数理解析研究所講究録
第 480 巻 1983 年 1-11

Strongly compact cardinals and the fixed points of elementary embeddings

筑波大院生 阿部吉弘 (Yoshihiro Abe)

J. Barbanel ([1]) は, κ が supercompact の時に, $P_\kappa\lambda$ 上の normal ultrafilter $\mathcal{U}$ により導かれる elementary embedding $j: V \longrightarrow M \simeq V^{P_\kappa\lambda}/\mathcal{U}$ により fixed される cardinal を特徴づけた。ここでは, κ が strongly compact で, $\mathcal{U}$ が fine であるという弱い条件で, 同じ結果を導く。以下, $\mathcal{U}$, κ, λ を固定し, η は常に cardinal とする。次の Solovay の結果が重要である。([3])

$$\lambda^{<\kappa} = \lambda \quad \text{if} \quad \mathrm{cof}(\lambda) \geqq \kappa,$$
$$\lambda^{<\kappa} = \lambda^+ \quad \text{if} \quad \mathrm{cof}(\lambda) < \kappa$$

notation は standard なものだが, [2] を参照されたい。

§1. On small cardinals

任意の $\eta < \kappa$ については, $j(\eta) = \eta$ である。$\kappa \leq \eta \leqq 2^{\lambda^{<\kappa}}$ の場合について考察する。

Lemma 1. $j(2^{\lambda}) \geqq 2^{\lambda^{<\kappa}}$

(Proof) $\mathcal{P}(P_\kappa\lambda)$ を $F=\{f: P_\kappa\lambda \longrightarrow P_\kappa(P\lambda)\}/U$ に埋めこむことにより証明する。$A\subset P_\kappa\lambda$ に対して，$f_A: P_\kappa\lambda \longrightarrow P_\kappa(P\lambda)$ を，$f_A(x)=\{y\in A \mid y\subset x\}$ で定義する。$g: A\longmapsto [f_A]_U$ が1対1であることを示せばよい。$A, B\subset P_\kappa\lambda$，$A\neq B$ とする。$\exists y\in A\,(y\notin B)$ としてよい。$y\in P_\kappa\lambda$ で，U が fine であることから，$\{x\in P_\kappa\lambda \mid y\subset x\}\in U$． $\therefore \{x\in P_\kappa\lambda \mid y\in f_A(x)\}\in U$．しかし，$y\notin B$ だから $\forall x\in P_\kappa\lambda\,(y\notin f_B(x))$． $\therefore [f_A]_U\neq [f_B]_U$

したがって，g は $\mathcal{P}(P_\kappa\lambda)$ から F への1対1 map である。

$\therefore\quad 2^{\lambda^{<\kappa}} = |\mathcal{P}(P_\kappa\lambda)| \leqq |F| \leqq |F|^M$。 ----- (1)

ここで，F は M での $P_{j(\kappa)}(P j(\lambda))$ を表現することに注意する。

$M\models |F| = (2^{j(\lambda)})^{<j(\kappa)} \wedge j(\kappa)$ is strongly compact. $\wedge\ cf(2^{j(\lambda)}) > j(\kappa)$． Solovay の定理により，$M\models (2^{j(\lambda)})^{<j(\kappa)} = 2^{j(\lambda)} = j(2^{\lambda})$

$\therefore\quad |F|^M = j(2^{\lambda})$ ----- (2)

(1), (2) により $2^{\lambda^{<\kappa}} \leqq j(2^{\lambda})$ ☒

Theorem 1. If $\kappa\leq\eta\leq 2^{\lambda^{<\kappa}}$, then $j(\eta)>\eta$.

(Proof) $j(\kappa)>2^{\lambda}$ であることは良く知られている。(Ref. [3]) $2^{\lambda^{<\kappa}} = 2^{\lambda}$ or $2^{(\lambda^+)}$． $2^{\lambda^{<\kappa}}=2^{\lambda}$ の時は何ら問題はない。$2^{\lambda^{<\kappa}}=2^{(\lambda^+)}>2^{\lambda}$ とする。Lemma 1 により，$j(2^{\lambda})\geq 2^{\lambda^{<\kappa}}$

If $2^{\lambda}\leq\eta\leq 2^{\lambda^{<\kappa}}$， $\eta\leqq 2^{\lambda^{<\kappa}}\leqq j(2^{\lambda})<j(\eta)$． If $\kappa\leqq\eta\leqq 2^{\lambda}$

$\eta \leqq 2^{\lambda} < j(\kappa) \leqq j(\eta)$. ☒

§2. On larger cardinals

$\eta > 2^{\lambda^{<\kappa}}$ の場合を考える。Theorem 2 は[1]による。[1]の証明で，Mが$\lambda^{<\kappa}$-sequence について閉じているという性質を使っていないので，κが strongly compact でも定理が成立するのである。

Theorem 2. $\eta > 2^{\lambda^{<\kappa}}$ とする。ηが次の(1)〜(4)のうちの1つを満足すれば，$j(\eta) = \eta$ である。

(1) $\eta = (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+}$

(2) $\eta = \gamma^{++}$ for some γ

(3) ηが limit cardinal で，$cf(\eta) < \kappa$ or $cf(\eta) > \lambda^{<\kappa}$.

