数理解析研究所講究録
第481巻 1983年 44-63

$SU(n,1)$ $(n \geq 2)$ の compact 商空間に於る Selberg 型 zeta 関数について

広島大 理　　若山 正人
Masato Wakayama

§0. 序

R を種数 >1 なる compact リーマン面とすると $R = SO(2)\backslash SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ とかける。但し Γ は $SL(2,\mathbb{R})$ の torsion-free な離散部分群である。A. Selberg は有名な論文 [7] で R に付随して，その零点の位置及び位数が R の位相的な情報とラプラシアンのスペクトルに関する情報を与えるような関数 Z_Γ (Selberg zeta 関数) を構成した。

これは，R. Gangolli により階数 1 の対称空間の compact 商空間に拡張された [1]。即ち，G を実階数 1 の半単純リー群とし，K をその極大 compact 部分群としたとき compact な多様体 $K\backslash G/\Gamma$ を考え $L^2(K\backslash G/\Gamma)$ に現れる G の既約ユニタリ表現に関する情報を与える Selberg 型の zeta 関数を構成し，その諸性質を調べた。その後 D. Scott は [6] で $G = SL(2,\mathbb{C})$ の

場合に，$L^2(G/\Gamma)$ に現われる $M=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\right\}$ の既約表現 $\mathfrak{z}$ から誘導されるGの主系列表現に関する情報を提供するSelberg型のzeta関数 $Z_{\Gamma,\mathfrak{z}}$ を構成した。

本稿の目的は，$G=SU(n,1)$ $(n\geqq 2)$ の場合に $L^2(G/\Gamma)$ を考え，上記のようなSelberg型のzeta関数を極大compact部分群Kの殆どすべての1次元表現に付随して構成し諸性質を述べることである。

§1. 記号並びに1つの補題

(i). $G=SU(n,1)$ $(n\geqq 2)$。$G=KA_{\mathfrak{p}}N$ をその岩沢分解とする。ここで $K=S(U(n)\times U(1))$ はGの極大compact部分群である。更に T を K の極大torus（Gのcompact Cartan部分群），M を K に於る $A_{\mathfrak{p}}$ の中心化群，$A_{\mathfrak{k}}$ を M の対角行列から成る部分群とし $A=A_{\mathfrak{p}}A_{\mathfrak{k}}$ とおく。また夫々のリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{h}, \mathfrak{t}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{a}$ とする。$\dim\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=1$ であるから，$H_0\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ を $\beta(H_0)=1$ となるようにとり $t\mapsto tH_0$ $(t\in\mathbb{R})$ によって $\mathbb{R}$ と $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ を同一視出来る。但し，β は $\{$制限root$\}=\{\beta, 2\beta\}$ なるものとする。

Gの任意の部分群Lに対し，Lの既約ユニタリ表現の同値類の全体を $\widehat{L}$ とかく。また $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{l}$ に対し $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ 及び $\mathfrak{l}^*$ で夫々，$\mathfrak{l}$ の複素化，dualを表すものとする。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のCartan部分環 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ に関するrootの集合に適当な順序を

入れ正の root を定め，そのうち $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ 上消えない root の全体を P_+ で表す。$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in P_+}\alpha$ とおくと $\rho(H_0)=n$ である。以後 $\rho_0=n$ とおく。

$\nu\in\mathbb{R}$，$\xi\in\hat{M}$ に対し $(\pi_{\xi,\nu}, H_\xi)$ を G の主系列表現，$\nu\in i\mathbb{R}$，$\xi\in\hat{M}$ に対し $(\pi_{\xi,\nu}, H_\xi)$ を（もしそれがユニタリ化可能ならば）補系列表現とする。補系列表現の parametre ν は，$\nu\in i(-\rho_0,\rho_0)$ なることが知られている。

$\hat{T}$ は $i\mathfrak{t}^*$ のある格子 L_T と同一視される。そこで L_T' を L_T の正則元の全体とし，L_T^+ で L_T' の Weyl 群 $W(G,T)$ に関する基本領域を表すことにすると，L_T^+ は G の離散系列の表現を unique に parametrize する。$\lambda\in L_T^+$ に対し，これに対応する離散系列の表現を $\omega(\lambda)$ とかくことにする。

