数理解析研究所講究録
第 481 巻 1983 年 1-17

M. Duflo教授講演記録

Duflo教授は，日本学術振興会の外国人招へい研究者として，1982年3月15日から一か月間滞日され，多くの講演をされた．それらから重複するものを除いて記す．

1. Harmonic analysis on complex Lie algebra

（1982年3月18，23日於京都大学理学部）

Gを複素連結リー群，$\mathfrak{g}$をそのリー環とする．以下$\mathfrak{g}$を実リー環とみなし，$\mathfrak{g}^*$を$\mathfrak{g}$の共役空間とする．Gは$\mathfrak{g}^*$に反傾随伴表現で作用する．$f\in\mathfrak{g}^*$に対して，Gにおけるfの固定群を$G(f)$，そのリー環を$\mathfrak{g}(f)$とする．軌道$G\cdot f$が最高次元のとき，fは正則（regular）であるといわれる．fが正則ならば$\mathfrak{g}(f)$は可換である．$\mathfrak{g}(f)$の元Xで$\mathrm{ad}\,X$が半単純となるもの全体を$\mathfrak{s}(f)$で表す．fが正則で$\mathfrak{s}(f)$が最高次元のとき，fは強正則（very regular）といわれ，その全体を$\mathfrak{g}^*_{vr}$で表す．$\mathfrak{g}^*_{vr}$は$\mathfrak{g}^*$でZariski開集合であり，G

は複素リー群故，任意の $f, f' \in \mathfrak{g}^*_{vr}$ に対して，$\mathfrak{s}(f)$ と $\mathfrak{s}(f')$ は共役である．$\mathfrak{s}$ をこの共役類の代表元とし，H (resp. H') を $\mathfrak{s}$ の G における中心化群 (resp. 正規化群)，$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{s}$ と可換な $\mathfrak{g}$ の元全体とする．$\mathfrak{g}$ はルート空間分解されて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ となり，また，$W = H'/H$ は有限群である．$a_0 \in \mathfrak{s}$ を正則元とし，

$$\Delta^+ = \left\{ \alpha \in \Delta \,;\, \begin{array}{ll} \text{ⓐ } \mathrm{Re}\,\alpha(a_0) > 0 & \text{または} \\ \text{ⓑ } \mathrm{Re}\,\alpha(a_0) = 0, & \mathrm{Im}\,\alpha(a_0) > 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{p} = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

とおく．このとき，$\mathfrak{p} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{s}]$ が成り立つ．

命題 (i) $f \in \mathfrak{g}^*_{vr}$ ならば，$G\cdot f \cap \mathfrak{t}^* \neq \phi$

(ii) $f, f' \in \mathfrak{t}^* \cap \mathfrak{g}^*_{vr}$ かつ $g\cdot f = f'$ $(g \in G)$ ならば，$g \in H'$

(iii) $f \in \mathfrak{t}^* \cap \mathfrak{g}^*_{vr}$ ならば，$B_f(x, y) = f([x, y])$ は $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ 上非退化． ▨

dX, dY, dZ をそれぞれ，$\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{t}$ 上のルベーグ測度で，$dX = dZ\,dY$ が成り立つものとし，$df, d\lambda$ をそれぞれ，$\mathfrak{g}^*, \mathfrak{t}^*$ 上のルベーグ測度で，各 $\alpha \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$ 上の Schwartz 函数全体) に対し

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_{\mathfrak{g}} e^{if(X)} \alpha(X)\, dX\, df = \alpha(0)$$

($d\lambda$ についても同様)が成り立つ様に正規化する. $e_1, \cdots, e_{2d}$ を$\mathfrak{j}$の基底で, $dY = |e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{2d}^*|$ なるものとし, 各$\lambda \in \mathfrak{j}^*$ に対して, $\pi^B(\lambda) = [\det \lambda([e_i, e_j])]^{1/2}$ とおく. π^B は$\mathfrak{j}^*$上の多項式函数故, $\mathfrak{j}$上の symmetric algebra に属する. π^B が定義する$\mathfrak{j}$上の微分作用素をDと書く.

