数理解析研究所講究録
第 480 巻 1983 年 20-32

Souslin tree の積について

埼玉大理　花沢正純 (Masazumi Hanazawa)

Tree T の元 x の高さ, $ht(x)$, とは T の initial segment $\hat{x}=\{y\in T: y<x\}$ の順序型を指す。高さが α であるような T の元の全体を T_α で表し T の α-level という。高さが α より小さい T の元の全体は $T\restriction\alpha$ で表される。また $A\subseteq T$ であるとき $\{ht(x): x\in A\}$ を A の台と呼ぶことにする。二個の tree T, U の積 $T\otimes U$ は次のようにして与えられる tree を意味する。まず field は $\{\langle t,u\rangle\in T\times U: ht(t)=ht(u)\}$ である。順序は $\langle t_1,u_1\rangle\leqq\langle t_2,u_2\rangle \leftrightarrow t_1\leqq t_2 \wedge u_1\leqq u_2$ である。field をなぜ単純に $T\times U$ としないかについては単に技術上の問題と考えてよい。もともと tree の積は iterated forcing に関連して興味を持たれたものであって forcing に関する限りは $T\otimes U$ でも $T\times U$ でも本質的に同じものだからである。($T\otimes U$ は forcing の意味で $T\times U$ の中で稠密になっている)。さて Souslin tree の特徴は CCC にある。CCC というのはその tree に含まれる antichain は全て高々可算で

あるという条件である。早くから注目されていたSouslin tree Tの性質の一つを示すものとして「T自身はCCCをみたすにもかかわらず、その巾T⊗TはCCCをみたさない」という事実がある。ところが本文で詳しく述べるようにこの事実に対する標準的な証明が与えるT⊗Tの非可算anti-chain Aは大変薄味な集合である。この観察が本稿の内容の動機づけになっている。本稿ではSouslin tree Tの巾T⊗T,更に一般に二つのSouslin tree T, Uの積T⊗Uについて,そのantichainの濃さを眺めてみる。よく御存知の通りZFCのみではSouslin treeの存在性さえも保証されないので本稿の目的のためには何らかの強い仮定を必要とする。本稿ではV＝Lを仮定する。実際には◇で十分である。Souslin treeの存在性を仮定するだけで何処までできるかは面白い問題です。

1. T⊗Tの型の場合、

二つのω_1-tree T, Uの一方がAronszajnならT⊗UもAronszajnになります。しかしここでAronszajnをSouslinに置き換えるとこれは偽命題へと変わります。それどころかSouslin tree Tの巾T⊗Tは常に！Souslinでない。この事実の標準的な証明は次のように行なわれます。

まずTの各元xに対してxの異なる拡張y_x, z_xを同じ高さの所から取ってきます。このとき

$$A = \{\langle y_x, z_x\rangle : x \in T\}$$

とおけばAが非可算なantichainになっている。□

さて、この証明で与えられたantichain Aの注目すべき特徴はAの台がNon-stationaryだということである。

なぜならAの台$S = \{ht(a) : a \in A\}$の各元αに対して、その高さのAの元a_αをひとつずつ選び出して固定する。今、関数$g : S \to \omega_1$を

$$g(\alpha) = ht(x),\ \text{where}\ \langle y_x, z_x\rangle = a_\alpha$$

で定めるとgはS上regressiveである。ところが$x \neq x'$なら$\langle y_x, z_x\rangle \neq \langle y_{x'}, z_{x'}\rangle$であるし，Tの各$\beta$-level T_βは高々可算であるから$g^{-1}\{\beta\}$は高々可算である。従って，pressing down lemma ([K] p.80)によりSはstationaryではあり得ない。□

そこでSouslin tree Tの巾$T \otimes T$のantichainの台は常にNon-stationaryだろうかという疑問が頭をかすめます。しかしその前に確かめて置かねばならぬことがある。それは上の標準的な証明は拙い証明で，うまくやればstationaryなantichainが常に取れるのではなかろうかという疑問です。次の定理はその可能性を消しています。ここでalmost Souslinという

言葉が出てきますが、これはどの antichain の台も Non-stationary だということを意味する言葉です。

<u>定理1</u>. [Jensen] ($\diamondsuit$) $T\otimes T$ が almost Souslin であるような Souslin tree T がある。

筆者は $\diamondsuit^*$ を用いてこれを示したが STEVO TODORČEVIĆ から次の指摘を受けた。その指摘の内容を述べるために、まず…:

<u>定義</u> T が thin tree であるとは, T が $\langle 2^{\omega_1}, \subseteq \rangle$ の subtree であって且つ initial segment でもあって

$$\forall \alpha\ \forall x, y \in T_\alpha\ |\{\beta < \alpha : x(\beta) \neq y(\beta)\}| < \aleph_0$$