(ii) G の部分群の Haar 測度の normalization は [1] と同じものを採用する。

$f\in C_c(G)$ に対し，その Abel 変換 F_f を

$$F_f(ma_t)=e^{t\rho_0}\int_{K\times N}f(kma_tnk^{-1})\,dn\,dk \qquad (m\in M,\ a_t=\exp tH_0)$$

で定義する。上で定めた G の表現 $\pi_{\xi,\nu}$ に対し，その指標を $\Theta_{\xi,\nu}$ とすると

(1.1) $\quad \Theta_{\xi,\nu}(f)=\int_M\int_{\mathbb{R}} F_f(ma_t)\,\mathrm{tr}\,\xi(m)\,e^{it\nu}\,dt\,dm$

が成り立ち，更に反転公式と Peter-Weyl の定理により

$$(1.2)\qquad F_f(ma_t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\zeta\in\hat{M}}\int_{\mathbb{R}}\Theta_{\zeta,\nu}(f)\,\mathrm{tr}\,\overline{\zeta(m)}\,e^{-i\nu t}\,d\nu$$

が成立する。

(iii). Γ を torsion-free な G の離散部分群で G/Γ が compact なものとする。T_Γ を Γ の有限次元ユニタリ表現，$\chi=\chi_{T_\Gamma}$ をその指標とする。U を T_Γ から誘導された G の表現とすると U は左正則表現として $L^2(G/\Gamma,T_\Gamma)$ に acts する。Γ の仮定により

$$U\simeq\sum_{\pi\in\hat{G}}m_{T_\Gamma}(\pi)\pi\qquad(\text{離散直和})$$

である。ここで $m_{T_\Gamma}(\pi)$ は $\pi\in\hat{G}$ の U に於る重複度である。

Γ の元 γ は，$A=A_KA_p$ の元と共役であるからその共役元を $h(\gamma)=h_K(\gamma)h_p(\gamma)$ と記す。$u_\gamma=\beta(\log h_p(\gamma))$ と定義すると $|u_\gamma|$ は γ にのみ依存する数である。また任意の $\gamma\in\Gamma\,(\gamma\neq e)$ は unique な primitive 元 δ の正の巾で表されることが知られているので整数 $j(\gamma)$ を $\gamma=\delta^{j(\gamma)}$ で定める。

我々の話に於る主たる道具は Selberg の跡公式である。f を都合の良い関数（admissible function と云う。定義は例えば [2] にある）とすると跡公式は次のように書ける。

$$(1.3)\qquad \sum_{\pi\in\hat{G}}m_{T_\Gamma}(\pi)\Theta_\pi(f)=\chi(e)\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)f(e)$$
$$+\sum_{\gamma\in C_\Gamma\setminus\{e\}}\chi(\gamma)|u_\gamma|j(\gamma)^{-1}C(h(\gamma))F_f(h_p(\gamma))\,。$$

ここで C_Γ は Γ の元の Γ-共役類の代表元の全体，Θ_π は π の指標，$C(h)$ は G の構造のみに依存する正値関数であり，$C(h(\gamma))F_f(h_p(\gamma))$ は γ の G-共役類にのみ依存する数である。詳細は [1] にある。

(iv). $\mathcal{C}'(G)$ を Harish-Chandra の意味において integrable な急減少関数の空間とする。正確な定義は例えば [1] にある。

$\hat{K}_1$ を1次元表現から成る $\hat{K}$ の部分集合とする。$k=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \in K$ に対し $\tau_q(k)=\det(u)^q$ $(q\in\mathbb{Z})$ と定義すれば $\tau_q\in\hat{K}_1$ であり，$\hat{K}_1$ は $\mathbb{Z}$ で parametrize されることが判る。そこで
$\mathcal{C}'(G,\tau_q):=\{f\in\mathcal{C}'(G) \mid f(k_1gk_2)=\tau_q(k_1)f(g)\tau_q(k_2),\ {}^\forall g\in G,\ {}^\forall k_1,k_2\in K\}$ とおく。$\mathcal{C}'(G,\tau_q)$ の元は admissible であることが知られている [2]。

さて，$f\in\mathcal{C}'(G,\tau_q)$ に対して写像 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}(f)=(\mathcal{F}_A(f),\mathcal{F}_T(f)),$$

