数理解析研究所講究録
第 480 巻 1983 年 158-177

PAのM-recursively Saturated Modelについて

筑波大学　坪井明人（Akito Tsuboi）

C. Smorynskiは[4]の中でPeano arithmeticのcountable modelの考察を行ない、いくつかの同型条件、埋蔵可能条件を与えている．同型の証明は通常、"back and forth argument"を用いるが、このためにはある種の"saturation"をmodelに仮定する必要がある．実際[4]に於ても"recursive saturation"という概念を用いている．この"recursive saturation"は"$\aleph_1$-saturation"よりも明らかに弱い条件である．例えば、Peano arithmeticではcountableな$\aleph_1$-saturated modelは存在しないが、recursively saturated modelの存在は簡単に示される．

本稿に於ては、"recursive saturation"の一般化として"M-recursive saturation"（Mは通常、structure.）という概念を導入し、M上同型，M上埋蔵可能となる条件を与える．

以下に於て、PAとはcountable language Lによって構成された1-st order Peano arithmeticで全てのformulaに対する

inductionを含むものとする．$M, N, N_i\ (i\in\omega)$ 等はPAのcountable modelを表わし．通常 M は．$N, N_i\ (i\in\omega)$ 等のsubmodel とする．また．structure と structure の universe は常に同一視する．したがって $a_0, \cdots, a_n \in M$ とは $a_0\in|M| \ \& \cdots \ \& \ a_n\in|M|$ の略記の事である．

定義1．$M\subseteq N$ に対して．N が M-recursively saturated であるとは、$\mathbb{H}\mathrm{F}_M$ 上 Δ_1 である任意の type τ が N で realize されることである．（ここでもちろん M の元を parameter として含む formula は $\mathbb{H}\mathrm{F}_M$ の元で coding されている．）

定義2．$M\subseteq N$ に対して、N が M^s-recursively saturated であるとは．$\mathbb{H}\mathrm{F}_M$ 上 Δ_1 である任意の short type τ（"$x<a$"$\in\tau$ となっているtype）が realize されることである．

定義3．$M\subseteq N$ に対して、

$Th_M(N) = \{\varphi(c_{a_1}\cdots c_{a_n}) : a_1\cdots a_n\in M,\ N\models\varphi[a_1\cdots a_n]\}$,

$Th_M^{\Delta_0}(N) = \{\varphi(c_{a_1}\cdots c_{a_n}) :$ φ は quantifier bounded，$a_1\cdots a_n\in M$，$N\models\varphi[a_1\cdots a_n]\}$,

$SS_M^{\Delta_0}(N) = \{X\cap M :$ X は N で parameter を持った quantifier bounded formula によって definable な N の <u>subset</u> $\}$.

定義4．$A\subseteq N$ に対して，

$Df(N, A) =$ A からの parameter を用いて N で definable な N の <u>element</u> の全体．

以上の概念、表記を用いると定理は次の様に表現される.

定理 1. N_1, N_2 を M-recursively saturated model とし、$Th_M(N_1) = Th_M(N_2)$ かつ $SS_M^{\Delta_0}(N_1) = SS_M^{\Delta_0}(N_2)$ とする. このとき、N_1 と N_2 は M 上同型となる.（すなわち $^{\exists}f : N_1 \xrightarrow{\cong} N_2$ s.t. $f \upharpoonright M = id_M$.）

定理 2. N_1, N_2 を M の cofinal extension（M のどの元よりも大きい元は付け加わっていない extension）とし、ともに M^S-recursively saturated とする. さらに $Th_M^{\Delta_0}(N_1) = Th_M^{\Delta_0}(N_2)$ かつ $SS_M^{\Delta_0}(N_1) = SS_M^{\Delta_0}(N_2)$ が成り立てば、N_1 と N_2 は M 上同型となる.

定理 3. N_1, N_2 を M-recursively saturated model とし、$Th_M(N_1) = Th_M(N_2)$ かつ $SS_M^{\Delta_0}(N_1) = SS_M^{\Delta_0}(N_2)$ とする. さらに A を N_2 の definable な subset で $Df(N_2, M) \cap A = \phi$ を満すものとする. このとき $^{\exists}f : N_1 \xrightarrow{\preceq} N_2$ s.t. $f \upharpoonright M = id_M$ & $ran(f) \cap A = \phi$ となる.