をみたすことを意味する。

<u>指摘1</u>. Jensen は ($\diamondsuit^*$ より弱い仮定) $\diamondsuit$ を用いて thin Souslin tree の存在を示した。([DJ] 参照)

<u>指摘2</u>. 実は Souslin tree T が thin ならば $T\otimes T$ は almost Souslin である。

証明 [S. Todorčević] $A = \{\langle t_\alpha, t'_\alpha \rangle : \alpha \in E\}$ を $T\otimes T$ の antichain とする, ここで E は ω_1 の stationary 部分集合で t_α, t'_α は高さが α であるとする。T が Souslin だから, $t_\alpha \neq t'_\alpha$ ($\alpha \in E$) であると初めから仮定しておいてよい。Pressing down lemma からある有限集合 $F \subseteq \omega_1$ とある stationary 集合 $D \subseteq E$ をとると $\{\xi : t_\alpha(\xi) \neq t'_\alpha(\xi)\} = F$ ($\forall \alpha \in D$).
F は有限なので或る stationary 集合 $D' \subseteq D$ をとれば, すべて

$\alpha, \beta \in D'$ について $t'_\alpha \restriction F = t'_\beta \restriction F$。ところで T は Souslin なので $t_\alpha \subseteq t_\beta$ となるような $\alpha < \beta$ を D' の中から見つけられる。このとき F の取り方から $t'_\alpha \subseteq t'_\beta$ を得る。したがって $\langle t_\alpha, t'_\alpha \rangle \leqq \langle t_\beta, t'_\beta \rangle$ を得るが、これは A が antichain であることに反する。□

こういう訳で定理1は◇を仮定するだけで証明されていた。実際、筆者の証明も◇で実行できることがわかった。しかもその方法からもう少し強い結果が出て来た。それを次に挙げる Jensen & Johnsbråten の定理のあとに述べる。

<u>定理2</u>（[JJ]参照）（◇） $\{\langle t, u\rangle \in T\otimes T : t \neq u\}$ が $\mathbb{Q}$ に埋め込める（従って $T\otimes T$ は almost Souslin でない）ような Souslin tree T がある。

以上から，$T\otimes T$ が almost Souslin になるか否かは T 次第というわけである。ところで定理2の $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えると，$T\otimes T$ が almost Souslin でないとは直ちに言えない。事実、次の結果を得た。上述の「もう少し強い結果」である。

<u>定理3</u>、（◇） $\{\langle t, u\rangle \in T\otimes T : t \neq u\}$ が $\mathbb{R}$ に埋め込めてしかも $T\otimes T$ は almost Souslin であるような Souslin tree T が有る。

<u>注意</u>： $\{\langle t, u\rangle \in T\otimes T : t \neq u\}$ は ω_1-tree にさえならないが，$T\otimes T$ の subtree としての tree であり，$\mathbb{Q}$ または $\mathbb{R}$ への

順序を保存する関数という概念は考えられるわけである。

定理3の証明、概略にとどめる。定理6の証明の読了後の方が理解し易いと思う。tree T を tree $\langle {}^{\omega}\omega, \subseteq \rangle$ の initial segment になるように作る。α に関する帰納法で T_α を作る。従って $T|\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ は構築済みとする。$t, u \in {}^{\alpha}\omega$ に対して $\| t, u \|^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\beta < \xi < \alpha} 1/(t(\xi)+1)\cdot(u(\xi)+1)$ と定める。さて T_α は次が成り立つように与えられる；

（1） どんな有限集合 $F \subseteq T_\alpha$, どんな $\beta < \alpha$, どんな t_0 in T_β, どんな正の有理数 q に対しても，次をみたす t を T_α から選ぶことができる：

$$t > t_0 \text{ 且 } \| t, u \|^{\alpha}_{\beta} < q \text{ for all } u \in F,$$

（2） $t_1, t_2 \in T_\alpha$ 且つ $t_1 \neq t_2$ ならば，β を $t_1 \restriction \beta = t_2 \restriction \beta$ をみたす最大の順序数 $< \alpha$ とするとき，$\| t_1, t_2 \|^{\alpha}_{\beta} < \infty$ なり。