(4) $\eta = \gamma^{+}$ で γが(3)を満たす。

(Proof) 紹介を兼ねて証明を与える。

(1) $j(2^{\lambda^{<\kappa}}) = \overline{\{f \mid f : P_\kappa\lambda \longrightarrow 2^{\lambda^{<\kappa}}\}/U}$ （$\overline{X}$ は Xの order type）

$\therefore |j(2^{\lambda^{<\kappa}})| \leqq (2^{\lambda^{<\kappa}})^{\lambda^{<\kappa}} = 2^{\lambda^{<\kappa}}$ $\therefore$ $j(2^{\lambda^{<\kappa}}) < (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+}$.

$M \models (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+}$ is a cardinal and $j((2^{\lambda^{<\kappa}})^{+}) = j(2^{\lambda^{<\kappa}})^{+M}$

$\therefore$ $(2^{\lambda^{<\kappa}})^{+} \geqq j((2^{\lambda^{<\kappa}})^{+})$ $\therefore$ $j((2^{\lambda^{<\kappa}})^{+}) = (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+}$ ☒

(2) $\eta = \gamma^{++}$ $\gamma^{+} \geqq (2^{\lambda^{<\kappa}})^{+}$ としてよい.

$2^{\lambda^{<\kappa}} < \gamma^{+} \wedge \gamma^{+} > \kappa \wedge cf(\gamma^{+}) > \lambda^{<\kappa} \longrightarrow (\gamma^{+})^{\lambda^{<\kappa}} = \gamma^{+}$

(Ref. [3]) が成り立つ.

$\therefore \quad |j(\gamma^+)| \leqq (\gamma^+)^{\lambda^{<\kappa}} = \gamma^+$

$\therefore \quad j(\gamma^+) < \gamma^{++} = \eta$

$M \models j(\eta) = j(\gamma^+)^+ \wedge j(\gamma^+) < \eta \leqq j(\eta) \wedge \eta$ is a cardinal

$\therefore \quad j(\eta) = \eta \qquad ☒$

(3) (i) $cf(\eta) < \kappa$ の場合

$cf(\eta) = \gamma < \kappa$ とする。$\exists f : \gamma \longrightarrow \eta$ s.t. $\bigcup_{\alpha<\gamma} f(\alpha) = \eta$.

$\wedge\ \forall \alpha < \gamma\ \exists \delta > 2^{\lambda^{<\kappa}} (f(\alpha) = \delta^{++})$.

$j(\eta) = \bigcup_{\alpha < j(\gamma)} j(f)(\alpha)$. $\quad \gamma < \kappa$ だから、$j(\gamma) = \gamma$,

$\forall \alpha < \gamma\ (j(\alpha) = \alpha)$.

$\therefore \quad j(f)(\alpha) = j(f)(j(\alpha)) = j(f(\alpha)) = j(\delta^{++}) = \delta^{++} = f(\alpha)$

$\therefore \quad j(\eta) = \bigcup_{\alpha<\gamma} f(\alpha) = \eta$.

(ii) $cf(\eta) > \lambda^{<\kappa}$ の時.

$j(\eta) > \eta$ と仮定して矛盾を導く. $[f]_U = \eta$ とする。$\eta < j(\eta)$ より

$\forall x \in P_\kappa\lambda\ (f(x) < \eta)$ としてよい. $cf(\eta) > \lambda^{<\kappa} = |P_\kappa\lambda|$ だから、

$\bigcup_{x\in P_\kappa\lambda} f(x) < \eta$. η は limit cardinal だから、$\exists \delta < \eta$. s.t.

$\eta > \delta^{++} > \bigcup_{x\in P_\kappa\lambda} f(x)$. $\quad \forall x \in P_\kappa\lambda\ (f(x) < \delta^{++})$ であり、(2)を用いれば、$[f] < j(\delta^{++}) = \delta^{++} < \eta$. これは $[f] = \eta$ に矛盾する。☒

(4) $\eta = \gamma^+$ とする. $\quad j(\gamma) = \gamma$

$M \models j(\eta) = j(\gamma)^+ \wedge j(\gamma) = \gamma < \eta \leqq j(\eta) \wedge \eta$ is a cardinal.