定理 4. N を M-recursively saturated model とする. このとき次の 2 条件は同値である.

i) N は M の elementary extension である,

ii) 各 $b \in N$ $(b > M)$ に対して $ran(f) < b$, $f \upharpoonright M = id_M$ となる elementary embedding $f : N \xrightarrow{\preceq} N$ が存在する.

第 1 章：準備

まず IHF_M の導入及び M-recursiveness, M-recursive saturation 等の概念を正確に定義しよう.

定義 1.1 Aをsetとするとき．

$$HF_A(0)=\phi,$$

$$HF_A(n+1)=\mathcal{P}_{<\omega}(HF_A(n)\cup A)\quad(\mathcal{P}_{<\omega}(B):\text{ Bのfinite subsetの全体.}),$$

$$HF_A=\bigcup_{n\in\omega}HF_A(n).$$

とする．$A=\phi$ のときは、単にHFとかく．Mが structure のときは，$\mathbb{HF}_M$ は $\langle M;HF_M,\in\rangle=\langle M\cup HF_M;M,HF_M,\in\rangle$ なる structureを表わすものとする．さらに $\mathbb{HF}=\langle HF,\in\rangle$ とする．

定義 1.2 $L\subseteq HF$ を finite language とし、MをL-structureとする．このとき $L(M)$ はLに各 $a\in M$ に対応する constant symbol $c_a=\langle a,\phi\rangle\in HF_M$ を付加して出来た language である

定義 1.3 $A\subseteq \mathbb{HF}_M$ が $\mathbb{HF}_M$ の M-recursive subset であるとはAが $\mathbb{HF}_M$ 上 Δ_1 であることである．すなわち適当な set theory の Δ_1-formula Ψ に対して．

$$a\in A\iff \mathbb{HF}_M\models\Psi(a,\bar{b})$$

となることとする．

$L(M)^*$ を $L(M)$ から構成されるformulaの全体とすれば、明らかに、$L(M)^*$ は $\mathbb{HF}_M$ の M-recursive subset である．実際 $L(M)$ は

$\exists y \in TC(x)[P^M(y) \wedge x = \langle y, \phi \rangle]$で表現されるので、後は[1]のIIIと同様.

<u>定義 1.4</u> $M \subseteq N$, $\bar{b} \in N$, $\tau(x, \bar{y}) \subseteq L(M)^*$ とするとき、$\tau(x, \bar{b})$がM-recursive type over N であるとは、

i) $\tau(x, \bar{y})$はM-recursive,

ii) $\tau(x, \bar{b})$はfinitely satisfiable over N

となることとする. また全てのM-recursive type over N がNでrealizeされるとき、NはM-recursively saturated であるという.

<u>定理 1.5</u> $M \subseteq N$に対してNのelementary extension N^*でM-recursively saturated となるものが存在する.

☺ modelの列$\{N_i\}_{i<\omega}$を次の条件

i) $N \prec N_i \prec N_j \quad (i<j)$

ii) $\tau(x, \bar{b})$がN_i上のM-recursive type ならばτはN_{i+1}でrealizeされる.

を満たす様に構成する. $N_0 = N$とする. N_iまで構成されたとしてN_{i+1}を作る.

$$\Gamma \equiv Th_{N_i}(N_i) \cup \bigcup \{\tau_\alpha(c_\alpha, \bar{c}_{\bar{b}}) \mid \tau_\alpha(x, \bar{b}) \text{はM-recursive type}\}$$

とすればcompactnessよりΓはmodelを持つ. これをM_{i+1}とすればよい. 最後に$N^* = \bigcup_{i<\omega} N_i$とすれば、これが求めるmodel. ▨

以上の議論は実は，PAのcountable model に限定しなくても良かった．以下でPAに関係する議論をしよう．

<u>定義 1.6</u>　$M \subseteq N$ に対して．

i)　NはMの end extension ($M \subseteq_e N$) $\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}$ $\forall b \in N [\exists a \in M (b < a) \Rightarrow b \in M]$．拡大が elementary のときは $M \prec_e N$ とかく．

ii)　NはMの cofinal extension ($M \subseteq_c N$) $\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}$ $\forall b \in N \exists a \in M [b < a]$．拡大が elementary のときは $M \prec_c N$ とかく．