$\omega(H) = \det ad_{\mathfrak{n}}(H)$ $(H \in \mathfrak{j})$ とおき, 正則な各$a \in \mathfrak{h}$ と$\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ に対して,

$$\psi_a(g) = D(\omega(Z)\varphi((Ad\, g)Z))\big|_{Z=a}$$

とおくと, $\psi_a(gh) = (\det Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{j}}\, h)\psi_a(g)$ 故

$$M_a(\varphi) = \frac{i^d}{(2\pi)^d \# W}\int_{G/H} \psi_a(g)\, d\bar{g}$$

が定義できる. このとき, $M_a \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ であって, $\mathfrak{g}$が半単純ならば, Harish-Chandra の定義した不変積分に一致する.

$\boxed{\text{定理}}$ (i) $a \mapsto M_a$ は$\mathfrak{h}$上の$\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$値 C^∞ 函数に拡張され, M_a の台は a のG軌道 $G \cdot a$ であり, M_0 は Dirac のδである.

(ii) $$\Theta_a(\lambda) = \frac{1}{\# W}\sum_{w \in W} e^{i\lambda(w \cdot a)} \qquad (\lambda \in \mathfrak{j}^* \cap \mathfrak{g}^*_{V\mathfrak{n}})$$

とおき, Θ_a をG不変性によって, $\mathfrak{g}^*_{V\mathfrak{n}}$上に拡張する. このとき, M_a の Fourier 変換は Θ_a である.

(iii) $\mathfrak{g}_G = \{X \in \mathfrak{g} \,;\, \exp X = e\}$ とおく. このとき, $n_G = \sum_{a \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{g}_G} M_a$ は $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$ で収束し, $\mathfrak{g}_G$ の中に台を持ち, $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍で Dirac の δ に等しい. ▨

(野村隆昭記)

2. An application of primitive ideals of enveloping algebras to the harmonic analysis on Lie groups after J.-Y. Charbonnel

(1982年3月25日於京都大学理学部)

Gを連結リー群, πをGの Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ への正規因子表現, $VN(\pi)$ を $\pi(G)$ で生成される因子とする. 正規因子表現は, 指標の研究に際して, Pukanszky によって導入された. $C^*(G)$ をGの群C^*環とすると, 正規因子表現πは次の二条件で特徴付けられる.

(i) $VN(\pi)$ は semifinite

(ii) $C^*(G)^+$ に元φが存在して, πの $C^*(G)$ への自然な延長を再びπで表すと, $\pi(\varphi)$ は0でない跡族.

[1]では, Gが可解のとき, 上の(ii)において, φはG上の台が compact な C^∞ 函数(その全体を $C_c^\infty(G)$ で表す)からとれることが示された. 本講演の主定理は, 可解という条件を取り除いた場合の次の定理である.

$\boxed{\text{定理 1}}$ $C_c^\infty(G)$ に元 φ が存在して，$\pi(\varphi)$ は 0 ではなく，$VN(\pi)$ に関して compact である．すなわち，$VN(\pi)$ での跡族のノルム閉包に属する． ▨

さて，$\mathfrak{g}$ を G のリー環，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化，$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環とする．$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元は，自然に，G の単位元 e に台を持つ超函数とみなせる．$\mathfrak{H}_\infty$ で π に関する C^∞ ベクトル全体を表し，$d\pi$ を π の微分として得られる $\mathfrak{H}_\infty$ での $\mathfrak{g}$ の，従って $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の表現とする．このとき，$d\pi$ の核 I_π は $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の原始イデアルである．$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の各原始イデアル I に対して，$\hat{I}$ を $I' \supsetneq I$ なる $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の原始イデアルすべての共通部分とする．定理 1 は次の定理 2 と，$\hat{I} \neq I$ なること [2, 4.6] から証明される．

$\boxed{\text{定理 2}}$ 任意の $u \in \hat{I}_\pi$，$\varphi \in C_c^\infty(G)$ に対して，$\pi(u*\varphi)$ は $VN(\pi)$ に関して compact である． ▨

$C^*(G)$ の各原始イデアル J に対して，

$$I(J) = \{u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\ ;\ u * C_c^\infty(G) \subset J\}$$

とおく．定理 2 は次の定理 3 から証明される．

$\boxed{\text{定理 3}}$ J, J' を $C^*(G)$ の原始イデアルとする．このとき，$J \subset J'$ かつ $I(J) = I(J')$ ならば，$J = J'$ である． ▨

文　献

[1] J.-Y. Charbonnel, Sur les semi-caractères des groupes de Lie résolubles connexes, J. Funct. Anal., 41 (1981), 175-203.