ここで $\mathcal{F}_A(f)(\zeta,\nu):=\Theta_{\zeta,\nu}(f)$ $(\zeta\in\hat{M},\ \nu\in\mathbb{C})$，$\mathcal{F}_T(f)(\lambda):=\Theta_{\omega(\lambda)}(f)$ $(\lambda\in L_T^+)$ と定義する。

P.C. Trombi [8] によって $\mathcal{F}$ による $\mathcal{C}'(G,\tau_q)$ の像の特徴付けが行われているので，それを利用して $\mathcal{C}'(G,\tau_q)$ の中の特別な関数を選んで跡公式に適用すると次の補題が得られる。

<u>補題1.</u> $\omega(\lambda)$ $(\lambda\in L_T^+)$ を G の離散系列の表現とし，$d(\omega(\lambda))$ をその formal degree とする。このとき，

$0 \leqslant |q| \leqslant n$ かつ $q \equiv n \pmod{2}$ を満たす $q \in \mathbb{Z}$ が存在して $[\omega(\lambda)|_K ; \tau_q] \neq 0$ ならば

$$m_{T_\Gamma}(\omega(\lambda)) = \chi_{T_\Gamma}(e)\, vol(G/\Gamma)\, d(\omega(\lambda)) \qquad (*)$$

が成り立つ。

注意. K-finite な行列要素が integrable であるような離散系列の表現 $\omega(\lambda)$ に対しては、補題の仮定なしで常に等式 (*) が成立する。従ってこの補題は、integrable でない離散系列の表現に対し (*) が成り立つ為の K-type に関する一つの十分条件を与えたものである。

§2. zeta 関数

この §. の前半では、我々の zeta 関数 $Z_{T_\Gamma,\tau}$ の対数微分である $\eta_{T_\Gamma,\tau}$ を定義しその諸性質を調べる。（解析接続と関数等式）。主結果は最後に述べることにする。

正数 ε_0 を一つ固定する。$g \in C^\infty(\mathbb{R})$ を以下の性質を持つ実数値関数とする：(1) 偶関数，(2) 0 のある近傍で $g = 0$，(3) $\{x \mid |x| \geqslant \varepsilon_0\}$ で $g(x) = c$（定数）．(4) $0 \leqslant g \leqslant c$ 。
このような関数は実際に存在する。ε_0 と c の値は後で都合の良いように定めることにする。

各 $\tau_q \in \hat{K}_1$ に対し多項式 P_q を次のように定める。

$$P_q(\nu) := \begin{cases} \nu^2 & : \quad 0 \leq |q| < n \text{ で } q \not\equiv n \pmod{2} \\ 1 & : \quad \text{その他} \end{cases}$$

更に $\mathbb{R}$ 上の微分作用素 D_q をその Fourier 変換が P_q となるものとして定義する。

$\forall s \in \mathbb{C}$ に対して MA_p 上の微分可能な関数 ${}_q\mathcal{G}_s$ を

$$(2.1) \qquad {}_q\mathcal{G}_s(ma_t) = \tau_q^M(m^{-1})\, D_q\left(g(|t|)\exp(\rho_0 - s)|t|\right)$$

で定義する。但し τ_q^M は τ_q の M への制限とする。

いま，$H(r) = \int_0^\infty g'(x)\, e^{irx}\, dx \quad (r \in \mathbb{C})$ とおくと，$g' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ であるから古典的な Paley-Wiener 定理により次の補題が成り立つ。

<u>補題2.</u> H は整関数である。更に $\forall n \geq 1$ と $\forall m \geq 0$ に対し定数 $C_{m,n} > 0$ が存在して

$$|d^m H(r)/dr^m| \leq \begin{cases} C_{m,n} \cdot |r|^{-n} & : \operatorname{Im} r > 0 \\ C_{m,n} \cdot |r|^{-n} \exp(\varepsilon_0 |\operatorname{Im} r|) & : \operatorname{Im} r < 0 \end{cases}$$

が成り立つ。

この関数 H を用いて，${}_q\mathcal{G}_s$ の MA_p の指標 (χ_ξ, ν) における Fourier 変換

$$ {}_q\hat{\mathcal{G}}_s(\xi, \nu) = \int_{\mathbb{R}\times M} \chi_\xi(m)\, e^{i\nu t}\, {}_q\mathcal{G}_s(ma_t)\, dm\, dt$$

