)!(l+m)!}\int_0^{2\pi}(z + ix\cos u + iy\sin u)^l$$

$$\times\ e^{imu}\, du \tag{1}$$

が成立する。[3)]

「定理4 $\quad Y_\ell^m(\mathbb{D})\, r^\lambda = 2^\ell(-1)^\ell \dfrac{\Gamma(\ell-\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}\, r^{\lambda-\ell}\, \mathcal{Y}_\ell^m(\theta,\varphi)$」

が一般のλに対して成立することは(1)を用いて容易に確められる。また $u = -\dfrac{r}{8\pi} \Rightarrow \Delta\Delta u = \delta(\mathbf{r})$ であるから周期性を考慮した重調和, 調和方程式の基本解をもとめそれに $Y_\ell^m(\mathbb{D})$ をほどこせば、所望の sing. p をもつ解が得られるものと想像できる。

周期性のあるとき原始関数は常に存在するとはいえぬため重調和方程式の基本解を定める方程式は

$$\Delta\Delta S = \sum_n \delta(\mathbf{r}-n\mathbf{a}) - 1/v \tag{2}$$

となる。この解はFourier級数としては直に書き表わせて

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{1}{|2\pi\mathbf{k}|^4}\exp(2\pi i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{3}$$

となる。調和の場合をもふくめ一般的な取扱いをするため

$$S_\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} |2\pi\mathbf{k}|^\lambda \exp(i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}) \tag{4}$$

について $|\mathbf{r}|\sim 0$ の近傍で具体的な型をもとめることにする。

(4)の求和には適当な収束因子をつけ, Poisson総和則を用いλについて解析接続して その後に収束因子を取りはずす方針をとる。またPoissonの総和則は各階の導関数が急減小の場合にのみ用いるのが本則であるが, n次元空間の場

$n+1$ 階の導関数まで連続で急減小なら適用できるので、我々の場合つぎの定理を得る。

「定理 5　$\displaystyle\sum_{\mathbb{k}} \varphi(\mathbb{k}) = v \sum_{n} \tilde{\varphi}(n\mathbb{a})$

ただし $\varphi(\xi)$ は 4 階までの導関数は連続・急減小で

$$\tilde{\varphi}(\eta) = \iiint e^{-2\pi i \xi\cdot\eta}\, \varphi(\xi)\, d^3\xi$$

とする」

$$Y_\ell^m(\mathbb{D})\, S_\lambda(\mathbb{r}, \varepsilon) = \sum_{\mathbb{k}\neq 0} |2\pi \mathbb{k}|^\lambda \exp(2\pi i \mathbb{k}\mathbb{r} - \varepsilon|2\pi\mathbb{k}|)\, Y_\ell^m(2\pi i \mathbb{k})$$

とおくと $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 5$ ならば $\sum_{\mathbb{k}\neq 0}$ は $\sum_{\mathbb{k}}$ に置きかえられしかも定理 5 が用いられる。$\tilde{\varphi}$ の計算には平面波の球面波分解、球関数の加法定理等を用いて積分を遂行すると

$$\tilde{\varphi}(\eta) = \frac{1}{v}\, \frac{2^{\lambda+\ell}}{|\mathbb{r}-\eta|^{\lambda+\ell+3}}\, \Theta_\ell^m(\theta, \varphi)\, (-i)^\ell\, \frac{1}{\pi^2}$$

$$\times \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\lambda+2\ell+3}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}\, F\left(\frac{\lambda+2\ell+3}{2}, \frac{\lambda+2}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\varepsilon^2}{|\mathbb{r}-\eta|^2}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{|\mathbb{r}-\eta|}\, \frac{\Gamma(\frac{\lambda+2\ell+4}{2})\,\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda+1}{2})}\, F\left(\frac{\lambda+2\ell+4}{2}, \frac{\lambda+3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\varepsilon^2}{|\mathbb{r}-\eta|^2}\right) \right\}$$

θ, φ は $\eta - \mathbb{r}$ の方位角

となる。$\varepsilon \downarrow 0$ をほどこして有意となるためには $\lambda+\ell+3 > 3$ つまり $\lambda+\ell > 0$ が十分で