[2] C, Moeglin, Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes, J. Math. Pures et Appl., 59 (1980), 265-336.

（野村隆昭記）

3. Construction of a set of irreducible unitary representations of real algebraic Lie groups, sufficiently big to decompose $L^2(G)$

（1982年3月29日於東北大学理学部）

Gを実リー群，$\mathfrak{g}$をそのリー環とする．以下，これまでに用いた記号は説明なしに用いる．$f \in \mathfrak{g}^*$ が good polarization を持つとは，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の可解部分環$\mathfrak{h}$で，fでの polarization になっていて，しかも Pukanszky 条件をみたしているものが存在するときにいう．$\mathfrak{g}$自身が可解ならば，任意の $f \in \mathfrak{g}^*$ は good polarization を持つ．一方，$\mathfrak{g}$が半単純ならば，f が good polarization を持つことと fが正則半単純であることとは同値である．これはまた，$\mathfrak{g}(f)$ が Cartan部分環になることと同値である．$B_f(x, y) = f([x, y])$ とおくと B_f は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ 上にシンプレクティック構造を与え，シンプレクティック群 $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$，メタプレクティック群 Mp

$(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ を考えることができる.

$$
\begin{tikzcd}
 & & Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) & Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) \arrow[l] & & \\
1 & G(f) \arrow[l] \arrow[ur] & & G(f)^\sim \arrow[ll] \arrow[u] & \{1, e\} \arrow[l] & 1 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

$G(f)^\sim$ の表現 τ で

$$\tau(e) = -Id, \quad \tau(\exp X) = e^{if(X)} Id \quad (X \in \mathfrak{g}(f))$$

となるもの全体を $X(f)$ で表す. また, その内で既約なものの全体を $X^{irr}(f)$ で表す. $X(f) \neq \phi$ のとき, f は admissible であるといわれる.

さて, $f \in \mathfrak{g}^*$ を admissible かつ good polarization を持つものとし, $\tau \in X(f)$ とする.

$\boxed{\text{定理 1}}$ G のユニタリ表現 $T_{f,\tau}$ が構成できて, $T_{f,\tau}$ の commutant と τ のそれとは同型である. ■

まず例として, G が algebraic で, f での polarization $\mathfrak{h}$ で, $G(f)$-不変 かつ実 (i.e. $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$) でしかも good であるものが存在する場合を考えてみよう. B_0 を $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ に対応する G の解析部分群, $B = G(f)B_0$ とおく. B は G の閉部分群になる.

$$\rho_{\mathfrak{h}}(\hat{h}) = [\det(\mathrm{Ad}\,h)_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}]^{-1/2} \quad (G(f)^\sim \ni \hat{h} \mapsto h \in G(f))$$

とおく. G から τ の表現空間に値をとる函数 φ で

$$\varphi(gh) = \tau(\hat{h})^{-1}\rho_{\mathfrak{b}}(\hat{h})^{-1}\varphi(g) \qquad (G(f)^{\sim} \ni \hat{h} \mapsto h \in G(f))$$

$$X\varphi = -(if + \rho^0_{\mathfrak{b}})(X)\varphi \qquad (X \in \mathfrak{b})$$

(ただし, $\rho^0_{\mathfrak{b}}(X) = -\mathrm{tr}((\mathrm{ad}\,X)_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}})$ $(X \in \mathfrak{b})$)

をみたすものの全体を $\mathfrak{H}_{f,\tau}$ とおく.

$$T_{f,\tau,\mathfrak{b}} = \mathrm{Ind}_B^G\left(\tau \frac{\rho_{\mathfrak{b}}}{|\rho_{\mathfrak{b}}|} e^{if}\right)$$

とおくと, Andler によって, $T_{f,\tau,\mathfrak{b}}$ の同値類は $\mathfrak{b}$ に依らないことが証明されている.

次に, G が連結かつ reductive のときを考える. このとき得られる $T_{f,\tau}$ $(\tau \in X^{irr}(f))$ は, 正則な infinitesimal character を持つ, tempered な既約表現である.

そして, G の単位元の連結成分 G_0 が reductive のときは, Mackey の obstruction を, Vogan による Kostant-Borel-Weil-Bott の定理の一般化を用いて計算する.