$\therefore \quad j(\eta) = \eta. \qquad ☒$

残されたのは，次の２つの場合である．

(1) η は limit cardinal で，$\eta > 2^{\lambda^{<\kappa}}$，$\kappa \leqq cf(\eta) \leqq \lambda^{<\kappa}$

(2) $\eta = \gamma^{+}$ で，γ が (1) の条件を満たすとき．

これらについて，ultrapower における具体的な function を与えて，考えていく．

Theorem 3．η が limit cardinal で，$2^{\lambda^{<\kappa}}$ より大きく，$\kappa \leqq cf(\eta) \leqq \lambda^{<\kappa}$ とすれば，$j(\eta) > \eta$ である．

Lemma 2．η は定理の仮定を満たし，特に $\kappa \leqq cf(\eta) \leqq \lambda$ とする．この時 $j(\eta) > \eta$ である．

(Proof)　$j(\eta) = \eta$ と仮定する．$\gamma = cf(\eta)$ とし，$f : \gamma \longrightarrow \eta$ を cofinal function で $\forall \delta < \gamma\ \exists \delta' (2^{\lambda^{<\kappa}} < f(\delta) = \delta'^{++})$ が成立するとする．各 $\delta < \gamma$ に対し $[\langle \delta_x \mid x \in P_\kappa \lambda \rangle]_U = \delta$ で，$\forall x \in P_\kappa \lambda (\delta_x < \kappa)$ を満たすものが存在することが，$\delta \leq \lambda < j(\kappa)$ により保証される．$k : P_\kappa \lambda \longrightarrow V$ を次のように定義する：$k(x) = \{ \langle \delta_x , \bigcup_{\substack{\xi_x = \delta_x \\ \xi \in x \\ \xi < \gamma}} f(\xi) \rangle \mid \delta \in x \wedge \delta < \gamma \}$．定義より

$k(x)$ は function で $|\mathrm{dom}\, k(x)| \leqq |x| < \kappa$

$\therefore$ $M \models [k]$ is a function $\wedge$ $|\mathrm{dom}[k]| < j(\kappa)$ ---- (1)

$|x| < \kappa \wedge \forall \xi < \gamma (f(\xi) < \eta) \wedge \kappa \leq cf(\eta) \longrightarrow \bigcup_{\substack{\xi_x = \delta_x \\ \xi \in x}} f(\xi) < \eta$

$\therefore$ $\mathrm{ran}\, k(x) \subset \eta$.

$\therefore$ $M \models \mathrm{ran}[k] \subset j(\eta) = \eta$ ------ (2)

f は cofinal だから, $\forall \alpha < \eta\ \exists \delta < \gamma\ (\alpha < f(\delta))$.

U は fine だから, $\{x \in P_\kappa\lambda \mid \delta \in x\} \in U$. したがって,

$\{x \in P_\kappa\lambda \mid \delta_x \in \mathrm{dom}\, k(x)\} \in U$. $\therefore$ $\delta \in \mathrm{dom}[k]$. ここで

$k(x)(\delta_x) \geqq f(\delta)$ だから $[k](\delta) \geq j(f(\delta)) = f(\delta) > \alpha$

$\therefore$ $M \models \forall \alpha < \eta\ \exists \delta < \gamma\ (\alpha < [k](\delta))$ ------ (3)

(1) ～ (3) より

$M \models \mathrm{cf}(\eta) < j(\kappa)$ ------ (4)

しかし, $V \models \mathrm{cf}(\eta) \geq \kappa$ だから, $M \models \mathrm{cf}(\eta) = \mathrm{cf}(j(\eta)) \geq j(\kappa)$.

これは (4) と矛盾する。 $\therefore$ $j(\eta) > \eta$ ☒

定義. κ-complete ultrafilter on $P_\kappa\lambda$, W が uniform $\overset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $\forall A \in W\ (|A| = |P_\kappa\lambda|)$.

Remark W: fine $\longrightarrow$ W: uniform.

(Proof) W を fine ultrafilter on $P_\kappa\lambda$ とし, $A \in W$ とする。各 $y \in A$ に対し, $A_y = \{x \in P_\kappa\lambda \mid x \subset y\}$ とする.

W は fine だから, $P_\kappa\lambda = \bigcup_{y \in A} A_y$. $|A_y| \leq 2^{|y|} < \kappa$.