「定理 6.　$\lambda + \ell > 0$ のとき

$$Y_\ell^m(\mathbb{D})\, S_\lambda(\mathbb{r}) = \frac{2^{\lambda+\ell}}{\sqrt{\pi}^3}\, \frac{\Gamma(\frac{\lambda+2\ell+3}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \sum_n \frac{Y_\ell^m(\mathbb{r} - n\mathbb{a})}{|\mathbb{r} - n\mathbb{a}|^{\lambda+2\ell+3}}$$

」

を得る。$|\mathbb{r}|\sim 0$ のときの sing p は明らかに所望の型をしている。

しかし重調和：$\lambda=-4$ のとき $l=0,1,2,3,4$ に対しては求和は不成功，調和：$\lambda=-2$ のとき $l=0,1,2$ に対しても不成功であった。種々試みたがこの場合は Hasimoto の方法によるより外になかった。

収束因子を $e^{-\varepsilon|2\pi\mathbb{k}|}$ から $e^{-|2\pi\mathbb{k}|^2\varepsilon}$ にかえ

$$|2\pi\mathbb{k}|^{\lambda} = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}\int_0^\infty \beta^{-\frac{\lambda}{2}-1}\exp(-\beta|2\pi\mathbb{k}|^2)\,d\beta$$

とし

$$\int_0^\infty = \int_0^\alpha + \int_\alpha^\infty$$

と分解して同様な計算をすると

定理 7
$$Y_l^m(\mathbb{D})\,S_\lambda(\mathbb{r}) = -\frac{1}{\tau}\frac{Y_0^0\,\delta_{l,0}}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2}+1)}\alpha^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{2^{l+\lambda}}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}\frac{1}{\sqrt{\pi}^3}$$
$$\times\sum_n Y_l^m(n\mathbb{a}-\mathbb{r})\frac{(-1)^l}{|\mathbb{r}-n\mathbb{a}|^{2l+\lambda+3}}\Gamma\left(\frac{\lambda+2l+3}{2},\frac{|\mathbb{r}-n\mathbb{a}|^2}{4\alpha}\right)$$
$$+\frac{1}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}\sum_{\mathbb{k}\neq 0}Y_l^m(2\pi i\mathbb{k})\,e^{2\pi i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}|2\pi\mathbb{k}|^{\lambda}\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2},|2\pi\mathbb{k}|^2\alpha\right)$$

ただし，$\Gamma(n,x)$ は不完全ガンマ関数で

$$\Gamma(n,x) = \Gamma(n)-\gamma(n,x) = x^{\frac{1}{2}(n-1)}e^{-\frac{x}{2}}W_{\frac{1}{2}(n-1),\frac{1}{2}n}(x)$$

を得る。この計算でも $\lambda+l>0$ のときは定理6と同じ結果と

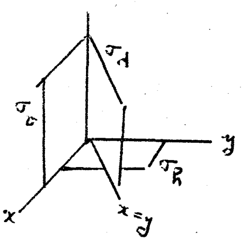
なる。$Re(\lambda)+l \leqq c$ の場合も sing. p は $Re(\lambda)+l>c$ のときと同じ。

これで多重極解の性質は決定できた。

格子が点群 O_h に対して不変な場合，$S_\lambda(k)$ は O_h に対して不変となることは Fourier 級数の形からわかる。点群の要素は直交変換であるから $\mathbb{D}$ と k とは同じ変換の規則に従い点群に対しては $Y_l^m(\mathbb{D})S_\lambda(k)$ は $Y_l^m(k)$ と同じく振まい，また $S_\lambda(k)$ を球関数展開したときの reg. p. は r^l の係数は O_h の恒等表現の基となっている。そのため係数の計算はかなり節約することが可能である。

5. Potential 関数のもつ対称性。

点群 O_h の要素のうち鏡影 σ_v = zx 面で鏡影，$\sigma_d=(x=y)$ 面での鏡影，σ_h = xy 面での鏡影を取り上げる。ただし座標の原点はある球 P の中心とかさねておく。問題の線型性から



$\mathfrak{f}_0=(0,0,D/c)$ の場合をとけば十分である。解に最大の対称性を要求すると $\sigma_v\mathfrak{f}_0=\mathfrak{f}_0$，$\sigma_d\mathfrak{f}_0=\mathfrak{f}_0$，$\sigma_h\mathfrak{f}_0=-\mathfrak{f}_0$ であるから解は σ_v，σ_d に対して不変，従って $\mathfrak{v}_0=(0,0,V)$ となる。ポテンシャル関数 $\mathfrak{g}=(g_x, g_y, g_z)$ が $D=1$ のときの解を定めるとすると，