<u>定義 1.7</u>　$M \subseteq N$ に対して．

i)　NはM-short $\Leftrightarrow$ $\exists b \in N \forall d \in N \exists e \in Df(N, M \cup \{b\}) [d < e]$.

ii)　type τ が short $\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}$ $\exists b \in N [\text{"}x < c_b\text{"} \in \tau]$

iii)　NはM^s-recursively saturated $\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}$ Nは全てのshort M-recursive type をrealize する．

<u>定義 1.8</u>　function $\ulcorner * \urcorner^M : L(M)^* \to M$ が $L(M)^*$の coding function であるとは、次の2条件を満たすときである：

i)　$\ulcorner * \urcorner^M$は1対1、かつ M-recursive.（graph がM-recursive),

ii)　φ_0がφの subformula ならば $\ulcorner \varphi_0 \urcorner^M < \ulcorner \varphi \urcorner^M$.

coding function は存在する．またある意味で uniform にと

ることができる．実際，$\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner^M = \ulcorner\langle\wedge,\langle\varphi,\psi\rangle\rangle\urcorner^M = \langle\ulcorner\wedge\urcorner^M,\langle\ulcorner\varphi\urcorner^M,\ulcorner\psi\urcorner^M\rangle\rangle$ 等で定義すればよい．ただし最初の $\langle\ ,\ \rangle$ は set theory の pairing function，すなわち $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$ であり後の $\langle\ ,\ \rangle$ は PA における primitive recursive な pairing function である．後者の $\langle\ ,\ \rangle$ が $\mathbb{HF}_M$ に於て Δ_1 で表現できることは，Matjasevic の結果によれば良い．以上の考察のもとに，$\ulcorner * \urcorner^M$ といちいちかかずに単に $\ulcorner * \urcorner$ とかく．（$N_1 \subseteq N_2$ のとき $\ulcorner * \urcorner^{M_1} \subseteq \ulcorner * \urcorner^{M_2}$ とできるから．）

<u>定義 1.9</u>　$M\subseteq N$，$A\subseteq N$，$\Gamma\subseteq L(M)^*$ に対して，

$SS_M^\Gamma(N,A)=\{X\cap M : X$ は A からの parameter を持った Γ- formula によって N で definable な N の subset $\}$，

$\Gamma=L(M)^*$，$A=N$ のときはそれぞれいちいちかかない．また $Y\subseteq L(M)^*$ に対して，

$$Y\in^* SS_M(N) \Leftrightarrow \exists Y^*\in SS_M(N)\,[\,Y=\{\varphi\in L(M)^* : \ulcorner\varphi\urcorner\in Y^*\}\,]$$

とする．

<u>命題 1.10</u>　$\exists b\in N[b>M] \Rightarrow SS_M(N)=SS_M^{\Delta_0}(N)$．

☺ $SS_M^{\Delta_0}(N)\subseteq SS_M(N)$ は定義から明らかだから逆を示す．

$X\in SS_M(N)$ とし，

$$\text{“}a\in X \Leftrightarrow N\models\varphi[a,\bar b]\text{” for } \forall a\in M$$

とする．$N\models PA$ であるから，

$$N \models \forall y \exists z \forall w < y [w \in z \leftrightarrow \varphi[w, \bar{b}]]$$

となる．ここで"$w \in z$"は z の binary expansion の中に 2^w があらわれることを示す formula．したがって適当な $d \in N$ によって，

$$\text{"} N \models \varphi[a, \bar{b}] \Leftrightarrow N \models a \in d \text{"} \quad \text{for } {}^{\forall} a < b$$

$$\therefore \text{"} N \models \varphi[a, \bar{b}] \Leftrightarrow N \models \underbrace{a \in d}_{\Delta_0} \text{"} \quad \text{for } {}^{\forall} a \in M \quad ▨$$

<u>定義 1.11</u>　$M \subseteq N$，$\Gamma \subseteq L(M)^*$ に対して，

i)　$Th_M(N) = \{\varphi \in L(M)^* : N \models \varphi\}$

ii)　$Th_M^{\Gamma}(N) = \{\varphi(c_{a_1} \cdots c_{a_n}) : a_1 \cdots a_n \in M, \varphi \in \Gamma, N \models \varphi[a_1 \cdots a_n]\}$

