数理解析研究所講究録
第477巻 1983年 245-257

衝撃波の水中への伝播の問題に対する発展方程式の応用

東京電機大 理工 桜井 明 新井 勉
菅野 敬祐

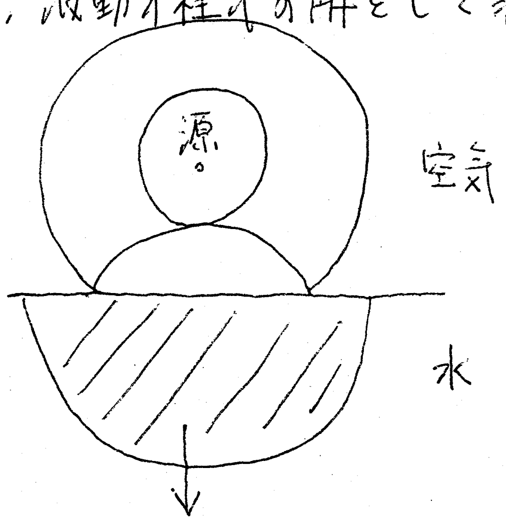
(Sakurai Akira, Arai Tsutomu, Sugano Keisuke)

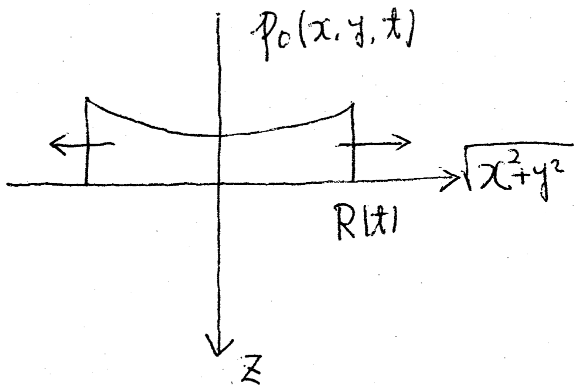
§1. 序

水面上空に置かれた点源(あるいは線源)から発生する球面(あるいは円柱面)衝撃波が水面に達すると，その一部は反射し，残りは水中に伝播する。この時，源の強さが弱いか，あるいは源が充分高いところにあれば，その反射，伝播は，ともに音波として線型理論で扱える。ところが，源が強いと，その水面での反射の様相は非線型性をもち，これを完全に取りあつかう事はむづかしい。しかし，この時でも，水中に伝播する波は大体において音波で近似でき，さらに，波のエネルギーの大部分が反射されるので，水面における圧力は殆んど球面(円柱面)衝撃波の剛体面での反射圧に等しくなっている。

そこで，この現象をモデル化し，水面上($z=0$)での圧力が境界条件として図のような $p_0(x,y,t)$ (x,y,z：位置，t：時間)で与えられるものとし，静水中に生起する圧力 $p(x,y,z,t)$

を，波動方程式の解として求める問題とする：





<u>問題</u>

$$
(1)\quad \begin{cases} \Box\, p = 0 & \Box = \partial^2/\partial t^2 - \Delta \\ p(x, y, z, 0) = p'(x, y, z, 0) = 0 & ' = \dfrac{\partial}{\partial t} \\ p(x, y, 0, t) = p_0(x, y, t) & \end{cases}
$$

この時，圧力 $p_0(x, y, t)$ が滑らかな関数であれば，古典的な解が存在し，それは例へば強さ p_0 の doublet が分布しているとして，

$$
p(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi}\iint p_0(x', y', t')\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\beta}\,dx'dy'
$$

$$
\beta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')+z^2}\ ,\quad t' = t - \beta
$$

とあらわせる。しかし現在の問題では，p_0 は上図のように $\sqrt{x^2+y^2} = R(t)$ で不連続となるので，上のような古典解の公式をそのまま用いる事は出来ない。事実，この公式を使って

形式的に計算すると1)，圧力 p の不連続面や，そこでの微分などがあらわれ，このような場所での様相を詳しく解析する事が出来ない。これ以外の場所においては，1)の結果は物理的には妥当であると考えられるが，しかしそれも明らかな事ではない。

そこで本講では，上記の問題を数学的な観点から考える事にする。すなわち，古典解の概念の拡張である広義解を定義し，その一意的存在を証明する。さらに，広義解のもつ，いくつかの物理的な性質を調べる。広義解の存在は，まずデータを滑らかな関数で近似し，それらに対応する近似解(古典的)をつくり，次に近似解の極限をとる事によって示される。その際，抽象的な発展方程式の理論を応用すると，以上の手順が，見通しよく遂行される。

