数理解析研究所講究録
第 480 巻 1983 年 192-203

Smorynskiの問題について

九大理　上江洲忠弘　(Tadahiro Uesu)

C. Smorynski は [3] で次の問題を提出した.

Axiomatize the equality and apartness fragments of the theory DLO$^+$.

ここに, DLO$^+$ は dense linear order の intuitionistic theory で, 次の公理を持つものである.

$\neg x<x$, $x<y \wedge y<z \supset x<z$, $x<y \supset x<z \vee z<y$,

$\exists x \exists y\ x<y$,

$\exists z((x<y \supset x<z<y) \wedge (y<x \supset y<z<x) \wedge (x=y \supset x=z=u))$.

また, DLO$^+$ に於ける apartness の概念は

$$x \# y \rightleftarrows x<y \vee y<x$$

で与えられ, equality は

$$x=y \rightleftarrows \neg x \# y$$

で与えられる.

以下に於て, この問題に対する一つの解答を与える.

1. 準備

言語Lの節（Sequenz）の集合Gと，Lの推論図の集合Sとの組（G, S）を言語L上の（形式）理論という．Gの元を理論（G, S）の始節という．

例えば，LKは，$\mathscr{D} \to \mathscr{D}$ の形の節全てから成る集合 G_K とLKの全ての推論図から成る集合 S_K との組（G_K, S_K）と見做せば，理論である．

理論の証明図，証明可能性等の概念は Gentzen の LK，LJ と同様に定義する．

理論 T（=（G, S））と節の集合 G′に対し，理論（G∪G′, S）で節 $\Gamma \to \Delta$ が証明可能のとき

$$G' \vdash_T \Gamma \to \Delta$$

とかく．

推論図の集合が，exchange，contraction，cut 及び substitution：

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma\theta \to \Delta\theta} \qquad (\theta \text{は代入})$$

から成る理論を RSL という．RSL は J. A. Robinson [2] の resolution にちなむ．

本稿で，LJ は Gentzen の LJ を次のように変形したものを指す：

(1) 節はその右辺に2つ以上論理式があってもよい．

(2) $(\to\supset)$，$(\to\neg)$ 以外の推論図は LK の推論図で，推論図 $(\to\supset)$ と $(\to\neg)$ とは Gentzen の LJ の推論図とする．

2. 理論 AP^+

$\#$ と $<$ とを2項述語記号，A を3項述語記号とする．

次の節から成る集合を G_0 とする：

$$
\begin{array}{ll}
A(x,u,y),\ x<y \to x<u\ ; & A(x,u,y),\ y<x \to u<x\ ; \\
A(x,u,y),\ x<y \to u<y\ ; & A(x,u,y),\ y<x \to y<u\ ; \\
A(x,u,y),\ x<u \to u<y\ ; & A(x,u,y),\ u<x \to y<u\ ; \\
A(x,u,y),\ u<y \to x<u\ ; & A(x,u,y),\ y<u \to u<x\ ;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x<x \to \quad ; \\
x<y,\ y<z \to x<z\ ; \\
x<y \to x<z,\ z<y\ ; \\
x<y \to x\#y\ ; \\
y<x \to x\#y\ ; \\
x\#y \to x<y,\ y<x\ .
\end{array}
$$

節 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m \to \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ に対し，$m \neq 0$，$n \neq 0$ のとき，論理式 $\mathfrak{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{a}_m \supset \mathfrak{b}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{b}_n$ をこの<u>節の論理式</u>という．また，$m=0$，$n \neq 0$ のときは論理式 $\mathfrak{b}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{b}_n$ を，$m \neq 0$，$n=0$ のときは論理式 $\neg(\mathfrak{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{a}_m)$ をそれぞれこの<u>節の論理式</u>という．

述語記号 A を持つ素論理式の列 $A(x_1, u_1, y_1), \ldots, A(x_k, u_k, y_k)$ に対し，節 $a_1 \# b_1, \ldots, a_m \# b_m \to c_1 \# d_1, \ldots, c_n \# d_n$ が次の条件 (1), (2) をみたすとき，この節の論理式を，この列の<u>切片</u>という．