<u>定義 1.12</u>　$\Gamma \subseteq L(M)^*$ に対して、$Tr_{\Gamma}(x, y)$ が M における Γ の truth definition であるとは，

$$\text{"} M \models Tr_{\Gamma}[\ulcorner\varphi\urcorner, a] \leftrightarrow \varphi[(a)_1 \cdots (a)_n] \text{"} \quad \text{for } {}^{\forall}\varphi \in \Gamma, {}^{\forall} a \in M.$$

が成り立つこととする．ここで $(x)_y$ は x の binary expansion の y 番目の index をあらわす．

$\Delta_0(M)$ は $L(M)^*$ の subset で bounded quantifier のみを持つ formula 全体．$\Sigma_n(M)$ は $L(M)^*$ の subset で $\exists x_1 \forall x_2 \cdots Q_n x_n \varphi$（$\varphi$ は $\Delta_0(M)$-formula）の形の formula 全体とする．このとき、明らかに $\Sigma_n(M)$ に対しては Truth definition が存在する．

定義 1.13 $M \subseteq N_1, N_2$ に対して

i) partial function $f : N_1 \to N_2$ が partial elementary embedding であるとは "$N_1 \models \varphi[\bar{a}] \Rightarrow N_2 \models \varphi[f\bar{a}]$" for ${}^{\forall}\varphi$, $\bar{a} \in \mathrm{dom}(f)$ が成り立つことである.

ii) $\mathrm{Emb}(N_1, N_2; M) = \{f : N_1 \to N_2 \mid f$ は elementary embedding で $f \upharpoonright M = id_M\}$, $\text{P-Emb}(N_1, N_2; M) = \{f : N_1 \to N_2 \mid f$ は partial elementary embedding で $f \upharpoonright M = id_M$, さらに $\mathrm{dom}(f) - M$ は有限個$\}$

$\mathrm{Isom}(N_1, N_2; M) = \{f : N_1 \to N_2 \mid f$ は isomorphism で $f \upharpoonright M = id_M\}$.

次の2つの定理はともに Splitting Theorem と呼ばれている.

定理 1.14 (Elementary Splitting Theorem : Folklore ?)

$M \prec N \Rightarrow {}^{\exists}N^*$ s.t. $M \prec_c N^* \prec_e N$.

∵ $N^* = \{a \in N \mid {}^{\exists}b \in M \text{ s.t. } a < b\}$ とすれば, $M \subseteq_c N^* \subseteq_e N$ は明らか. $a \in N^*$ として $N \models \exists x \varphi(x, a)$ とする. $b \in M$ を $a < b$ なるものとすれば

$$N \models \forall y < b \, \exists z \, [(\exists x \varphi(x, y) \to \varphi(z, y)) \wedge (\neg \exists x \varphi(x, y) \to z = 0)]$$

$$\therefore M \models \forall y < b \, \exists z \, [(\exists x \varphi(x, y) \to \varphi(z, y)) \wedge (\neg \exists x \varphi(x, y) \to z = 0)]$$

$$\therefore M \models \forall y < b \, \exists z < d \, [(\exists x \varphi(x, y) \to \varphi(z, y)) \wedge (\neg \exists x \varphi(x, y) \to z = 0)]$$

$$\therefore N \models \exists z < d \, \varphi(z, a)$$ (上の式の y を a とする.)

$$\therefore N \models \varphi(e, a) \text{ for some } e \in N^* \quad \blacksquare$$

定理 1.15 (General Splitting Theorem : Gaifman)
N が M の Δ_0-elementary extension のとき、

$$\exists N^* \text{ s.t. } M \prec_c N^* \subseteq_e N.$$

上の定理の証明は [ ] を参照されたい。第２章で、General Splitting Theorem に関連した定理を述べる。尚、最近 General Splitting Theorem を証明論的に解析し、一般化した結果を本橋信義氏が得ている。

第２章：同型定理

補題 2.1　N が M-recursively saturated のとき、N は全ての type $\tau(x,\bar{b})$ ($\tau(x,\bar{y}) \in^* SS_M(N)$) を realize する。

補題 2.2　N が M^S-recursively saturated のとき、N は全ての short type $\tau(x,\bar{b})$ ($\tau(x,\bar{y}) \in^* SS_M(N)$) を realize する。

(証) 証明はどちらも同様である。2.2 を示す。$\tau \in^* SS_M(N)$ より、適当な formula X により

$$\text{"}\varphi \in X \iff N \models X(\ulcorner\varphi\urcorner)\text{"} \text{ for } \forall \varphi \in L(M)^*$$