を計算すると次が得られる。

補題3. $\mathrm{Re}(s-\rho_0)>0$ ならば

$$(2.2)\qquad {}_q\hat{\mathcal{G}}_s(\xi,\nu)=\begin{cases}0 & :\xi\neq\tau_q^M\\ P_q(\nu)\left\{\dfrac{H(i(s-\rho_0)-\nu)}{s-\rho_0+i\nu}+\dfrac{H(i(s-\rho_0)+\nu)}{s-\rho_0+i\nu}\right\} & :\xi=\tau_q^M\end{cases}$$

$\hat{G}'$ を §1.(注意)の意味での integrable な離散系列からなる $\hat{G}$ の部分集合とする。$(L_T^+)^\circ:=\{\lambda\in L_T^+\mid\omega(\lambda)\notin\hat{G}'\}$, $L_T^+(\tau_q):=\{\lambda\in L_T^+\mid[\omega(\lambda)|K:\tau_q]\neq 0\}$ とおく。また, $\hat{K}_0:=\{\tau_q\in\hat{K}_1\mid(L_T^+)^\circ\cap L_T^+(\tau_q)=\phi$ 或いは $0\leq|q|\leq n\}$ とおく。Trombi [8] の結果により次を得る。

補題4. $\mathrm{Re}\,s>2\rho_0$ とする。$\tau_q\in\hat{K}_0$ ならば $\Theta_{\xi,\nu}({}_qg_s)={}_q\hat{\mathcal{G}}_s(\xi,\nu)$ $(\forall\xi\in\hat{M})$, $\Theta_{\omega(\lambda)}({}_qg_s)=0$ $(\forall\lambda\in L_T^+)$ を満たす $\mathcal{C}'(G,\tau_q)$ の関数 ${}_qg_s$ が存在する。

この補題と (1,2) により次が分る。

$$(2.3)\qquad F_{{}_qg_s}={}_q\mathcal{G}_s$$

我々の Γ の性質より $\{|u_\gamma|\mid\gamma\in C_\Gamma\setminus\{e\}\}$ は最小値を持つことが知られているので先の $\varepsilon_0\,(>0)$ をこの最小値より小さい数にとると

$$(2.4)\qquad g(|u_\gamma|)=c\qquad(\gamma\in C_\Gamma\setminus\{e\})$$

である。さて, 先の関数 g を $\{t\mid|t|\geq\varepsilon_0\}$ に制限して考

えると，$g(t)=c$ であるから直接計算により

(2.5) $\quad D_q(g(t)\exp(\rho_0-s)|t|)=c\,P_q(i(\rho_0-s))\exp(\rho_0-s)|t|$

が確められる。

G の表現 $\pi_{\tau_q^M,\nu}$ を簡単の為 $\pi_{q,\nu}$ とおく。$q\not\equiv n\ (\mathrm{mod.}\,2)$ のとき $\pi_{q,0}$ は既約であるが $q\equiv n\ (\mathrm{mod.}\,2)$ のときは $\pi_{q,0}$ は既約でない。この既約でない場合，$q\neq 0$ ならば $\pi_{q,0}\simeq\pi_{q,0}^{+}\oplus\pi_{q,0}^{-}$ となる。ここで $\pi_{q,0}^{\pm}$ は所謂離散系列の極限と呼ばれる表現で $[\pi_{q,0}^{+}|_K:\tau_q]=0$（$q<0$ のとき），$[\pi_{q,0}^{-}|_K:\tau_q]=0$（$q>0$ のとき）を満たすものである。そこで便宜的に $\pi_{q,0}$ の定義を次のように変える；『$q>0$ のとき $\pi_{q,0}:=\pi_{q,0}^{+}$ とし $q<0$ のとき $\pi_{q,0}:=\pi_{q,0}^{-}$ とする』このようにしておけば，$m_{T_\Gamma}(\pi_{q,0})$ が意味を持ちまた

$$m_{T_\Gamma}(\pi_{q,0}^{+})\Theta_{q,0}^{+}(g_{g_s})+m_{T_\Gamma}(\pi_{q,0}^{-})\Theta_{q,0}^{-}(g_{g_s})=m_{T_\Gamma}(\pi_{q,0})\Theta_{q,0}(g_{g_s})$$