§2. 広義解

簡単のために空間次元を2とし(円柱面の場合。議論は球面あるいは一般 n 次元でも全く同様に行える)，$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ とおく。$\partial\Omega$ で Ω の境界をあらわす。(1)を，もう少し一般化し，次のような問題を考えよう:

$$
(2)\quad \begin{cases} \square p = f(t,x,y) & t>0 \quad (x,y)\in\Omega \\ p(0,x,y)=u_0(x,y), \quad p'(0,x,y)=u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega \end{cases}
$$

$$\left\{ p(t,x,0) = p_0(t,x), \quad t>0, \ x\in\mathbb{R}. \right.$$

ここで $f(t,x,y)$, $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$, $p_0(t,x)$ は与えられた関数である。

広義解を定義するために，いくつかの関数空間を導入しよう。

$$L^2(\Omega) = \{\Omega \text{ 上で2乗可積分な関数の全体}\}$$

$$H^2(\Omega) = \{\text{2階までの偏導関数が全て } L^2(\Omega) \text{ に属するような関数の全体}\}$$

$$H^1_0(\Omega) = \{u\in L^2(\Omega) \mid \nabla u\in L^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega}=0\}$$

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{u\in \mathcal{D}' \mid (1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}),\ \hat{\ } \text{ は Fourier 変換}\}$$

これらはみな Hilbert 空間になっている。さらに

$$H^{-1}(\Omega) = H^1_0(\Omega) \text{ の共役空間},$$

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ の共役空間}$$

とし，

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u\in C^\infty(\Omega) \mid u \text{ の台は } \Omega \text{ 内のコンパクト集合}\}$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \text{ の共役空間} (\equiv \text{Schwartz の超関数の空間})$$

とする。Hilbert 空間 L^2 を，その共役空間と同一視すれば

これらの空間の間の関係は

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$
$$H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

のようになっている。$(\ ,\ )$で共役対(あるいはL^2－内積)を表わすものとする。Banach空間Xに対し

$$L^2(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \ni t \longmapsto u(t) \in X \;\middle|\; \int_0^T \|u(t)\|^2 dt < \infty \right\}$$

とする。これもBanach空間になり，例へば$L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$の共役空間は$L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$である。

さて，問題(2)において，データf, u_0, u_1, φ_0は次の仮定を満すものとしよう。

仮定 I (i) $f \in L^2(0,\infty;H^{-1}(\Omega))$

(ii) u_0, $u_1 \in H^{-1}(\Omega)$

(iii) $\varphi_0 \in L^2(0,\infty;H^{-1/2}(\partial\Omega))$。

注意 関数は時間tを変数にもち，適当な空間に値をもつベクトル値関数とみなす。

以上のもとに，問題(2)の広義解を次のように定義しよう。

定義 超関数$\varphi(t,x,y)$が以下の(i)(ii)を満足する時，φを問題(2)の広義解と言う。

(i)任意の$T>0$に対し，$\varphi \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,

(iii) 積分等式：

$$\int_0^T (p, \Box v)\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt + (u_1, v(0)) - (u_0, v'(0)) - \int_0^T \left(p_0, \frac{\partial v}{\partial y}(t, x, 0)\right)dt \tag{3}$$

が，任意の $v \in \mathcal{D}^*$ に対し成立する．ただし

$$\mathcal{D}^* = \{ v(t,x,y) \mid v \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)),\ \Box v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),\ v(T) = v'(T) = 0 \}$$

である．

注意(1)　データが滑らかで，p が (2) の古典解（または L^2 の意味での強解）ならば，p は広義解でもある．この事は (2) に v をかけ，Green の公式を用いて部分積分してみればすぐにたしかめられる．

注意(2)　広義解 p は超関数の意味で波動方程式を満足する：$\Box p = 0$ in $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$。実際定義式(3)で $v \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$ とすれば，右辺 $= 0$ となるから。

このような広義解の存在に関して，次の定理が成立する．

定理1　仮定Iのもとで，問題(2)の広義解が，ただ一つ存在する。

証明の概略　まず，データ u_0, u_1, p_0, f に対し，関数列 $u_{0n}, u_{1n} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $p_{0n} \in \mathcal{D}(R^+ \times R)$, $f_n \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$ $(n=1,2\cdots)$ を

$$(4)\quad \begin{cases} u_{0n} \longrightarrow u_0, \quad u_{1n} \longrightarrow u_1 & \text{in } H^{-1}(\Omega), \\ p_{0n} \longrightarrow p_0 & \text{in } L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega)), \\ f_n \longrightarrow f & \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \quad \text{as } n\to\infty \end{cases}$$