この X を用いて short type τ_0 を

$$\tau_0 = \{x < b\} \cup \{X(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi(x) : \varphi \in L(M)^*\}$$

$$(\text{"}x<b\text{"} \in \tau \text{ とする})$$

で定めれば τ_0 は M-recursive。したがって $\exists d$ によって realize される. この d が同時に τ を realize する. ▨

<u>定理 2.3</u>　N_1, N_2 を M-recursively saturated model とする. このとき次の3条件は同値である

i) $\mathrm{Isom}(N_1, N_2; M) \neq \phi$,

ii) $Th_M(N_1) = Th_M(N_2)$ かつ $SS_M(N_1) = SS_M(N_2)$,

iii) $Th_M(N_1) = Th_M(N_2)$ かつ $SS_M^{\Delta_0}(N_1) = SS_M^{\Delta_0}(N_2)$.

ii) ⇒ iii) は命題1.10より明らか. iii) ⇒ i) は補題2.1を用いて"back and forth argument"により同型写像を構成する. 証明は以下の定理2. と同様であるから省略する. 尚、定理2.3に於て M-recursively saturated を M^S-recursively saturated に弱めると同値性はくずれる. 実際、もっと強く ii) 及び iii) が成り立つが同型にならない N_1, N_2 が存在する (<u>M上</u>同型の条件を除いても.) この様な N_1, N_2 の存在は次のように示される.

(構成) 与えられた M に対して M-recursively saturated elementary extension $N \succ M$ をとる.

$$\mathcal{X} = \{\langle \ulcorner F_i \urcorner, \ulcorner G_i \urcorner \rangle : N \models \forall x \exists y \forall z > y (F_i(z) \neq x \wedge G_i(z) \neq x)\}$$

とすればこれは M-recursive subset of ω. この $\mathcal{X}$ からさらに $\{\ulcorner \varphi_i \urcorner\}_{i \in \omega}$, $\{\ulcorner \psi_i \urcorner\}_{i \in \omega}$ を $\models \varphi_{i+1} \to \varphi_i$, $\models \psi_{i+1} \to \psi_i$ で

$$\{F_i a \mid N \models \varphi_i[a]\} \cap \{G_i a \mid N \models \psi_i[a]\} = \phi,$$

$$N \models \forall x \exists y > x\, \varphi_i(x) \ \&\ N \models \forall x \exists y > x\, \psi_i(x).$$

が成り立つものとする。$\{\varphi_i(x)\}_{i\in\omega}$, $\{\psi_i(x)\}_{i\in\omega}$ は M-recursive type となりその realization を $a, b \in N$ とすれば，

$$N_1 = \{d \in N \mid d \text{ is less than some } e \in Df(N, M\cup\{a\})\}$$

$$N_2 = \{d \in N \mid d \text{ is less than some } e \in Df(N, M\cup\{b\})\}$$

が求めるものである。この２つが非同型なることは Theorem 3.9 [ ] を参照されたい。また N_1, N_2 が M^S-recursively saturated なることは，$N_i \prec N$ なることからわかる。

上の N_1, N_2 の存在にもかかわらず次の定理が成り立つ。

定理 2.4　N_1, N_2 は M^S-recursively saturated でともに M の cofinal extension とする。このとき次の３条件は同値である。

i)　$\mathrm{Isom}(N_1, N_2; M) \neq \emptyset$,

ii)　$Th_M(N_1) = Th_M(N_2)$ かつ $SS_M(N_1) = SS_M(N_2)$,

iii)　$Th_M^{\Delta_0}(N_1) = Th_M^{\Delta_0}(N_2)$ かつ $SS_M^{\Delta_0}(N_1) = SS_M^{\Delta_0}(N_2)$.

☺ iii) ⇒ i) のみを示す。$N_1 - M = \{b_i\}_{i\in\omega}$, $N_2 - M = \{d_i\}_{i\in\omega}$ とし partial isomorphism の列 $\{f_n\}_{n\in\omega}$ を

a)　$f_n \subseteq f_{n+1}$,　$\mathrm{dom}(f_n) \supseteq M \cup \{b_i\}_{i<n}$, $\mathrm{ran}(f_n) \supseteq M \cup \{d_i\}_{i<n}$

b)　$N_1 \models \varphi[\bar{e}] \Rightarrow N_2 \models \varphi[\bar{f_n}(\bar{e})]$　for $^{\forall}\varphi \in \Delta_0(M)$, $\bar{e} \in \mathrm{dom}(f_n)$.