が成り立つ。

$q=0$，即ち τ_q が K の自明な表現のときは [/] の結果に含まれるので以後 $q\neq 0$ として話を進めることにする。

$Q_q:=\{\pi\in\hat{G}\mid\pi\in L^2(G/\Gamma,T_\Gamma),\ \Theta_\pi(g_{g_s})\neq 0\}$ とおく。更に $\mathbb{C}$ の部分集合 Q_q^1,Q_q^2 を

$$Q_q^1:=\{\lambda\in\mathbb{R}^+\mid\ \pi_{q,\lambda}\in\hat{G},\ \pi_{q,\lambda}\in L^2(G/\Gamma,T_\Gamma)\}$$

$$Q_q^2:=\{\lambda\in i\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\mid\pi_{q,\lambda}\in\hat{G},\ \pi_{q,\lambda}\in L^2(G/\Gamma,T_\Gamma)\}$$

で定めると，τ_q の定義により $\pi_{q,\nu}$ と $\pi_{q,-\nu}$ は同値だから

Q_q は $Q_q^1 \cup Q_q^2$ で parametrize される。以後 Q_q と $Q_q^1 \cup Q_q^2$ を同一視する。

さて，以上の準備のもとに

(2.6) $\quad A_q(s) = \sum_{\lambda \in Q_q} m(q,\lambda)\, {}_q\hat{g}_s(\tau_q^M, \lambda)$

但し，$m(q.\lambda) := m_{T_\Gamma}(\pi_q.\lambda)$，とおくと補題3を用いて次が得られる。

<u>補題5.</u> $A_q(s)$ は全平面に有理型に拡張出来る。その極はすべて一位であり，極の位置と留数は次のとうりである。

極 : $s = \rho_0 \pm i\lambda \quad (\lambda \in Q_q)$

留数 : $m(q.\lambda) P_q(\lambda) H(0)$.

但し．$P_q(0) = 0$ ならば，$s = \rho_0$ は極ではないと解釈する。

${}_qg_s$ の定義により $\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ のとき，${}_qg_s$ は admissible 故 (2.3)，(2.4)，(2.5) に注意すると跡公式 (1.3) により

(2.7)
$$A_q(s) - \chi(e)\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)\, {}_qg_s(e)$$
$$= c P_q(i(\rho_0 - s)) \sum_{\gamma \in C_\Gamma \setminus \{e\}} \chi(\gamma) |u_\gamma| j(\gamma)^{-1} C(h(\gamma))\, \tau_q^M(h_K(\gamma))^{-1} \exp(\rho_0 - s)|u_\gamma|$$

が分る。$\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ のとき (2.7) の右辺を $\tilde{\eta}_q(s) = \tilde{\eta}_{T_\Gamma.\tau_q}(s)$ とおく。${}_qg_s$ が admissible であることにより，この和は半平面 $\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0 + \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$ で絶対かつ一様収束することが分るので $\tilde{\eta}_q(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ で正則な関数である。(2.7) の左辺

を用いて $\hat{\eta}_q(s)$ を全平面に解析接続するのであるが、その為に Plancherel の定理を使うので以下に Plancherel 測度 μ_q とその極及び留数を表にして掲げておく。

$\mu_q(\nu) = \mu_{\tau_q^M}(\nu) = (C_q(\nu)C_q(-\nu))^{-1}$. ここで $C_q(\nu)$ は

$$C_q(\nu) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(i\nu/2)\,\Gamma(i\nu/2+\frac{1}{2})}{2^{n-1}(n-1)!\,\Gamma((n+i\nu+q)/2)\,\Gamma((n+i\nu-q)/2)}$$

で与えられる。$\Gamma(\cdot)$ は gamma 関数。[5]