さて，まず $T_0 = \{\emptyset\}$, $T_{\beta+1} = \{ x^\frown\langle n \rangle : x \in T_\beta,\ n \in \omega \}$ と定める。次に α が極限数なる場合。α に収束する上昇列 $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$ を一つ固定し，構築済みの $T|\alpha$ と $\mathbb{Q}^+$ の積 $T|\alpha \times \mathbb{Q}^+$ を ω 型に並べあげて $\{ \langle t_n, q_n \rangle : n \in \omega \}$ とする。目的は各 $\langle t_n, q_n \rangle$ に対して次のような $u_n : \alpha \to \omega$ を作ることである：（以下において，$ht(t_n)$ を β_n で表す）

1. $t_n \subseteq u_n$,
2. $\forall k < n \ \| u_k, u_n \|^{\alpha}_{\beta_n} < q_n$

n に関する帰納法で $\alpha_n \leqq \gamma_n < \gamma_{n+1} < \alpha$ をみたす列 $\langle \gamma_n : n \in \omega \rangle$ を定義し、それと平行して $\langle u_k \restriction \gamma_n : k \leqq n \rangle$ 及び $\mathbb{Q}^+$ の元の列 $\langle \tilde{q}_k : k \leqq n \rangle$ を $\tilde{q}_k < q_k$ となるように定めて行く。

$n = 0$ のとき. x_0 を, $x_0 \geqq t_0$ 且 $ht(x_0) \geqq \alpha_0$ 且 ◇によって指定されている $T \restriction \alpha$ の antichain $\diamondsuit_\alpha$ を $\hat{x}_0$ が通過するように, とる。 $\gamma_0 = ht(x_0)$, $u_0 \restriction \gamma_0 = x_0$ と定める。

$n > 0$ のとき、 まず (1) の性質を用いて $y_n^0 \in T_{\gamma_{n-1}}$ を $y_n^0 > t_n$ 且 $\| u_k \restriction \gamma_{n-1}, y_n^0 \|_{\beta_n}^{\gamma_{n-1}} < q_n$ $(k \leqq n-1)$ となるようにとる。(一般性を失わずに $\beta_n = ht(t_n) < \alpha_n$ を仮定している) 次に x_n^0 を $x_n^0 \geqq y_n^0$ & $ht(x_n^0) \geqq \alpha_n$ をみたし, $\hat{x}_n^0$ が $\diamondsuit_\alpha$ を通過するようにとる。(T を Souslin にするためのマジナイです) $ht(x_n^0)$ を δ_0 と置く。各 $k < n$ について x_k^0 を $x_k^0 > u_k \restriction \gamma_{n-1}$ & $ht(x_k^0) = \delta_0$ & $\| x_k^0, x_n^0 \| < q$ & $\forall i < k \ \| x_i^0, x_k^0 \|_{\beta_k}^{\delta_0} < \tilde{q}_k$ をみたすようにとる。こうしてできた x_k^0 $(k \leqq n)$ 達から出発して $i \leqq n$ に関する帰納法で $\{ x_k^i : k \leqq n \}$ を次のように定める。 $i > 0$ のとき x_n^{i-1} と x_{i-1}^{i-1} のそれぞれの拡張 x_n^i, x_{i-1}^i を $ht(x_n^i) = ht(x_{i-1}^i)$ $(= \delta_i$ とおく$)$ & $\| x_n^i, x_{i-1}^i \|_{\beta_n}^{\delta_i} < q$ をみたすようにとる。しかも可能ならば $\langle x_n^i, x_{i-1}^i \rangle \in T \restriction \alpha \otimes T \restriction \alpha$ が D_α (◇によって指定されている $T \restriction \alpha \otimes T \restriction \alpha$ の antichain) の或る元の上方にあるようにとる (T を almost Souslin にするためのマジ

ナイです） $k \neq i-1$ なる $k<n$ については x_k^i を $x_k^i > x_k^{i-1}$ & $ht(x_k^i) = \delta_i$ & $\|x_k^i, x_n^i\| < q_n$ & $\|x_k^i, x_j^i\|_{\beta_k}^{\delta_i} < \tilde{q}_k$ for all $j<k$，をみたすようにとる。 以上で構築終了。

$\gamma_n = \delta_n$ とおき，$u_k \restriction \gamma_n = x_k^n$ $(k \leq n)$ とおき，$\tilde{q}_n$ を $\max\{\|u_k \restriction \gamma_n, u_n \restriction \gamma_n\| : k<n\} < \tilde{q}_n < q_n$ をみたすようにとる。こうして $\{u_n : n \in \omega\}$ が得られるがこれを T_α とおけばよい。 $T = \bigcup T_\alpha$ が目的の tree になっていることの check は省略する。□