となるようにつくる。

（構成） $f_0 = id_M$ とし、f_n まで構成されたとしよう。$\overline{b'} = dom(f_n) - M$ とし、

$$\tau(x, \overline{y}) = \{\varphi \in \Delta_0(M) : N_1 \models \varphi(b_n, \overline{b'})\}$$

とすれば、τ は $\Delta_0(M)$ の truth definition $Tr_0(x,y)$ によって

$$\tau(x, \overline{y}) = \{\varphi \in \Delta_0(M) : N_1 \models Tr_0[\ulcorner\varphi\urcorner, \langle b_n, \overline{b'}\rangle]\}$$

とかけるから $\tau \in {}^*SS_M^{\Delta_0}(N_1)$. また $a \in M$ を $b_n < a$, $\varphi_0 \cdots \varphi_p \in \tau$ とすれば

$$N_1 \models \exists x < a \bigwedge_{i \le p} \varphi_i [x, \overline{b'}]$$

$$\therefore N_2 \models \exists x < a \bigwedge_{i \le p} \varphi_i [x, \overline{f}_n(\overline{b'})]$$

これは short type $\tau(x, \overline{f}_n(\overline{b'}))$ が N_2 で finitely satisfiable なことをしめす。この realization の 1 つを $d^* \in N_2$ とする。上と同様の構成により d_n に対して $b^* \in N_1$ をとれば $f_{n+1} = f_n \cup \{\langle b_n, d^*\rangle\} \cup \{\langle b^*, d_n\rangle\}$ が a), b) を満す。最後に $f = \bigcup_{n<\omega} f_n$ とすれば、これが求める M 上同型写像となる。▨

次にこの同型定理を用いて 1 つの面白い結果を述べる。

<u>定理 2.5</u>　N_1, N_2 を M の cofinal extension とする。このとき

$$Th_M^{\Delta_0}(N_1) = Th_M^{\Delta_0}(N_2) \Rightarrow Th_M(N_1) = Th_M(N_2)$$

∵ elementary chain construction により N_1^*, N_2^* を

a)　$N_1 \prec_c N_1^*$　,　$N_2 \prec_c N_2^*$

b) N_1^*, N_2^* はともに M^S-recursively saturated,

c) $SS_M^{\Delta_0}(N_1^*) = SS_M^{\Delta_0}(N_2^*)$.

となるようにつくる．このとき定理2.4により，

$$\exists f: N_1^* \to N_2^* \quad \text{s.t.} \quad f \upharpoonright M = id_M.$$

しかるにこれは $Th_M(N_1) = Th_M(N_2)$ を示す．▨

General Splitting Theorem の証明を見ると，

$$M \prec_{\Delta_0} \mathfrak{N},\ M \subseteq_c \mathfrak{N} \Rightarrow M \prec \mathfrak{N} \quad (\because \mathfrak{N} \models PA)$$

となる．これから特に

$$M \subseteq_c \mathfrak{N}_i,\ M \prec_{\Delta_0} \mathfrak{N}_i \ (i=1,2) \Rightarrow Th_M(\mathfrak{N}_1) = Th_M(\mathfrak{N}_2)$$

となるが，上の定理は $\mathfrak{N}_i \models PA$ を仮定に付け加え，$M \prec_{\Delta_0} \mathfrak{N}_i$ を弱めたことになる．

第3象：埋蔵可能性定理

定理 3.1 N_1, N_2 を M-recursively saturated elementary extension で $SS_M(N_1) \subseteq SS_M(N_2)$ が成り立つ model とする．$A \subseteq N_2 - M$ を definable subset とするとき，各 $f \in P\text{-}Emb(N_1, N_2; M)$ $(Df(N_2, ran(f)) \cap A = \phi)$ と各 $b \in N_1$ に対して，$f^* \supseteq f$ で

$$f^* \in P\text{-}Emb(N_1, N_2; M),$$

$$dom(f^*) = dom(f) \cup \{b\},$$

$$Df(N_2, ran(f^*)) \cap A = \phi.$$

となるものが存在する.