のようにえらぶ。

このような，滑らかなデータに対し，波動方程式の初期値境界値問題(2)が，古典解を持つ事は，例へば半群理論等を応用すれば，それ程難かしくなく証明できる。この解を p_n としよう。（p_n は広義解にもなっている事に注意）。

この近似解 p_n が，$n\longrightarrow\infty$ の時に，ある超関数 p に収束する事，そして p が所望の広義解である事，を証明するのであるが，その為に次の補題が必要となる。

補題1. 初期値，境界値問題：

$$(5)\quad \begin{cases} \Box v = g(t,x,y) & 0\le t\le T,\ (x,y)\in\Omega \\ v(T) = v'(T) = 0 & (x,y)\in\Omega \end{cases}$$

$$\left\{\; v|_{\partial\Omega} = 0\right.$$

の解を v_φ とかく．もし非斉次項 φ が $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ ならば，$v_\varphi \in \mathcal{D}^*$ である。

この補題の証明は節末にあげる。

さて，まず $p_n \longrightarrow {}^\exists p\ (n\to\infty)$ in $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$ である事を示そう．p_n は滑らかな解であるから，広義解でもあり従って，データ u_{0n}, u_{1n}, p_{0n}, f_n に対し等式(3)を満足している。さらに，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)\ (\subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))$ に対し，(5)の解 v_φ は $\mathcal{D}^*$ に属しているから，等式(3)で v の代りに v_φ を入れれば，

$$\int_0^T (p_n, \varphi)\,dt = \int_0^T (f_n, v_\varphi)\,dt + (u_{1n}, v_\varphi(0))$$

$$- (u_{0n}, v'(0)) - \int_0^T \left(p_{0n}, \frac{\partial v_\varphi}{\partial \nu}\right) dt$$

となる。

ここで $v_\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $v_\varphi(0)$, $v_\varphi'(0) \in H_0^1(\Omega)$, $\frac{\partial v_\varphi}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} \in L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))$ なる事，及び収束(4)に注意すれば，上式の右辺が $n \longrightarrow \infty$ で収束する事がわかる．超関数の空間は弱完備であるから，これより p_n は，ある p に超関数の意味で収束する事になる。

次に，列 $\{p_n\}$ が $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ で有界なる事を示そう。

任意の $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ に対し，再び(5)の解 $v_\varphi \in \mathcal{D}^*$ を考える。これを広義解の定義式(3)に入れ，さらにトレースの定理：$\left\| \frac{\partial v_\varphi}{\partial \nu} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqq C \| v_\varphi \|_{H^2(\Omega)}$ $(v_\varphi \in H^2(\Omega))$ を用いて右辺を評価すれば，

$$\left| \int_0^T (p_n, \varphi)\, dt \right| \leqq \| f_n \|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \| v_\varphi \|_{L^2(0,T;H_0^1)}$$

$$+ \| u_{1n} \|_{H^{-1}(\Omega)} \| v_\varphi(0) \|_{H_0^1(\Omega)} + \| u_{0n} \|_{H^{-1}(\Omega)} \| v_\varphi'(0) \|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$+ C \| p_{0n} \|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))} \| v_\varphi \|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$$

をうる。ところで(4)より，$\| f_n \|$，$\| u_{1n} \|$，$\| u_{0n} \|$，$\| p_{0n} \|$ は n にかかわらず有界であり，また $v_\varphi \in \mathcal{D}^*$ であるから結局

$$\left| \int_0^T (p_n, \varphi)\, dt \right| \leq C(\varphi) \quad (< \infty)$$

なる評価が得られる。ここに $C(\varphi)$ は n にはよらず，φ に依存して決まる定数である。$L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ が $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ の共役空間である事，及びよく知られた一様有界性定理より，上式から $\| p_n \|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$ が n によらず有界なる事が結論される。

さて $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ の有界列は *－弱位相に関してコン

パクトであるから，$\{p_n\}$ の部分列で $*$-弱収束するものがある。これを $p_{n_k} \longrightarrow \hat{p}$ weakly star in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ とすれば，勿論 $p_{n_k} \longrightarrow \hat{p}$ in $\mathcal{D}'$ でもある。ところで，$p_n \longrightarrow p$ in $\mathcal{D}'$ はすでに分っているから，$\hat{p} = p$ でなくてはならない。またこの極限は，部分列のとり方によらず一意であるから，結局 $p_n \longrightarrow p$ w^* in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ という事になる。

以上をふまえて，p_n に対する等式(3) において $n \to \infty$ とすれば $p \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ が等式(3) を満足する事になり，p は問題(2) の広義解である事が示される。