一般には, 定理1は $\mathfrak{g}$ の次元に関して帰納的に構成される: $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の最大べき零イデアルとし, u を f の $\mathfrak{n}$ への制限, $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}(u)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}(u) \cap \mathrm{Ker}\,u$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}/\mathfrak{g}$ とおく. $\dim\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{g}_1$ のとき, u は単射で, $\mathfrak{g}$ は reductive となって先の構成が適用される. $\dim\mathfrak{g}_1 < \dim\mathfrak{g}$ のときは, 帰納法の仮定が適用される. $\mathfrak{g}$ が reductive で u が単射でないとき, 構成の仕方が二通りできるが, これらは勿論整合

している．詳しくは[1]を参照．

次に，この様にして構成された $T_{f,\tau}$ の全体が，G のユニタリ双対 $\hat{G}$ の中でどの位大きいかが問題となる．

$\boxed{例1}$．G が amenable のとき．

$\boxed{定理2}$ I を $C^*(G)$ の原始イデアルとする．このとき，admissible かつ good polarization を持つ $f \in \mathfrak{g}^*$ と $\tau \in X^{irr}(f)$ が存在して，I は $T_{f,\tau}$ の $C^*(G)$ での核に一致する．

従って，定理2にいう様な f と τ の組 (f, τ) の全体を X^{irr} とおくと，G が I 型のとき，$\hat{G}$ は X^{irr} の G 軌道で parametrize される．

$\boxed{例2}$ G が algebraic のとき（このとき，G は I 型）

$\mathfrak{T} = \{T_{f,\tau} ; (f, \tau) \in X^{irr}\}$ が $\hat{G}$ において Borel 集合と仮定する（G が複素のときは成り立っている）．

$\boxed{定理3}$ (i) $\hat{G} - \mathfrak{T}$ の Plancherel 測度は 0 である．

(ii) $T_{f,\tau}$ が自乗可積分 $\Leftrightarrow$ $G(f)$ が compact かつ f は強正則．

文　献

[1] M. Duflo, Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie, Cours d'été du C.I.M.E., Cortona, 1980.

（野村隆昭記）

4. Sur les idéaux induits dans les algèbres enveloppantes

(1982年4月6日於広島大学総合科学部)

可換体kを固定し，以下に出てくるベクトル空間，テンソル積，多元環等はすべてk上で考えるものとする．$\mathfrak{g}$をリー環とするときその上の包絡多元環を$U(\mathfrak{g})$で表す．$u \in U(\mathfrak{g})$に対して，$u \mapsto \check{u}$ は $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\check{X} = -X$ によって定まる $U(\mathfrak{g})$ の主反自己同型とする．$\mathfrak{g}$上の一次形式λが$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$上で消えているとき，$u \mapsto u^{\lambda}$ は $X \in \mathfrak{g}$ に対して $X^{\lambda} = X + \lambda(X)$ によって定まる $U(\mathfrak{g})$ の自己同型とする．$\mathfrak{g}$が有限次元のとき，$\mathfrak{g}$のモジュール関数は一次形式 $X \mapsto \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,X$ である．

今$\mathfrak{f}$を有限次元リー環，θをそのモジュール関数とし，Aは$U(\mathfrak{f})$を含み同じ単位元を持つ結合的代数とする．更にAは$U(\mathfrak{f})$上の左・右加群として自由加群であると仮定する．Fを$\mathrm{ad}\,\mathfrak{f}$の作用で安定な$A$の有限次元部分空間とすれば，$F$上に自然に$U(\mathfrak{f})$の表現が引き起される．この表現に関して$L \subset U(\mathfrak{f})$を$\check{L}$がその核となるようなイデアルとする．また$\pi$をあるベクトル空間$V$上の$\mathfrak{f}$の表現とし，$I$および$J$をそれぞれ，$\pi$から定まる$U(\mathfrak{f})$の表現および$F \otimes V$上の表現の核が$\check{I}$および$\check{J}$となるような$U(\mathfrak{f})$のイデアルとする．このとき次の定理が成り立つ．

$\boxed{\text{定理 1}}$ FがAJに含まれるならばFは$I^{-\theta}A$に含まれる. ▨

$\mathfrak{g}$は$\mathfrak{f}$を含むリー環とし, ηをそのモジュール関数とする. ψは$\psi(X)=\eta(X)-\theta(X)$, $(X\in\mathfrak{f})$によって定まる$\mathfrak{f}$上の一次形式を表すとし, Iを$U(\mathfrak{f})$のイデアルとする.