∵ $\mathrm{dom}(f)=M\cup\bigcup\bar{b}$ とし、

$$\tau(x,\bar{y})=\{\varphi(x,\bar{y})\in L(M)^*:\ N_1\models\varphi[b,\bar{b}]\}$$

とする、各 $\tau_0\subset\subset\tau$ に対して

$$N_1\models\exists x\bigwedge\tau_0(x,\bar{b})$$

$$\therefore\ N_2\models\exists x\bigwedge\tau_0(x,f\bar{b})$$

さらに $F_1,\cdots,F_m$ を $L(M)$-formula に対する Skolem function（PAでは μ-operator が definable だから Skolem function も definable）とする.

α を A の N_2 での defining formula とする. このとき

$$N_2\models\exists x\left(\bigwedge\neg\alpha(F_i(x,f\bar{b}))\wedge\bigwedge\tau_0(x,f\bar{b})\right)$$

が成り立つ. これは $\tau(x,f\bar{c})\cup\{\neg\alpha(F(x,f\bar{b})):F$ は $L(M)$-Skolem$\}$ が N_2 で finitely satisfiable をしめす. この realization を d として

$$f^*=f\cup\{\langle b,d\rangle\}$$

とすればよい. ▨

<u>定理 3.2</u> N_1,N_2 を M の M-recursively saturated saturated elementary extension とし、$A\subseteq N_2$ を $Df(N_2,M)\cap A=\emptyset$ なる definable set とする. このとき $f\in \mathrm{Emb}(N_1,N_2;M)$ で $Df(N_2,\mathrm{ran}(f))\cap A=\emptyset$ となるものが存在する.

∵ $N_2-M=\{b_i\}_{i\in\omega}$ とし、$\{f_n\}_{n\in\omega}\subseteq P\text{-}\mathrm{Emb}(N_1,N_2;M)$ を

a) $\mathrm{dom}(f_n)=M\cup\{b_i\}_{i<n}$,

$$b)\ Df(N_2, ran(f_n)) \cap A = \phi$$

となるように帰納的に構成する．$f_0 = id_M$ とし、f_nまで作られたとする．このとき定理3.1により、$f_{n+1} \in P\text{-}Emb(N_1, N_2; M)$で$dom(f_{n+1}) = dom(f_n) \cup \{b_n\}$かつ$Df(N_2, ran(f_{n+1})) \cap A = \phi$なるものが存在する．最後に$f = \bigcup_{n<\omega} f_n$とすればよい．▨

定理 3.3　NをM$\prec_{\Delta_0}$NでM-recursively saturatedとする．このとき次の２条件は同値である．

i)　$M \prec N$,

ii)　$\forall b > M \exists f \in Emb(N, N; M)$ s.t. $ran(f) < b$.

∵ 定理3.2はi) ⇒ ii) をしめす．ii)⇒ i)をしめそう．NがMのelementary extensionでなかったと仮定する．このとき$b \in Df(N,M)$かつ$b > M$なるelementの存在を言えばよい．実際$ran(f) < b$とすることは不可能．したがってこのようなbが存在しないと仮定して矛盾を出す．

$$M \prec_{\Delta_0} N \text{ かつ } Df(N,M) \prec N$$

が成り立つから

$$M \prec_{\Delta_0} Df(N,M) \text{ かつ } M \subseteq_c Df(N,M)$$

P-14のremarkから$M \prec Df(N,M) \prec N$を得る．これは矛盾である．▨

上の定理は次のD. Lipshitzの定理とよく似ている．

定理 3.4 (D. Lipshitz) $L=\{0, ', +, \cdot\}$ とし N を L で formulate された PA の model とする．このとき次の2条件は同値である．

i) N は Diophantine correct.（すなわち、ω で解ける Diophantine equation と M でのそれとが一致する.),

ii) $\forall_{b>\omega} \exists N' \subseteq_e N$ s.t. $N' \cong N$.