(1) $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ のいずれも $x_1, u_1, y_1, \ldots, x_k, u_k, y_k$ のいずれかである．

(2) 列 $A(x_1, u_1, y_1), \ldots, A(x_k, u_k, y_k)$ の部分列 Γ で，

$$G_0 \vdash_{\overline{RSL}} \Gamma,\ a_1 \# b_1, \ldots, a_m \# b_m \to c_1 \# d_1, \ldots, c_n \# d_n$$

なるものがある．

列 $A(x_1, u_1, y_1), \ldots, A(x_k, u_k, y_k)$ の切片は有限個である．その全ての切片を $\wedge$ でつないで得られる論理式を

$$E_k(x_1, u_1, y_1, \ldots, x_k, u_k, y_k)$$

で表し，次の論理式を F_k で表す．

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \ldots \forall x_k \forall y_k \exists u_k\, E_k(x_1, u_1, y_1, \ldots, x_k, u_k, y_k).$$

LJ に始節として

$$\to \exists x \exists y\, x \# y \ ; \ \to F_1 \ ; \ \to F_2 \ ; \ \ldots$$

を付加して得られる理論を AP^+ とする.

定理 DLO^+ は AP^+ 上 conservative である.

従って, AP^+ は DLO^+ の apartness の部分を公理化したものである.

3. 定理の証明

言語 $\{\#, <, A\}$ の推論図で, 次の形のもの全てから成る集合を S_0 とする:

$$\frac{A(x,u,y), \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta},$$

但し, 変数 u は, x, y と異なり, また, 節 $\Gamma \to \Delta$ に自由に現れない.

LJ に G_0 と S_0 を付加し, 更に, 始節 $\to \exists x \exists y\, x \# y$ を付加して得られる理論を $DLO^+(A)$ で表す.

次の命題は明らかである．

命題1　$DLO^{+}(A)$ は DLO^{+} 上 conservative である．

LJ に S_0 を付加して得られる理論を $LJ+S_0$ とし，$LJ+S_0$ から cut を除いた理論を $LJ+S_0-Cut$ で表す．

$\overline{G_0} = \{\Gamma\to\Delta \mid \Gamma\to\Delta$ は言語 $\{\#, A\}$ の節で，$G_0 \vdash_{RSL} \Gamma\to\Delta\}$
とおく．

Gentzen の Hauptsatz と同様に，次の命題を得る．

命題2　言語 $\{\#, A\}$ の節 $\Gamma\to\Delta$ に対し，$G_0 \vdash_{LJ+S_0} \Gamma\to\Delta$ ならば，$\overline{G_0} \vdash_{LJ+S_0-Cut} \Gamma\to\Delta$ である．

命題2 は LJ を LK にしても成り立つ．また，$LJ+S_0$ を LJ にしても LK にしても成り立つ．同様の Hauptsatz の変形が [1] にある．

命題3　述語記号は♯のみを含む節 $\Gamma \to \Delta$ に対し，

$$\overline{G}_0 \vdash_{LJ+S_0-Cut} A(a_1,b_1,c_1), \ldots, A(a_m,b_m,c_m), \Gamma \to \Delta$$

ならば，

$$\vdash_{LJ} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \cdots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{m+n}(x_1,u_1,y_1,\ldots,x_n,u_n,y_n,a_1,b_1,c_1,\ldots,a_m,b_m,c_m), \Gamma \to \Delta$$

なる自然数 n がある．

（証明）　$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m, \Gamma \to \Delta$ を述語記号は♯のみを含む節とし，P を節

$$\Gamma_1, A(a_1,b_1,c_1), \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m, A(a_m,b_m,c_m), \Gamma \to \Delta$$

の $\overline{G}_0$ からの $LJ+S_0-Cut$ の証明図とする．P に含まれる推論図の個数 l に関する帰納法により

$$\vdash_{LJ} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \cdots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{m+n}(x_1,u_1,y_1,\ldots,x_n,u_n,y_n,a_1,b_1,c_1,\ldots,a_m,b_m,c_m), \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m, \Gamma \to \Delta$$