$\therefore$ $|A| = |P_\kappa\lambda| = \lambda^{<\kappa}$. ☒

次の Lemma は, $\mathcal{U}$ が uniform であれば成立する。

Lemma 3　η は定理の仮定を満たし、特に $cf(\eta)=\lambda^+$, $cf(\lambda)<\kappa$ とする。この時 $j(\eta)>\eta$.

(Proof)　$cf(\lambda)<\kappa$ より $|P_\kappa\lambda|=\lambda^{<\kappa}=\lambda^+$ に注意する。

$\{x_\xi \mid \xi<\lambda^+\}$ を $P_\kappa\lambda$ の enumeration とし, $f:\lambda^+\longrightarrow\eta$ を $\forall\delta<\lambda^+\ \exists\delta'\ (2^{\lambda^{<\kappa}}=f(\delta)=\delta'^{++})$ を満たす cofinal map とする。$j(\eta)=\eta$ と仮定して矛盾を導く。

$k: P_\kappa\lambda\longrightarrow V$ を次のように定める。

$$k(x_\xi)=\{<\delta, f(\delta)>\mid\delta<\xi\}$$

$|\mathrm{dom}\,k(x_\xi)|=|\xi|\le\lambda \ \wedge\ \mathrm{ran}\,k(x_\xi)\subset\mathrm{ran}\,f\subset\eta$.

$$\therefore M\models [k] \text{ is a function} \wedge |\mathrm{dom}[k]|\le j(\lambda)$$
$$\wedge\ \mathrm{ran}[k]\subset\eta=j(\eta) \quad\text{-----}\quad (1)$$

$|\{x_\xi \mid \delta<\xi\}^c|=|\{x_\xi\mid\xi\le\delta\}|=|\delta+1|\le\lambda$ for every $\delta<\lambda^+$.

$\mathcal{U}$ は uniform で, $\lambda^{<\kappa}=\lambda^+$ だから, $\{x_\xi\mid\delta<\xi\}\in\mathcal{U}$. したがって、$\{x\in P_\kappa\lambda \mid f(\delta)\in\mathrm{ran}\,k(x)\}\in\mathcal{U}$. $\therefore j(f(\delta))=f(\delta)$ は $\mathrm{ran}\,[k]$ に含まれる。

$$\therefore M\models \mathrm{ran}\,f\subset\mathrm{ran}[k] \quad\text{-----}\quad (2)$$

(1) と (2) により

$$M\models [k] \text{ is cofinal in } \eta \wedge |\mathrm{dom}[k]|\le j(\lambda)$$
$$\therefore M\models \mathrm{cof}(\eta)\le j(\lambda) \quad\text{-----}\quad (3)$$

しかし，$V \models cof(\eta) = \lambda^+$ より $M \models cof(\eta) = cof(j(\eta)) = j(\lambda^+)$

これは(3)と矛盾する。 $\therefore j(\eta) > \eta$. ☒

(Proof of the Theorem)

(i) $cof(\lambda) \geq \kappa$ の時。 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ だから Lemma 2 により，$j(\eta) > \eta$.

(ii) $cof(\lambda) < \kappa$ の時。 $\lambda^{<\kappa} = \lambda^+$ だから，$\kappa \leq cof(\eta) \leq \lambda$ なら Lemma 2 に，$cof(\eta) = \lambda^+$ なら Lemma 3 によって，$j(\eta) > \eta$ となる. ☒

似たような議論を重ねて，次の定理が得られる。

Theorem 4　η は limit cardinal で，$2^{\lambda^{<\kappa}}$ より大きく，$\kappa \leq cof(\eta) \leq \lambda^{<\kappa}$ ならば，$j(\eta^+) > \eta^+$.

Lemma 4.　η は定理の仮定を満たし，特に $\kappa \leq cof(\eta) \leq \lambda$ とする。この時，$j(\eta^+) > \eta^+$.

(Proof) $j(\eta^+) = \eta^+$ と仮定して矛盾を出す。Theorem 3により，$j(\eta) > \eta$. $j(\eta) < j(\eta^+) = \eta^+$ だから，$|j(\eta)| = \eta$.
そこで，g を η から $j(\eta)$ の上への map とする。$cof(\eta) = \gamma$ とし，$\{\alpha_\delta \mid \delta < \gamma\}$ を cofinal sequence in η とする。

また，$\beta<\eta$ に対し，$\delta_\beta=$ the least δ s.t. $\alpha_\delta>\beta$ とする。このとき，$f:P_\kappa\lambda\longrightarrow V$ を 次のように定義する。

$f(x)=\{<\beta,\ g(\beta)_x>\mid\delta_\beta\in x\}$　　ただし，$[<g(\beta)_x\mid x\in P_\kappa\lambda>]=g(\beta)$。明らかに，$M\models[f]$ is a function. ------ (1)

$\forall x\in P_\kappa\lambda(\mathrm{dom}f(x)=\bigcup_{\delta\in x}\{\beta<\eta\mid\delta_\beta=\delta\})$.　$|x|<\kappa\le cof(\eta)$ で，$\{\beta<\eta\mid\delta_\beta=\delta\}\subset\alpha_\delta<\eta$ であるから，$|\mathrm{dom}f(x)|<\eta$.