∵ 証明は Matijasevic の結果を使えば簡単である. ▨

定理3.4では model の saturation を仮定していないが、これは．Δ_0-formula に対する truth definition があるので、Overspill Lemma を使えば saturation (Δ_0-saturation) が示されるためである．

補題 3.5 N を M-recursively saturated とし、$b, d \in N$ を $M < b < d$ かつ $Df(N, M^{\cup} \cup \bar{e}) \cap [b,d] = \phi$ なる2つの元とする．このとき $Df(N, M^{\cup} \cup \bar{e} \cup \{e\}) \cap [b,d] = \phi$ なる e を任意に大きくとることができる．

∵ 与えられた $e^* \in N$ に対して，

$$\tau(x) = \{\neg(b < F(x,\bar{e}) < d) \mid F \text{ は } L(M)\text{-Skolem}\} \cup \{x > e^*\}$$

$\tau(x)$ が N 上の type であることを示せば十分．実際 τ の realization e が求めるものとなる．そこで τ が finitely satisfiable でないと仮定する．このとき，適当に L(M)-Skolem function $F_1 \cdots F_n$ をとれば，

$$N \models \forall x > e^* \left(\bigvee_{k=1}^{n} (b < F_k(x, \bar{e}) < d) \right) \quad \text{-----} \ (1)$$

ここで，

$$\begin{aligned} \tau^*(u, v) = & \{ a < u < v < b : a \in M \} \\ & \cup \{ \neg (u < F(\bar{e}) < v) : F \text{ は } L(M)\text{-Skolem} \} \\ & \cup \{ \exists y \forall x > y \left(\bigvee_{k=1}^{n} (u < F_k(x, \bar{e}) < v) \right\} \end{aligned}$$

とすると，

（主張） τ^* は M-recursive type である．

与えられた $a \in M$, $F^1(\bar{e}), F^2(\bar{e}), \cdots, F^m(\bar{e})$ に対して (1) と仮定から，

$$\begin{aligned} N \models \exists u > a \ \exists v > a \ [& \exists y \forall x > y \left(\bigvee_{k=1}^{n} (u < F_k(x, \bar{e}) < v) \right) \\ & \wedge \neg (u < F(\bar{e}) < v)] \end{aligned}$$

が成り立つ．v のうち最小のもの（これは definable）をとれば d 以下となるが，$Df(N_2, M \cup \bigcup \bar{e}) \cap [b, d] = \phi$ より b 未満となる．これは τ^* が finitely satisfiable をしめす．(主張終)

τ^* の realization を $\langle b_1, d_1 \rangle$ とする．上の construction をつづければ列 $\{ \langle b_i, d_i \rangle \}_{i \in \omega}$ を

a) $M < b_{i+1} < d_{i+1} < b_i$,

b) $N \models \exists y \forall x > y \left(\bigvee_{k=1}^{n} (b_i < F_k(x, \bar{e}) < d_i) \right)$

となるようにつくることができる．しかるにこれは明らかに矛盾である．この矛盾は τ が finitely satisfiable をしめす．▨

定理 3.6　N を M-recursively saturated とし，$M < b < d$ とする．もし $Df(N, M) \cap [b, d] = \phi$ ならば次の２条件を満すf $\in Emb(N, N; M)$ が存在する：

i) $ran(f) \cap [b, d] = \phi$

ii) $ran(f)$ is cofinal with N

∵ $N - M = \{b_i\}_{i \in \omega}$ とし，$f_n \in P\text{-}Emb(N, N; M)$ を

a) $f_n \subseteq f_{n+1}$, $dom(f_{2n}) \supseteq M \cup \{b_i\}_{i<n}$,

b) $Df(N, ran(f_n)) \cap [b, d] = \phi$,

c) $\exists e \in ran(f_{2n+1})$ s.t. $e > b_n$.

となるように構成する．偶数段階は今までと同様，奇数段階は次のようにする．上の補題から，$e > b_n$ で $Df(N, ran(f_{2n}) \cup \{e\}) \cap [b, d] = \phi$ となる e が存在する．この e の逆像は今までと同様に決まる．これを e^* とすれば $f_{2n+1} = f_{2n} \cup \{\langle e^*, e \rangle\}$．最後に $f = \bigcup_{n \in \omega} f_n$ とすればよい．▨

[Reference]

[1] J. Barwise : Admissible sets and structures, Springer-

- Verlag, Berlin (1975)

[2] H. Friedman : Countable models of set theories, Cambridge Summer School in Mathematical Logic, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1972) 539-537.

[3] D. Lipshitz : Diophantine correct models of arithmetic, Proc. A.M.S vol 73 (1979), 107-108.

[4] C. Smorynski : Recursively saturated nonstandard models of arithmetic, J.S.L. vol 46 (1981), 259-286.

[5] A. Tsuboi : On M-recursively saturated models of arithmetic, Tsukuba Journal vol 14 (1982), 245-268.