$r_k = r_{q,k}$; the pole of μ_q

$d_k = d_{q,k}$; the residue of μ_q at the pole r_k $(k \in \mathbb{Z})$

$\rho_0 = n$

	r_k	d_k
$\lvert q\rvert \leq n$	$r_k = i(\rho_0 + q + 2k)$ $(k \geq 0)$	$id_k = \frac{(-1)^n}{2^{2n-2}}(n+\lvert q\rvert+2k)\binom{n+\lvert q\rvert+k-1}{n-1}\binom{n+k-1}{n-1}$
$\lvert q\rvert > n$, $q \equiv n$ (mod. 2)	$r_k = 2i(k+1)$ $(0 \leq k \leq (\lvert q\rvert-n)/2-1)$	$id_k = -\frac{k+1}{2^{2n-3}}\binom{(\lvert q\rvert+n)/2+k}{n-1}\binom{(\lvert q\rvert+n)/2-k-2}{n-1}$
	$r_{k+(\lvert q\rvert-n)/2} = i(\rho_0+\lvert q\rvert+2k)$ $(k \geq 0)$	$id_{k+(\lvert q\rvert-n)/2} = \left(\begin{array}{l} id_k \\ \text{in the case } \lvert q\rvert \leq n\end{array}\right)$
$\lvert q\rvert > n$, $q \not\equiv n$ (mod. 2)	$r_k = i(2k+1)$ $(0 \leq k \leq (\lvert q\rvert-n-1)/2)$	$id_k = -\frac{k(k+\frac{1}{2})}{2^{2n-3}}\binom{(\lvert q\rvert+n-1)/2+k}{n-1}\binom{(\lvert q\rvert+n-1)/2-k-1}{n-1}$
	$r_{k+(\lvert q\rvert-n+1)/2} = i(\rho_0+\lvert q\rvert+2k)$ $(k \geq 0)$	$id_{k+(\lvert q\rvert-n+1)/2} = \left(\begin{array}{l} id_k \\ \text{in the case } \lvert q\rvert \leq n\end{array}\right)$

さて，Plancherel の定理より

$$ {}_{g}g_s(e) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathfrak{z} \in \hat{M}} \int_{\mathbb{R}} \Theta_{\mathfrak{z},\nu}({}_{g}g_s) \mu_{\mathfrak{z}}(\nu) d\nu $$

であるが，(2.2) と P_g，μ_g が偶関数であることから

$$ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} P_g(\nu) \frac{H(i(s-\rho_0)+\nu)}{s-\rho_0-i\nu} \mu_g(\nu) d\nu $$

となる。そこで積分路を都合の良いように shift してやると留数定理により

(2.8) $$ {}_{g}g_s(e) = i \sum_{k \geq 0} \frac{H(i(s-\rho_0)+r_k)}{s-\rho_0-ir_k} P_g(r_k) d_k \quad (\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0) $$

となる。 補題2を用いると次が証明できる。

<u>補題6.</u> (2.8) の右辺の級数は，$\{\rho_0 + ir_k\}$ を含まない任意の compact 集合上で絶対かつ一様収束し，従って s に関して全平面で有理型の関数を定義する。この関数は $\rho_0 + ir_k$ ($k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$) で一位の極を持ち他には極は持たない。また $s = \rho_0 + ir_k$ における留数は $iH(0) P_g(r_k) d_k$ である。

上の表より d_k は純虚数であるから，$i\chi(e)\mathrm{vol}(G/\Gamma)H(0) \times P_g(r_k)d_k$ は実数である。我々の測度の normalization の元に於て，$\mathrm{vol}(G/\Gamma)$ は多様体 $K\backslash G/\Gamma$ の Eular-Poincaré 特性数 E の有理数倍である [1]。また表からすぐに判る

ように id_k は有理数であるから，補題6により s の関数 $\chi(e)\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)_g g_s(e)$ の留数の分母を k ($k\geqq 0$, $k\in\mathbb{Z}$) に依存しないでとることが出来る。それ故，ある正の整数 $\tilde{K}$ が存在して $i\cdot\mathrm{vol}(G/\Gamma)\,d_k = e_k E/\tilde{K}$ が成り立つ。但し，$e_k = e_{k,g}$ は整数である。ここで id_k と $e_k E$ の符号は等しい。

関数 $\tilde{\eta}_g(s)$ の定義の中に定数 c が入っていたが，いま c として上記の $\tilde{K}$ をとると $|t|\geqq\varepsilon_0$ ならば $g(t)=\tilde{K}$ であるから $H(0)=\tilde{K}$ が判る。また $P_g(r_k)$ は，すべて整数であるから関数 $\chi(e)\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)_g g_s(e)$ の留数はすべて整数である。