$\boxed{\text{定理 2}}$ $U(\mathfrak{g})I$に含まれる$U(\mathfrak{g})$の最大イデアルは$I^{\psi}U(\mathfrak{g})$に含まれる$U(\mathfrak{g})$の最大イデアルと一致する. ▨

(江口正晃記)

5. Mackey's theory for algebraic groups

(1982年4月8日於九州大学理学部)

Gを標数0の局所体k上定義された線形代数群$\underline{\underline{G}}$の$k$有理点全体のなす群とし, Gの既約ユニタリ表現の同値類の集合$\hat{G}$を記述する問題を考える. $\underline{\underline{G}}$がreductiveな場合には多くの仕事がなされているが, 今だに完全な結果からは程遠い. ここでは$\underline{\underline{G}}$がreductiveな場合$\hat{G}$は記述されうるとして一般の場合を考えてみる. その為には正にMackey理論が効果的である.

UをGの閉正規部分群として, $\hat{U}$から$\hat{G}$を計算する手続きがMackey理論である. $\underline{\underline{G}}$がreductiveならばこれでは何も得られないが, $\underline{\underline{G}}$がreductiveでないなら, $\underline{\underline{U}}$を$\underline{\underline{G}}$のunipotent radicalとしてMackey理論を適用しうる.

結果を述べる為，いくつかの概念を導入する．$\underline{G}$のリー環を$\mathfrak{g}$，その共役空間を$\mathfrak{g}^*$で表す．$\mathfrak{g}^*$にはG及び$\mathfrak{g}$がco-adjoint表現で作用するが，この作用に関し，G及び$\mathfrak{g}$の$f \in \mathfrak{g}^*$におけるstabilizerをそれぞれ$G(f)$，$\mathfrak{g}(f)$で表す．$f \in \mathfrak{g}^*$に対し$\mathfrak{g}$上の反対称双一次形式B_fを$B_f(X,Y) = f([X,Y])$　$(X, Y \in \mathfrak{g})$で定義する．

定義　$\mathfrak{b}$を$\mathfrak{g}$の部分リー環，$f \in \mathfrak{g}^*$とする．B_fに関する$\mathfrak{b}$の直交空間を$\mathfrak{b}^f$で表す．$\mathfrak{b}$が（fに関し）coisotropicとは$\mathfrak{b}^f \subset \mathfrak{b}$となることを意味する．

$\mathfrak{g}$の部分リー環$\mathfrak{h}$に対して，$\mathfrak{h}$をリー環とするk上定義された$\underline{G}$の代数的部分群$\underline{H}$が存在するとき，$\mathfrak{h}$は代数的であるという．この場合${}^u\underline{H}$を$\underline{H}$のunipotent radicalとしそのリー環を${}^u\mathfrak{h}$で表す．

定義　$f \in \mathfrak{g}^*$とする．$\mathfrak{g}$のcoisotropicな部分リー環$\mathfrak{b}$が強巾単型であるとは，$\mathfrak{b}$が代数的でかつ$\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(f) + {}^u\mathfrak{b}$なることをいう．

定義　次の二条件がみたされるとき，$f \in \mathfrak{g}^*$は巾単型であるという．

(i)　強巾単型のcoisotropic部分リー環$\mathfrak{b}$が存在する．

(ii)　$\mathrm{Ker}\, f$に含まれる$\mathfrak{g}(f)$のreductive factorが存在する．

さて，$\mathbb{R}$の自明でないユニタリ指標κを固定しておく．$f \in \mathfrak{g}^*$として，双一次形式B_fは$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$上にシンプレクティック構造を与え，我々はシンプレクティック群$Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$，メタプレクティック群$Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$を考えうる．

$$p : Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) \to Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$$