なる n があることを示す．

$l=1$ のときは E_n の定義より明らか．

$l>1$ のとき，次の3通りの場合が考えられる：

(1) P の最後の推論図が

$$\frac{A(x,u,y), \Gamma_0 \to \Delta}{\Gamma_0 \to \Delta}$$

の場合，

(2) Pの最後の推論図が

$$\frac{\Gamma_2,\ A(a_2,b_2,c_2),\ \dots,\ \Gamma_m,\ A(a_m,b_m,c_m),\ \Gamma \to \Delta}{A(a_1,b_1,c_1),\ \Gamma_2,\ A(a_2,b_2,c_2),\ \dots,\ \Gamma_m,\ A(a_m,b_m,c_m),\ \Gamma \to \Delta}$$

の場合,

(3) (1), (2) 以外の場合.

(1) の時, 帰納法の仮定により

$$\vdash_{LJ} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \cdots \forall x_n \forall y_n \exists u_n\, E_{(m+1)+n}(x_1,u_1,y_1,\dots,x_n,u_n,y_n,x,u,y,$$
$$a_1,b_1,c_1,\dots,a_m,b_m,c_m),\ \Gamma_1,\dots,\Gamma_m,\Gamma \to \Delta\ .$$

ここで, uの条件より

$$\vdash_{LJ} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \cdots \forall x_{n+1} \forall y_{n+1} \exists u_{n+1}\, E_{m+n+1}(x_1,u_1,y_1,\dots,x_{n+1},u_{n+1},y_{n+1},$$
$$a_1,b_1,c_1,\dots,a_m,b_m,c_m),\ \Gamma_1,\dots,\Gamma_m,\Gamma \to \Delta\ .$$

(2) の時,

$$\vdash_{LJ} E_{m+n}(x_1,u_1,y_1,\dots,x_n,u_n,y_n,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,\dots,a_m,b_m,c_m)$$
$$\to E_{m+n-1}(x_1,u_1,y_1,\dots,x_n,u_n,y_n,a_2,b_2,c_2,\dots,a_m,b_m,c_m)$$

であるから, 帰納法の仮定から明らか.

(3) の時, 帰納法の仮定から明らか.

(証明終)

命題4　どの k に対しても $\vdash_{DLO^+} F_k$.

(証明) $\vdash_{DLO^+(A)} A(x_1,u_1,y_1),\dots,A(x_k,u_k,y_k) \to E_k(x_1,u_1,y_1,\dots,x_k,u_k,y_k)$

であるから，$\vdash_{DLO^+(A)} F_k$．従って命題1より $\vdash_{DLO^+} F_k$．

（証明終）

（定理の証明）　命題4により，DLO^+はAP^+の拡張である．

今 $\Gamma \to \Delta$ は述語記号くを含んでいないとし，$\vdash_{DLO^+} \Gamma \to \Delta$ とする．

命題1より　$\vdash_{DLO^+(A)} \Gamma \to \Delta$．

従って，　$G_0 \vdash_{LJ+S_0} \exists x \exists y\, x \# y, \Gamma \to \Delta$．

よって命題2より　$\overline{G}_0 \vdash_{LJ+S_0-Cut} \exists x \exists y\, x \# y, \Gamma \to \Delta$．

従って，命題3より　$\vdash_{LJ} F_n, \exists x \exists y\, x \# y, \Gamma \to \Delta$　なるnがある．

従って　$\vdash_{AP^+} \Gamma \to \Delta$．

よってDLO^+はAP^+上conservativeである．

（証明終）

4.　注意

(i) Smorynski は[3]で，次の公理を持つ理論AP^0_ωがDLO^+のapartnessの部分であろうと予想していた．

AP^0_ω の公理：

$$\neg x \# x,$$
$$x \# y \supset y \# x,$$
$$x \# y \supset x \# z \vee z \# y,$$
$$\exists x \exists y\, x \# y,$$
$$\forall x \forall y \exists x_1 \cdots \exists x_n\, \mathrm{Exp}_{n+2}(x, y, x_1, \ldots, x_n) \quad (n \geq 1),$$