σ_v 不変性 $\Rightarrow$ $g_x(x,y,z)=g_x(x,-y,z)$

$$g_y(x,y,z)=-g_x(x,-y,z)$$

$$g_z(x,y,z) = g_z(x,-y,z)$$

$$\sigma_d \text{ 不変性} \Rightarrow \begin{cases} g_x(x,y,z) = g_y(y,x,z) \\ g_y(x,y,z) = g_x(y,x,z) \\ g_z(x,y,z) = g_z(y,x,z) \end{cases}$$

$$\sigma_h \text{ 不変性} \Rightarrow \begin{cases} g_x(x,y,z) = -g_x(x,y,-z) \\ g_y(x,y,z) = -g_y(x,y,-z) \\ g_z(x,y,z) = g_z(x,y,z) \end{cases}$$

が成立すると仮定できる。σ_h に対するものがわかりにくいが $Dg(x,y,z)$ に σ_h をほどこすと $f_c = (0,0,-D/2)$ に対する解となることからわかる。

こうして g_x, g_y, g_z のはる関数空間で $R\circ f(r) = f(R^{-1}r)$ なる関数形の変換を考えたとき、g_x, g_y, g_z は

$$\sigma_v\circ(g_x, g_y, g_z) = (g_x, g_y, g_z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_d\circ(g_x, g_y, g_z) = (g_x, g_y, g_z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_h\circ(g_x, g_y, g_z) = (g_x, g_y, g_z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と関数形として変換されていることがわかる。$\sigma_v, \sigma_d, \sigma_h$ は点群 D_{4h} の生成元であるから g_z は D_{4h} の恒等表現の基, g_x g_y は組になって一つの既約表現の基となっている。

$\{\sigma_v, \sigma_d, \sigma_h\}$ は点群 D_{4h} を生成するので g_z は恒等表現を、$\{g_x, g_y\}$ は組になって E とよばれる D_{4h} の2次元既約表現を与えることがわかる。従ってそれに属する $\Theta_l^m(\theta,\varphi)$ の組合せはそれぞれこれ等の既約表現の基の成分に分解する手続き[†] でもとまる。$S_\lambda(r)$ が $D_h(\supset D_{4h})$ に対して不変であるので g_z は $\{Y_{2l}^{4m}(\Theta) + Y_{2l}^{-4m}(\Theta)\} S_\lambda(r)$ の、新 $g_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_x \pm i g_y)$ とおくと $g_\pm$ は $\Sigma\{Y_{2l}^{\pm(4m+1)}(\Theta) S_\lambda(r)\}$ (複号同順) の一次結合であることがわかる。また g_x, g_y, g_z が実であるためには結合の定数は実でなければならない。

6. Potential の有効成分。

我々の問題とするのは g そのものではなくて v, p である。2. でのべた関係から g を

$$g \to g + \mathrm{grad}\,\chi \quad , \quad \Delta\Delta\chi = 0 \quad (\text{流体中})$$

と変換しても v, $\mathrm{grad}\,p$ に変化はない。さらに g に対する $\sigma_{v,h,d}$ の特性を保存しようとすると χ は

$$\sigma_v \chi = \sigma_d \chi = -\sigma_h \chi = \chi$$

を満していればよいことがわかる。χ は D_{4h} に対してこの特性を満足する一次元表現の基でなければならぬ。5. の末尾にのべた手続により χ は $\{Y_{2l+1}^{4m}(\Theta) + Y_{2l+1}^{-4m}(\Theta)\} S_\lambda(r)$ の一次結合であればよい。この修正により g_z の $l \neq 0$ の成分はゼロとおいてよいことがわかる。よって

「定理8 $g_z = A S_{-4}(\mathbb{r}) + C S_{-2}(\mathbb{r})$ とおける。」

g_z の成分には変化はない。ところで g_x には $l=1$ の成分はないので g_x の $iY^{\pm(4m+1)}_{2l}(\mathbb{D})S_{-2}(\mathbb{r})$ 成分は△とおくことで0となり div を通してのみ v, grad p に寄与する。div を計算すると $\left(Y^{4m}_{2l+1}(\mathbb{D}) + Y^{-4m}_{2l+1}(\mathbb{D})\right)S_{-2}(\mathbb{r})$ の定数倍となり $-m$ と m とは寄与が一次従属となる。よって