を被覆写像とし，$G(f)^{\sim} = p^{-1}(G(f))$とおく．$G(f)^{\sim}$は$G(f)$の二重被覆群である：

$$1 \to \{1, e\} \to G(f)^{\sim} \xrightarrow{p} G(f) \to 1$$

$$\begin{aligned} Z^{irr}(f) = \{ \tau \in (G(f)^{\sim})^{\wedge} \,;\, & \tau(e) = -id \\ & \tau(\exp X) = \kappa(f(X))\, id \quad (X \in {}^u\mathfrak{g}(f)) \} \end{aligned}$$

$Z^{irr} = \{(f, \tau) \in \mathfrak{g}^* \times (G(f)^{\sim})^{\wedge} \,;\, f$は巾単型，$\tau \in Z^{irr}(f)\}$

とおく．このとき，Gは自然にZ^{irr}に作用し次の結果を得る．

$\boxed{\text{定理}}$ $Z^{irr}/G \simeq \hat{G}$ ▨

この証明において，我々はメタプレクティック表現とMackey理論を用い$(f, \tau) \in Z^{irr}$から$T_{f,\tau} \in \hat{G}$を構成する手続きを与える．

（藤原英徳記）

6. A criterion for type I connected Lie groups

(1982年4月13日於京都大学理学部)

まずPukanszkyによる結果を復習しよう．以下講演録5までに用いられた記号，用語は説明なしに用いる．Gを連結かつ単連結なリー群とし，$\mathfrak{g}$をそのリー環とする．Adoの定理により，$\mathfrak{g}$はある有限次元実ベクトル空間上のすべての準同型がなすリー環の部分環と同一視できる．$\tilde{\mathfrak{g}}$で$\mathfrak{g}$を含む最小の代数的リー環，$\tilde{G}$を$\tilde{\mathfrak{g}}$に対応する連結かつ単連結なリー群とすると，Gは$\tilde{G}$の単連結な閉かつ不変な部分群である．$L=[G,G]=[\tilde{G},\tilde{G}]$もまた$\tilde{G}$の閉かつ不変な部分群で$L$はI型になる．従って，$\tilde{G}$は$L$のユニタリ双対$\hat{L}$にconjugationの反傾で位相変換群として働き，軌道空間$\hat{L}/\tilde{G}$はcountably separatedである．さて，各$\pi\in\hat{L}$に対して，次の性質を持つGの閉部分群$K_\pi\supset L$を見つけることができる．

(i) $\rho\in\hat{K_\pi}$が存在して，ρのLへの制限はπに等しく，
$T(\rho)=\mathrm{Ind}_K^G\rho$ はGの因子表現である．

(ii) $\pi_j\in\hat{L}$とし，$\rho_j\in\hat{K_{\pi_j}}$ $(j=1,2)$を(i)にいうものとする．
$T(\rho_1)$と$T(\rho_2)$がquasi-equivalentであるための必要十分条件は，$K_{\pi_1}=K_{\pi_2}$かつρ_1,ρ_2のGにおける固定群G_{ρ_1}，G_{ρ_2}が一致することである．そしてこのとき，$T(\rho_1)$と$T(\rho_2)$はユニタリ同値になる．

(iii) 各$\pi \in \hat{L}$と$a \in \tilde{G}$に対して，$K_{a\pi} = K_\pi$

この条件(iii)によって，K_πがπの$\tilde{G}$軌道Eによって決まるので，K_πを$K(E)$と記すことにし，各$E = \tilde{G} \cdot \pi \in \hat{L}/\tilde{G}$に対して

$$F(E) = \{\rho \in K(E)^\wedge ; \rho|_L \in E\}, \quad \mathfrak{A} = \cup_{E \in \hat{L}/\tilde{G}} F(E)$$

とおく．このとき，$F(E)$は$K(E)^\wedge$の部分空間として局所compactなHausdorff空間である．$\rho \in \mathfrak{A}$に対して，$J(\rho)$を$T(\rho)$の$C^*(G)$における核とすると，写像$J : \rho \mapsto J(\rho)$は$\mathfrak{A}/\Sigma$から$\mathrm{Prim}\, C^*(G)$への双射を引き起こす．ここで，Σは$\mathfrak{A}$の同値関係で次の性質を持つものである．すなわち，$\rho_1 \Sigma \rho_2 \Leftrightarrow E \in \hat{L}/\tilde{G}$が存在して，$\rho_j \in F(E)$ $(j = 1, 2)$であり，ρ_2は軌道$G \cdot \rho_1$の$F(E)$での閉包に属する．また，$\mathrm{Prim}\, C^*(G)$は$C^*(G)$の原始イデアルの全体である．