2．$T \otimes U$ の型の場合

T，U が Souslin tree であっても $T \otimes U$ は special Aronszajn となることがある（その場合必然的に stationary な台を持つ antichain を含む）。例えば前節の定理2の tree T をとれば比較不可能な二元 $x, y \in T$ を取ると T^x, T^y は共に Souslin で，しかも $T^x \otimes T^y$ は special Aronszajn である。T^x というのは x の拡張の全体を指す。Jensen & Johnsbråten の作った tree においては $T^x \otimes T^y$ が closed unbounded な台を持つ antichain を含むようにさえなっている．残る関心事は $T \otimes U$ 内の antichain が非常に小さくなる場合であるが，それも解決されていて，

<u>定理4.</u> （常識，[K] の92頁参照）（◇） $T \otimes U$ が Souslin であるような Souslin tree の対 T，U がある。

この程度のことはSouslin treeの存在を仮定するだけで導かれるのではないだろうか？　この定理に関しては次のような興味ある結果もある。

定理5. [M. Zakrzewski] (◇) $2^{\aleph_1}$個のSouslin tree T_ξ ($\xi<\omega_1$) が存在して，そのうちのどの有限個の$T_{\xi_1},\cdots,T_{\xi_n}$に対しても$T_{\xi_1}\otimes\cdots\otimes T_{\xi_n}$ がSouslin tree になる。

これら既成定理の形から推して$T\otimes U$がSouslin になるようなTというのは特殊なcategoryを形成するものと考えていた。ところが意外にもそれは否定的だった。

定理6. (◇) どんなSouslin tree Tでもうまく Souslin tree Uを取れば$T\otimes U$がSouslin となるようにできる。

証明. Souslin tree Tを固定する. Tは$({}^{\omega_1\!>}\omega, \subseteq)$の部分treeでinitial segmentになっているとしてよい。このようなtreeを標準的treeと呼ぶ。以下で作るUも標準的treeである。Uを作る際にダイヤモンド◇を用いる。◇というのは，ω_1の長さを持つ集合列$\langle D_\alpha : \alpha<\omega_1\rangle$であって次の性質を持っている。

(*) Uが標準的なω_1-treeで$S\subseteq T\otimes U$であるならば，それらU, Sがどのようなものであろうと◇のどこかα番目に$\{x\in S : ht(x)<\alpha\}$ ($=S_\alpha$と置く)が記載されている。しかもそのような場所αは沢山有る。即ちそのようなαの全

体$\{\alpha : S_\alpha = D_\alpha\}$は$\omega_1$のstationary部分集合をなす。さて$\alpha$に関する帰納法で$U_\alpha$を定義して行く．$U_0 = \{\phi\}$, $U_{\beta+1} = \{x^\frown\langle n\rangle : x \in U_\beta,\ n \in \omega\}$と定める。$Lim(\alpha)$のときが問題。$\alpha$へ収束する上昇列$\langle \alpha_n : n \in \omega\rangle$をとる。Tの$\alpha$-level T_αの元を並べあげて$\langle t_i : i \in \omega\rangle$と置く。帰納法の仮定により$U\restriction\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$（可算集合）はすでに構築済み。$\Diamond$の$\alpha$番目の元$D_\alpha$が$T\restriction\alpha \otimes U\restriction\alpha$の部分集合であると仮定する（そうでない場合は$D_\alpha = T_0 \otimes U_0$とおけ）。$U\restriction\alpha$の各元$y$に対して$u(y) \in {}^\alpha\omega$を定義する。まず$y_0 = y$とおき$U\restriction\alpha$の元から成る上昇列$\langle y_i : i \in \omega\rangle$を（補助的に、$\langle \tilde{y}_i : i \in \omega\rangle$も）帰納的に次の如く定める。$y_n$が定まったとして，$\tilde{y}_n > y_n$を$ht(\tilde{y}_n) > \alpha_n$且つ$\tilde{y}_n \in U\restriction\alpha$にとる。次に$\tilde{y}_n < u$且つ$v < t_n$（$\{t_n : n \in \omega\} = T_\alpha$を思い起こせ）をみたすpair u, vのうち$\langle v, u\rangle \in D_\alpha$なるものがあるときはそのような$u$の一つを$y_{n+1}$と定める。なければ$y_{n+1} = \tilde{y}_n$とする。かくしてできた$y_n$達の和$u(y) = \bigcup_{n\in\omega} y_n$は$\alpha$から$\omega$への関数となる。ここで$U_\alpha = \{u(y) : y \in U\restriction\alpha\}$と定める。以上で$U = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$が定まった。あとは$T \otimes U$がSouslinなることを示すことだけである。（$T \otimes U$がSouslinなら必然的に$U$もSouslinでなければならない。従って$U$がSouslinなることのチェックは不要）そこで，Aが$T \otimes U$

の非可算antichainだったとせよ。Uの各点yに対してTの部分集合 $B_y = \{x \in T : \exists u \in U \ y < u \ \& \ \langle x, u \rangle \in A\}$を考え B_y の極小元の全体をM_yとする。M_y はantichainなので可算集合である（ここでTがSouslinであることを用いる）。従って，次の性質を持つλの全体をCとするとCはω_1 の club subsetとなる：

（1） $\lambda < \omega_1 \ \& \ \mathrm{Lim}(\lambda)$，

（2） $y \in U \ \& \ ht(y) < \lambda \Rightarrow M_y \subseteq T \restriction \lambda$.