「定理9

$$g_x = i\sqrt{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=-[l/2]}^{[(l-1)/2]} B_{l,m}\, Y^{\pm(4m+1)}_{2l}(\mathbb{D})\, S_{-4}(\mathbb{r}) + \sum_{m=-[l/2]}^{0} D_{l,m}\, Y^{\pm(4m+1)}_{2l}(\mathbb{D})\, S_{-2}(\mathbb{r})\right\}$$

とおける。」

$\sqrt{4\pi}$ は後の計算の便宜のためつけてある。

定理8,9の未定の係数のうち球の抵抗を1にした場合は $A=1$ となり他を境界条件から決定することになる。各 l についての未知数のかずをまとめると次表の通りとなる。

l	$2l$	g_z $A_{l,m}$	g_z $C_{l,m}$	g_x $B_{l,m}$	g_x $D_{l,m}$	計
0	0	1	1	0	0	$2-1=1$
1	2	0	0	1	1	2
2	4	0	0	2	2	4
3	6	0	0	3	2	5
4	8	0	0	4	3	7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	$2l$	0	0	l	$[\frac{l}{2}]+1$	$[\frac{3l}{2}]+1$

$[x]$ は x をこさない整数の最大である。

7. 速度の球関数成分

$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x \pm i v_y)$ とおき v_z, $v_\pm$ をポテンシャル g からもとめる微分操作を $Y_l^m(D)$ を用いてまとめなおすと、

$$v_z = -\sqrt{\frac{4\pi}{15}}\, Y_2^{-1}(D)\, g_+ + \sqrt{\frac{4\pi}{15}}\, Y_2^{1}(D)\, g_- - \frac{2}{3}\Delta g_z + 2\sqrt{\frac{4\pi}{45}}\, Y_2^{0}(D)\, g_z + V$$

$$v_\pm = -\frac{2}{3}\Delta g_\pm - \sqrt{\frac{4\pi}{45}}\, Y_2^{0}(D)\, g_\pm + \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\, Y_2^{2}(D)\, g_\mp \pm \sqrt{\frac{4\pi}{15}}\, Y_2^{1}(D)\, g_z. \qquad \text{(複号同順)}$$

となる。球関数成分をもとめるには2個の $Y_l^m(r)$ の積を $Y_L^M(r) + r^2 Y_{L'}^{M'} + \cdots$ の型に展開すること、および $Y_L^M(D) S_\lambda(r)$ を球関数に展開することが必要となる。そのためにはつぎの2つの定理が有用である。

「定理[5]

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Theta_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\, \Theta_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi)\, \Theta_{l_3}^{m_3}(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \begin{cases} \left\{\dfrac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}\right\}^{1/2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} & l_1+l_2+l_2 \equiv 0 \pmod 2 \text{ and } m_1+m_2+m_3=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

」

ここで $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ は 3-J symbol とよばれ量子力学で周知のものである。この定理の左辺を $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$ と記すと容易に

「定理10 $Y_{l_1}^{m_1}(\mathfrak{r})\,Y_{l_2}^{m_2}(\mathfrak{r}) = (-1)^{m_1+m_2}\left\{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_1+l_2 \\ m_1 & m_2 & -m_1-m_2 \end{bmatrix} Y_{l_1+l_2}^{m_1+m_2}(\mathfrak{r})\right.$

$$\left. + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_1+l_2-2 \\ m_1 & m_2 & -m_1-m_2 \end{bmatrix} r^2\, Y_{l_1+l_2-2}^{m_1+m_2}(\mathfrak{r}) + \cdots \right\}$$」

を得る。微分 operator にうつるときには r^2 は Δ となる。

「定理 (Helson)

$$Y_{l_1}^{m_1}(\mathbb{D})\, r^n\, Y_l^m(\mathfrak{r})\Big|_{\mathfrak{r}=0} = \delta_{l,l_1}\,\delta_{m+m_1,0}\,\delta_{n,0}\,\frac{(-1)^m\,(2l)!}{(2l)!!}$$」