但し，$\mathrm{Exp}_k(a_1, \ldots, a_k)$ は論理式

$$\bigwedge_{i,j} (a_i \# a_j \supset \bigwedge_{k \neq l} a_k \# a_l)$$

を表す．

しかし次の命題が成り立つので，この予想は間違っていた．

命題 どの k に対しても $\vdash_{AP^0_\omega} F_k \to F_{k+1}$ ではない．

証明は Kripke model を作って得られる．

(ii) Σを述語記号Aを持つ素論理式の列

$$A(x_1, u_1, y_1), \ldots, A(x_k, u_k, y_k)$$

とし，$\Gamma \to \Delta$ を許

$$a_1 \# b_1, \ldots, a_m \# b_m \to c_1 \# d_1, \ldots, c_n \# d_n$$

とする．但し，$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ のいずれも $x_1, u_1, y_1, \ldots, x_k, u_k, y_k$ のいずれかであるとする．

$\mathbb{A}_k$ を次の条件 (*) をみたす対応 $\alpha : \{x_1, u_1, y_1, \ldots, x_k, u_k, y_k\} \to 3k$ の全体とする.

(*) $1 \leqq i \leqq k$ なる全ての i に対し,

$\alpha(x_i) < \alpha(u_i) < \alpha(y_i)$, $\alpha(y_i) < \alpha(u_i) < \alpha(x_i)$ 又は $\alpha(x_i) = \alpha(u_i) = \alpha(y_i)$.

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 次の2つの条件は同等である.

(1) Σ の切片 $\mathfrak{A}$ で $\vdash_{LJ} \mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta$ なるものがある.

(2) $\mathbb{A}_k$ のどの元 α に対しても $\Gamma \to \Delta$ は真である.

ここに, $v \# w$ の α による解釈は $\alpha(v) \neq \alpha(w)$ とする.

(証明) 条件 (1) と $\overline{G_0} \vdash_{LJ\text{-}Cut} \Sigma, \Gamma \to \Delta$ とは同等である. $\Sigma, \Gamma \to \Delta$ は論理記号を含まないから, $\overline{G_0} \vdash_{LJ\text{-}Cut} \Sigma, \Gamma \to \Delta$ と $\overline{G_0} \vdash_{LK\text{-}Cut} \Sigma, \Gamma \to \Delta$ とは同等である. また, 命題2の注意により, $\overline{G_0} \vdash_{LK\text{-}Cut} \Sigma, \Gamma \to \Delta$ と $G_0 \vdash_{LK} \Sigma, \Gamma \to \Delta$ とは同等である.

$\tilde{\Sigma}$ を Σ の $A(x, u, y)$ なる形の論理式を全て

$$x < u < y \lor y < u < x \lor x = y = u$$

なる形の論理式におきかえたものとし, G_1 を次の節から成る集合とする.

$x < x \to$; $x < y, y < z \to x < z$; $x < y \to x < z, z < y$;

$$x<y \to x\#y \ ; \quad y<x \to x\#y \ ; \quad x\#y \to x<y,\, y<x.$$

このとき，$G_0 \vdash_{LK} \Sigma, \Gamma \to \Delta$ と $G_1 \vdash_{LK} \tilde{\Sigma}, \Gamma \to \Delta$ とは同等であり，更に，$G_1 \vdash_{LK} \tilde{\Sigma}, \Gamma \to \Delta$ と条件 (2) とは同等である．

（証明終）

上の命題から，切片の定義の条件 (2) を次の条件 (2°) におきかえてもよいことがわかる．

(2°) $\mathbb{A}_k$ のどの元に対しても，節

$$a_1\#b_1, \ldots, a_m\#b_m \to c_1\#d_1, \ldots, c_n\#d_n$$

は真である．

文　献

[1] 赤星　順：種々の除去定理，修士論文（九州大学）(1981)．

[2] J. A. Robinson : A machine-oriented logic based on the resolution principle, J. ACM, 12 (1965), 23-41.

[3] C. Smorynski : On axiomatizing fragments, J. S. L., 42 (1977) 530-544.