ところで$\diamondsuit$の性質から $A_\alpha = \{y \in A : ht(y) < \alpha\}$ と D_α が一致しているようなαはstationaryにある。従って特に $\alpha \in C \ \& \ A_\alpha = D_\alpha$ をみたすαが有る。このαを固定する。Aは非可算であったからαより高いlevelにAの元がある。その元を$\langle t, u \rangle \in T \otimes U$とする，$ht(t) = ht(u) > \alpha$.
U_α の定義のとき用いたT_α の元のenumeration $\langle t_i : i \in \omega \rangle$を持ってくる。$t_n < t$ となる t_n がある。またU_αの元は或る $y \in U \restriction \alpha$を以って $u(y)$ の形で定められている。従って $y \in U \restriction \alpha \ \& \ u(y) < u$ をみたすyがある。さてy_{n+1}の定義を思い起そう，$u(y) = \bigcup_{n \in \omega} y_n$であった。まず $\langle t, u \rangle \in A \ \& \ u > \tilde{y}_n$ であることから $t \in B_{\tilde{y}_n}$である。よって$\exists t' \leqq t$ s.t. $t' \in M_{\tilde{y}_n}$。一方 $ht(\tilde{y}_n) < \alpha$ であるから（$\alpha \in C$ という性質，特に(2),から） $M_{\tilde{y}_n} \subset T \restriction \alpha$ が成立し，$t' \in T \restriction \alpha$を得

る。このことと $t' < t$ & $t_n < t$ & $ht(t_n) = \alpha$ とから $t' < t_n$ を得る。よって次が成り立っている：

$$\exists u' > \tilde{y}_n \ \exists t' < t_n \ \text{s.t.} \ \langle t', u' \rangle \in A$$

ところで $A_\alpha = D_\alpha$ であるから，y_{n+1} の取り方を思い出せば，$y_{n+1} > \tilde{y}_n$ & $\exists t'' < t_n$ s.t. $\langle t'', y_{n+1} \rangle \in D_\alpha = A_\alpha \subseteq A$ 。これはしかし変である．なぜなら $\langle t'', y_{n+1} \rangle < \langle t, u \rangle$ であるにもかかわらず両者とも antichain A の元であるというのだから。□

3、残されている問題．

定理6の型の命題は他のものについても考慮されてよい。すなわち

<u>問題1</u>、どんな Souslin tree T に対してもうまく Souslin tree U をとれば $T \otimes U$ が club の台を持つ antichain を含むようにできるか？

或る T については肯定的であることは既に述べた通りである．（オ2節の冒頭を参照）。次の問題も同様の状況にある。

<u>問題2</u>、どんな Souslin tree T に対しても、うまく Souslin tree U をとれば $T \otimes U$ が special になるか？

もちろん両問とも，少くとも Souslin tree が存在する状況のもとでの解答が希望されている。問題2については「大変に

面白い問題である。多くの人がこの質問を発している。これがV=Lで肯定的に答えられるとJensenのGCH+SHの無矛盾性証明を簡明にできる可能性が高い」とTodorčevićが書き送って来た。 最後に角田譲氏からの質問を挙げておく。

問題3. どんなSouslin tree T, Uの積 T⊗U もSouslinとならないようなnon-trivial (即ちSouslin treeが存在するような) modelがあるか?

面白い問題と思います。iterated forcingのよい演習問題になるかもしれません。(定理4の後の文章と抵触!?)

文　献

[DJ] K.J. Devlin と H. Johnsbråten, The Souslin Problem, Lecture Notes in Math. 405, Springer-Verlag (1974).

[JJ] R.B. Jensen と H. Johnsbråten, A new construction of a non-constructible Δ^1_3 subset of ω, Fund. Math. 81 (1974) 279-290 ; [DJ] pp. 122-125 参照。

[K] K. Kunen, Set Theory, North-Holland (1980)

[Z] M. Zakrzewski, Weak product of Souslin trees can satisfy the CCC, Bull. d. l'Acad. Polon. d. Sci. 29 (1981) 99-102.