ところで v_x, v_y, v_z は $\mathbb{D}_{4h}$ に対して g_x, g_y, g_z と同じく振舞うので v_z は $Y_{2l}^{4m}+Y_{2l}^{-4m}$ $v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x+iv_y)$ は Y_{2l}^{4m+1} しか含まない。粘着条件は $v_z=0$, $v_+=0$ だけで十分であるから最終的には $Y_{2l}^{4m}(\mathbb{D})S_\lambda$, $Y_{2l}^{4m+1}(\mathbb{D})S_\lambda$ の球関数成分を決定すればよい。

$S_\lambda(\mathfrak{r})$ $(\lambda=-4,-2)$ は $\mathbb{O}_h$ に対して不変, したがって $\mathbb{D}_{4h}$ に対して不変, しかも実で $\Delta S_\lambda(\mathfrak{r}) = -S_{\lambda+2}$ であるから

$$S_{-4}(\mathfrak{r}) = -\frac{r}{8\pi} - \frac{r^4}{120\,?} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-[l/2]}^{[l/2]}\left(\frac{a_{lm}}{2(4l+3)}r^2 + b_{lm}\right)\sqrt{4\pi}\,Y_{2l}^{4m}(\mathfrak{r})$$

$$S_{-2}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{r^2}{6\,?} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-[l/2]}^{[l/2]}(-a_{lm})\sqrt{4\pi}\,Y_{2l}^{4m}(\mathfrak{r})$$

$a_{l,m} = a_{l,-m}$, $b_{l,m} = b_{l,-m}$, a_{lm} b_{lm} は共に実

となる。 $\varepsilon=0$ または 1 として

$$\sqrt{4\pi}\,Y_{2l}^{4m+\varepsilon}(\mathbb{D})\,S_{-4}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{(4l-3)!!}{2}\,\frac{\sqrt{4\pi}\,Y_{2l}^{4m+\varepsilon}(\mathfrak{r})}{r^{4l-1}}$$

$$+\sum_{L=\epsilon}^{\infty}\sum_{M}\left(\frac{A_{2l,4m+\epsilon;2L,4M+\epsilon}\,r^2}{2(4L+3)}+B_{2l,4m+\epsilon;2L,4M+\epsilon}\right)Y_{2L}^{4M+\epsilon}(r)$$

$$\sqrt{4\pi}\,Y_{2l}^{4m+\epsilon}(D)\,S_{-2}(r)=\frac{1}{4\pi}(4l-1)!!\,\frac{\sqrt{4\pi}\,Y_{2l}^{4m+\epsilon}(r)}{r^{4l+1}}$$

$$-\sum_{L=\epsilon}^{\infty}\sum_{M}A_{2l,4m+\epsilon;2L,4M+\epsilon}\,Y_{2L}^{4M+\epsilon}(r)$$

と展開できることは明らかで適当な $Y_{L'}^{M'}(D)$ をほどこして regular part の $r=0$ での値を比較すれば Hobson の定理で係数 $A_{2l,4m;2L,4M}$ 等を a_{lm}, ℓ_{lm} で表わせる。

例えば

$$B_{2l,4m+1;2L,4M+1}=\sqrt{4\pi}\ \times$$

$$\Bigg\{-\begin{bmatrix}2L & 2l & 2(L+l)\\ -4M-1 & 4m+1 & 4(M-m)\end{bmatrix}\frac{(4l+4L+1)!\ 4L!!}{(4L+1)!\,(4L+4l)!!}\,\ell_{L+l,m-M}$$

$$-\begin{bmatrix}2L & 2l & 2(L+l-1)\\ -4M-1 & 4m+1 & 4(M-m)\end{bmatrix}\frac{(4l+4L-3)!}{(4L+1)!}\,\frac{4L!!}{(4L+4l-4)!!}\,a_{L+l-1,m-M}$$

$$+\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\delta_{L,1}\,\delta_{l,1}\,\delta_{M,0}\,\delta_{m,0}\,\frac{1}{15}\,\frac{1}{2}\Bigg\}$$

等となる。

また a_{lm} は

$$\mathrm{Reg.p}\,Y_{2l}^{-4m}(D)\,S_{-2}(r)\Big|_{r=0}=Y_{2l}^{-4m}(D)\,\mathrm{Reg.p}\,S_{-2}(r)\Big|_{r=0}$$

$$=\frac{4l!}{4l!!}(-a_{lm})=\frac{2^{2l-2}}{\sqrt{\pi}^{3}}\,\Gamma\!\left(\frac{4l-1}{2}\right)\sum_{n}\frac{Y_{2l}^{-4m}(na)}{|na|^{4l+1}}$$