次に，同じデータに対し広義解が2つ以上あるとし，それ等の中から勝手に p, q をえらぶ。すると等式(3) から

$$\int_0^T (p-q, \square v)\,dt = 0 \qquad \text{for } \forall v \in \mathcal{D}^*$$

となる。これより任意の $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ に対し

$$\int_0^T (p-q, \varphi)\,dt = 0$$

が従がい，$p = q$ in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ となり，広義解の一意性が示された。

定理1の証明終り。

さて，現実の問題(1)に戻ろう。そこでは，データに関し仮定Iよりも強い条件（以下の仮定II）が成立している。

<u>仮定II</u> (i) $f=0$, (ii) $u_0, u_1=0$
(iii) $\phi_0 \in L^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$ であり，次のような関数 $R(t)\in C^2(0,\infty)$ が存在する： $R(0)=0$, $R(\infty)=\infty$, $dR/dt>0$
$d^2R/dt^2<0$, $\dfrac{dR}{dt} \longrightarrow \begin{cases}\infty & t\to 0\\ k & t\to\infty\end{cases}$，（$k\in(0,1)$ は定数）で $\phi_0(t,x)$ の台は集合 $\{(t,x)\mid |x|\leqq R(t)\}$ に含まれる。t_0 を $dR(t_0)/dt=1$ なる点とする。

この時，ϕ の伝播について次の定理が成立する。

<u>定理2</u> 仮定IIが成りたっているとする。ϕ を問題(2)の広義解とする。すると，超関数として $]0,T[\times\Omega\setminus C$ 上で $\phi=0$ である。ただし $C=\{(t,x,y)\in]0,T[\times\Omega \mid \sqrt{x^2+y^2}<t+R(t_0)-t_0\}$。

<u>証明の概略</u> $\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$，$\varphi$ の台 $\subset C$ なる φ に対し，$\int_0^T(\phi,\varphi)\,dt=0$ を示せばよい。これには次の命題が要る。

補題２　$\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$，$\varphi$の台$\subset C$とする。
この時，問題(5)の解v_φは，$v_\varphi = 0$（$]0,T[\times\Omega\setminus C$で）となる。

補題２の証明は，(5)にv'をかけ，Gaussの発散定理を用いて評価する事によってなされる。
さて，十分小さい$\varepsilon>0$に対し，p_{on}の台$\subset\{(t,x)\mid |x|\leq R(t)+\varepsilon\}$とする。補題２により，台が$C$に含まれる$\varphi\in\mathcal{D}$に対し，$v_\varphi$を考える事より，等式(3)から$\int_0^T(p_n,\varphi)dt=0$が導かれる。ここで$n\longrightarrow\infty$とすればよい。

定理２の証明終り。

最後に補題１の証明の指針を述べよう。時間を逆転すればよいから(5)の代りに

$$
(6)\quad\begin{cases}
\Box v = \varphi(t,x,y)\in L^2(0,T;H_0^1) & 0<t<T,\ (x,y)\in\Omega\\
v(0)=v'(0)=0 & (x,y)\in\Omega\\
v|_{\partial\Omega}=0
\end{cases}
$$

を考える。列$\varphi_n\in\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$を$\varphi_n\longrightarrow\varphi$ in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$にとる。非斉次項φ_nに対する(6)の解をv_nとする。発展方程式の解の正則性の理論を用いれば，例へば

$$
\begin{cases}
v_n\in C^2([0,T];H^2\cap H_0^1)\\
v_n'\in C^1([0,T];H_0^1)
\end{cases}
$$

$$\Delta v_n' \in C([0,T]; H_0^1)$$

等を示し得る。この近似解に対し以下のようなa priori estimatesを証明出来る。

(i) v_nに対する方程式(6)にv_n'をかけて積分する事により，

$$\|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)},\ \|v_n'(t)\|_{L^2(\Omega)},\ \|\nabla v_n(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqq C(T)\ \|\varphi_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}。$$

ただし$C(T)$はTにのみ依存する定数.

(ii) 同じく(6)に$-\Delta v_n'$をかけて積分する事により，

$$\|\nabla v_n'(t)\|_{L^2(\Omega)},\ \|\Delta v_n\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqq C(T)\ \|\varphi_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

これらの評価式を用いて，さらに$\varphi_n \longrightarrow \varphi$を使えば$v_n$が(6)の解$v$に収束し，$v \in \mathcal{D}^*$である事が得られる。

参考文献

1) 桜井　明：　多媒質中の衝撃波，日本物理学会誌29巻10号(1974)

2) 溝畑　茂：　偏微分方程式論，　岩波書店(1965)