$\therefore\ M\models|\mathrm{dom}[f]|<j(\eta)$ ------ (2)

$\forall\xi<j(\eta)\ \exists\beta<\eta\ (\xi=g(\beta))$，$U$ は fine で，$\delta_\beta<\gamma\le\lambda$ だから $\forall\beta<\eta(\{x\in P_\kappa\lambda\mid\delta_\beta\in x\}\in U)$. $\therefore\ \forall\beta<\eta\ (\{x\in P_\kappa\lambda\mid g(\beta)_x\in \mathrm{ran}f(x)\}\in U$. i.e. $g(\beta)\in\mathrm{ran}[f]$

$\therefore\ M\models j(\eta)\subset\mathrm{ran}[f]$ ------ (3)

(1)〜(3) により，$M\models j(\eta)$ is not a cardinal. これは明らかに矛盾である。$\therefore\ j(\eta^+)>\eta^+$.　$\boxtimes$

Lemma 5　η は定理の仮定を満たし，特に $cof(\eta)=\lambda^+$, $cof(\lambda)<\kappa$ とすれば，$j(\eta^+)>\eta^+$ である。

(Proof)　$j(\eta^+)=\eta^+$ と仮定する。前の Lemma と同じく，g を η から $j(\eta)$ への onto map とする。$\{x_\xi\mid\xi<\lambda^+\}$ を $P_\kappa\lambda$ の enumeration とし，$\{\alpha_\delta\mid\delta<\lambda^+\}$ を cofinal sequence in η とする。($cof(\lambda)<\kappa$ だから $|P_\kappa\lambda|=\lambda^{<\kappa}=\lambda^+$ である。)

各 $\beta<\eta$ に対し，$\delta_\beta=$ the least δ s.t. $\alpha_\delta>\beta$ とする。

$f : P_\kappa\lambda \longrightarrow V$ を次のように定義する。

$$f(x_\xi) = \{<\beta, g(\beta)_x> \mid \delta_\beta < \xi\}.$$

明らかに，$M \models [f]$ is a function. ----- (1)

$\forall x_\xi \in P_\kappa\lambda \, (\mathrm{dom}\, f(x_\xi) = \bigcup_{\delta<\xi} \{\beta < \eta \mid \delta_\beta = \delta\})$. $\mathrm{cof}(\eta) = \lambda^+ > |\xi|$ で，$\{\beta<\eta \mid \delta_\beta = \delta\} \subset \alpha_\delta < \eta$ だから，$|\mathrm{dom}\, f(x_\xi)| < \eta$.

$\therefore M \models |\mathrm{dom}[f]| < j(\eta)$ ----- (2)

U は uniform だから，$\{x_\xi \in P_\kappa\lambda \mid \delta_\beta < \xi\} \in U$ for every $\beta < \eta$.

$\therefore \{x \in P_\kappa\lambda \mid g(\beta)_x \in \mathrm{ran}\, f(x)\} \in U$ i.e. $g(\beta) \in \mathrm{ran}[f]$.

$\therefore M \models j(\eta) \subset \mathrm{ran}[f]$ ----- (3)

(1)〜(3) により，

$M \models j(\eta)$ is not a cardinal.

これは明らかに矛盾だから，$j(\eta^+) > \eta^+$ である。 ☒

Theorem 4 の証明は Lemma 4.5 により明らかである。以上で，j の fixed points の特徴づけは全て終わった。

[Problem] U が uniform の時は，同じことが言えるだろうか．

《References》

[1] J. B. Barbanel Supercompact cardinals, ele-mentary embeddings and fixed points

Journal of Symbolic Logic. (1982)
[2]. R. Solovay, W. Rheinhaldt, A. Kanamori,
Strong Axioms of infinity and elementary embe-ddings, Ann. of. Math. Logic. (1978)
[3]. R. Solovay, Strongly compact cardinals and the G.C.H., Tarski Symposium. (1971)