と計算できる。ℓ_{lm} も同様である。$2l+\lambda\leqq 0$ の場合はすこし面倒になる。

8. 境界条件による連立一次方程式。

$r=a$ のところで $v_z=0$，$v_r=0$ ならしめる。v_z, v_r を球関数展開してその成分をゼロならしめればよい。$\mathbf{v}$ と $\mathfrak{y}$ とは点群 D_{4h} に対して同じく振舞うので独立な球関数成分の数は球関数次数が偶数のときに限られその数は次表の通りとなる。

l	$2l$	v_z	v_r	計	
0	0	1	0	1	$-1=0$
1	2	1	1	2	
2	4	2	2	4	
3	6	2	3	5	
4	8	3	4	7	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
l	$2l$	$\left[\frac{l}{2}\right]+1$	l	$\left[\frac{3l}{2}\right]+1$	

$l=0$ のとき 1 を引いたのは $\mathbf{v}_c=(0,0,V)$ の V が未知数となるからである。6.の表とくらべると同じ l で打きった場合未知数 A, C, B_{lm}, D_{lm} の数にくらべて条件の数が常に一つだけ不足する。この間の事情を判然とするため $l=0, 1$ の場合の式を書き上げてみる。球の半径は a と書くとまぎらわしいので $\mathbf{r}$ とした。

$v_z\big|_{r=c}=0$ からは

$$\mu V = A \left\{ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4\pi r} + \frac{r^2}{6a} - a_{00} \right) + \sqrt{\frac{4}{45}} \left(B_{20;20} + \frac{A_{20;20}}{14} r^2 \right) \right\}$$

$$+ C \left\{ -\frac{2}{3}\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{4}{45}}\, A_{20;20} \right\}$$

$$+ B_{1,0} \left\{ \frac{-2}{7\sqrt{3}} A_{20;20} + \frac{2}{a} \right\} + \cdots \qquad (1)$$

$$0 = A \sqrt{\frac{4}{45}} \left\{ \frac{1}{5\pi r} + \left(-\sqrt{5}\, a_{1,0} + B_{20,20} \right) r^2 + \frac{1}{14} A_{20,20}\, r^4 \right\}$$

$$+ C \sqrt{\frac{4}{45}} \left\{ \frac{3}{4\pi r^3} - A_{20;20}\, r^2 \right\}$$

$$+ B_{1,0} \left\{ \frac{1}{12\sqrt{7}\pi} \frac{1}{r^3} - \frac{2}{a} + \frac{-2}{\sqrt{147}} A_{20;20}\, r^2 \right\} + \cdots \qquad (2)$$

を得，$v_r \big|_{r=a} = 0$ からは

$$0 = A \frac{1}{\sqrt{15}} \left\{ \frac{1}{3\pi} \frac{1}{r} + B_{21,21}\, r^2 + \frac{1}{14} A_{21;21}\, r^4 \right\}$$

$$+ C \frac{1}{\sqrt{15}} \left\{ \frac{3}{4\pi r^3} - A_{21;21}\, r^2 \right\}$$

$$+ B_{1,0} \left\{ -\left(2 + \sqrt{\frac{3}{49}} - \sqrt{\frac{6}{49}}\right) \frac{1}{4\pi r^3} + \left(\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{147}} + \sqrt{\frac{2}{147}} \right) A_{21;21} \right\}$$

$$+ \cdots \qquad (3)$$

をうる。(1)は0次球関数成分から，(2)，(3)は2次球関数成分から得られたものである。また

$$A_{20;20} = 15\sqrt{5}\, a_{10}, \quad A_{21;21} = 9\sqrt{5}\, a_{10}$$

$$A_{20,00} = 15\, a_{10}, \quad B_{20,00} = 15\, b_{10} \qquad (4)$$

$$B_{20;20} = 53\, b_{20} + \frac{2\sqrt{5}}{7} a_{10} - \frac{1}{15}\frac{1}{a}$$

$$B_{21;21} = -36\, b_{20} + \frac{\sqrt{5}}{7} a_{10} + \frac{1}{15}\frac{1}{a}$$