さて，$\rho \in F(E)$とする．G_ρ, G_π（Gでのπの固定群）はEによってのみ決まるので，それらをそれぞれ$U(E)$，$G(E)$で表す．ここで，$K(E) \subset G(E)$に注意する．そして$\Gamma(E) = U(E) / K(E)G(E)_0$とおく．ただし，$G(E)_0$は$G(E)$の単位元の連結成分である．また，各$J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$に対して

$$\mathcal{A}(J) = \{\rho \in \mathfrak{A} ; J(\rho) = J\}$$

とおく．

$\boxed{\text{定理1}}$ (Pukanszky)　$J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$ が I 型であるための必要十分条件は次の(i), (ii)がみたされることである．

(i)　G は $A(J)$ に推移的に作用する．

(ii)　$\# \Gamma(E) < +\infty$ ∎

ここで，$J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$ が I 型であるとは，その核が J となる様な G の因子表現が I 型となることである．G が I 型であるとは，すべての $J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$ が I 型であることだから，定理1は G が I 型であるための条件を与えていることになる．さて，G が可解リー群のとき，定理1は G の $\mathfrak{g}^*$ への作用で記述できることがわかっている（単連結という仮定は落とせる）．

$\boxed{\text{問題}}$　一般のリー群 G に対して，定理1を coadjoint表現による作用で記述せよ．

以下この問題を考える．$f \in \mathfrak{g}^*$ とし，$\mathfrak{h}$ を f に関して coisotropic な $\mathfrak{g}$ の部分環とする．

$\boxed{\text{定義}}$　$\mathfrak{h}$ が Pukanszky条件をみたすとは，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^{\perp}$（$\mathfrak{g}^*$ における $\mathfrak{h}$ の annihilator）に対して，$\mathfrak{h}^{f+\lambda} = \mathfrak{h}^{f}$ が成り立つことである．

$\boxed{\text{定義}}$　$\mathfrak{h}$ が可解型であるとは，$\mathfrak{h} = {}^r\mathfrak{h} + \mathfrak{h}(f|_{{}^r\mathfrak{h}})$ となることである．ここで，${}^r\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の solvable radical で

$\mathfrak{h}(f|_{{}^n\mathfrak{h}})$ は $\mathfrak{h}$ における $f|_{{}^n\mathfrak{h}}$ の固定環である.

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{h}$ が強可解型であるとは, $\mathfrak{h} = {}^n\mathfrak{h} + \mathfrak{g}(f)$ が成り立つことである.

$\boxed{\text{定義}}$ f が可解型であるとは, Pukanszky条件をみたし, かつ f に関しcoisotropicな任意の可解型部分環が強可解型になっているときをいう.

$\mathfrak{r}$ を $\mathfrak{g}$ のsolvable radical, R を対応する G の解析部分群とする.

$\boxed{\text{定義}}$ f が $\mathfrak{r}$-admissibleであるとは $R(f)^\sim$ のユニタリ指標 η_f が存在して, 次が成り立つことである:

$$\eta_f(e) = -1, \quad \eta_f(\exp X) = e^{if(X)} \qquad (\forall X \in \mathfrak{r}(f))$$

$\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{r}}$ を可解型かつ $\mathfrak{r}$-admissibleな $f \in \mathfrak{g}^*$ の全体とする. $\Xi^{irr}(f)$ を講演録5と同様に定義されたものとする. (${}^u\mathfrak{g}(f)$ を ${}^\sim\mathfrak{g}(f)$ に $\chi(y)$ を e^{iy} に換える.)

$\boxed{\text{定理2}}$ (Duflo) G を連結とする. このとき, G がI型であるための必要十分条件は次の(i), (ii)が成り立つこと.

(i) $\forall f \in \mathfrak{g}^*_{\mathfrak{r}}$, $G\cdot f$ は $\mathfrak{g}^*$ において局所閉である.

(ii) $\Xi^{irr}(f)$ はI型である. ▨

ここで, $\Xi^{irr}(f)$ の元は, $G(f)/R(f)$ (半単純群になる) のprojective表現とみなせることに注意する.

(野村隆昭記)