である

Aは球のうける抵抗力にひとしい。格子間隔を∞にしたとき $a_{\ell m}$ $b_{\ell m}$ はゼロに $1/\tau$ もゼロになって球のStokes解を与えるべきであるが このときには (2):(3) は $\sqrt{\frac{4}{45}}:\sqrt{\frac{1}{15}}$ となり $C=-\frac{1}{6}r^2A$ とおけば(2)(3)が同時に満足され (1)から $6\pi\mu V = A$ = 抵抗 のStokesの公式を得る。

単独球の場合 条件の不足は条件式の縮退によって厳密解が得られたのである。言葉を換えれば v_z 成分のみについて粘着条件を満足させると 自動的に v_x, v_y の粘着条件が満たされてしまうことになる。しかし格子間隔が有限のとき (2)と(3)の形に類似は見られるが縮退は期待できぬ。

r に対して $O(r^3)$ までの近似をすることにして $C=-\frac{1}{6}r^2A$ を用いれば Hasimoto の Q として

$$Q=\frac{6\pi\mu r V}{A} = 1-(4\pi a_{00}-12\sqrt{5}\,b_{10})r + \left(\frac{4\pi}{3}\frac{1}{2}+\frac{26}{17}\sqrt{5}\,\pi a_{10}\right)r^3 \tag{5}$$

となる。$S_\lambda(\Gamma)$ に対して D_{4h} 不変性のみを要求したために a_{10} b_{10} が残存したが O_h 不変性を要求すると恒等表現の中に2次の球関数が表われない(指標の計算で容易にわかる)ため $a_{10}=b_{10}=0$ となり また定義式から Hasimoto の C は $4\pi a_{00}$ となるため(5)はHasimotoの結果と完全に一致する。

9、結び

多重極近似法は十分追いつめたつもりであるが，条件式の不足をどう技術的に解消すればよいのか最終的な結論に達せなかった。8. の(1)，(2)，(3)式では短縮のため $A_{2l,4m;2L4M}$ 等で $2l$，または $2L$ が4となるものを落してある。そのため D_{1c} の項が脱落し，$A=1$ とおけば(2)，(3)から C，B_{1c} がきまり(1)で V を決定できる形式となっている。しかし高次の場合これに相当する技法はうまくゆかぬ。r の負べキに注目する処理も試算したが目下の所調子がよくない。

多重極として $Y_l^m(\mathbb{D})S_\lambda(\mathbb{E})$ の代りに $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\gamma S_\lambda(\mathbb{E})$ を用いる計算は以前に実行したが，条件式の不足はおなじことであった。またこのときには複雑な漸化式が必要となり確信がもてなかった。$Y_l^m(\mathbb{D})S_\lambda(\mathbb{E})$ を採用すると漸化式に相当するものは 3-J symbol で代用できる。

計算には多小の忍耐が必要であった。その間相談相手となって頂いた徳田尚之教授に感謝する。

本文中「定理」とのべた部分は筆者なりの証明をつけられた命題である。[6),7),8),9)]

$S_\lambda(\mathbb{E})$ の $\mathbb{O}_h$－不変性を完全に利用するには $\mathbb{O}_h$ の球関数による表現行列の成分が必要となる。成書に見当らぬが筆者の計算結果は文献10)にまとめてある。

文　献

1) H. Hasimoto : J. Fluid Mech. 5 (1959) pp. 317 ~ 328.

2) A. A. Zick and G. M. Homsy : J. Fluid Mech. 115 (1982) p.p. 13~16

3) E. T. Whittaker and G. N. Watson : Modern analysis, Cambridge (1935) p. 392

4) L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Quantum Mechanics, Pergamon (1965), p. ~~168~~ 353 (94.20)

5) E. U. Condon and H. Odabasi. Atomic Structure, Cambridge (1980) p. 168.

6) L. Hörmander : Linear Partial Differential Operators, Springer (1964) p. 178

7) Courant - Hilbert : Methods of Mathematical Physics, Interscience (1953) vol. 1 p. 513.

8) L. シュワルツ : 超関数の理論, 岩波 (1971).

9) 金子晃. 定数係数線型偏微分方程式, 岩波基礎数学講座 (1976)

10) H. Masuda : "Representation of the Point Group O_h by Spherical Harmonics", Bulletin of the Fac. Gen. Educ. Utsunomiya Univ. No. 15 (To appear in Dec. 1982)