補題5，6，及び $\tilde{\eta}_g(s)$ の定義によって次の補題が得られる。

<u>補題7.</u>　各 $\tau_g\in\hat{K}_0$ に対し，$\hat{\eta}_g(s)$ は，関係式 $\tilde{\eta}_g(s) = A_g(s) - \chi(e)\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)_g g_s(e)$ により，全平面に有理型関数として解析接続出来る。$\hat{\eta}_g(s)$ の極は，すべて一位であり，それは以下のとうりである。

極	留数	
$s=\rho_0\pm i\lambda$	$\tilde{K}\,m(g,\lambda)\,P_g(\lambda)$	$(\lambda\in Q_g)$
$s=\rho_0+ir_k$	$-e_k\cdot E\cdot\chi(e)\,P_g(r_k)$	$(k\geqq 0,\ k\in\mathbb{Z})$。

但し，ある $\lambda\in Q_g$ に対して $\lambda=r_k$ なる k が存在した場合には

$\rho_0 + ir_K$ における留数は $(K m(q, r_K) - e_K E \chi(e)) P_q(r_K)$ であるとする。また $\lambda = 0 \in Q_q$ ならば、この極での留数は、$2K m(q, 0) P_q(0)$ とする。もちろん $P_q(0) = 0$ ならば、$s = \rho_0$ は極でない。

関数 $\Phi_q(\nu)$ を

$$\Phi_q(\nu) = \tilde{K} \cdot \chi(e) \, \mathrm{vol}(G/\Gamma) \, P_q(i\nu) \, \mu_q(i\nu)$$

で定義する。μ_q の極と留数の表と補題7により、関数

$$g_q(s) := \tilde{\eta}_q(s) + \tilde{\eta}_q(2\rho_0 - s) + \Phi_q(s - \rho_0)$$

は整関数であることが判る。そこで再度 Selberg の跡公式を利用すると $\mathbb{R}$ 上で恒等的に $g_q(s) = 0$ が言えるので、次の関数等式が証明出来る。

<u>補題8.</u> $\tau_q \in \hat{K}_0$ に対して

(2.9) $\quad \tilde{\eta}_q(s) + \tilde{\eta}_q(2\rho_0 - s) + \Phi_q(s - \rho_0) = 0$

が成り立つ。

関数 $\eta_q^0(s)$ と $\phi_q(s)$ を次で定める。

$$\eta_q^0(s) := \tilde{\eta}_q(s)\,(P_q(i(s-\rho_0)))^{-1}$$

$$\phi_q(s) := -\Phi_q(s-\rho_0)\,(P_q(i(s-\rho_0)))^{-1}$$

$$= -k\,\chi(e)\,\mathrm{vol}(G/\Gamma)\,\mu_q(i(s-\rho_0)) .$$

いま $\tau_q \in \hat{K}_0$ を $0<|q|<n$ と $q \not\equiv n \pmod{2}$ を満たすものとすると $P_q(i(s-\rho_0)) = -(s-\rho_0)^2$ である。この場合補題7の最後の注意にあるように $s=\rho_0$ は $\hat{\eta}_q(s)$ の極ではない。よって $\eta_q^0(s)$ は $s=\rho_0$ において高々2位の極をもつことがその定義から直ちに分る。よって関数等式 $\eta_q^0(s)+\eta_q^0(2\rho_0-s)=\phi_q(s)$ により $\eta_q^0(s)$ は奇数位の極しか持たないことが判るので、結局 $\eta_q^0(s)$ は高々1位の極しか持たない。

そこで、$q \neq 0$ なる任意の $\tau_q \in \hat{K}_0$ に対し、数 $\tilde{r}_q = \tilde{r}_{\tau_q}$ を次のように定義する。

$$\tilde{r}_q = \begin{cases} 0<|q|<n,\ q \not\equiv n \pmod{2} \text{ であり、} s=\rho_0 \text{ において} \\ \eta_q^0(s) \text{ が極をもつときは、その留数} \\ \\ \text{その他の場合は } 0 \end{cases}$$

更に関数 $\eta_q(s)$ を次で定義する。

$$\eta_g(s) = \eta_g^0(s) - \tilde{r}_g/(s-\rho_0) \quad .$$

今迄の結果をまとめることにする。

補題9. $\tau_g \in \hat{K}_0$ $(g \neq 0)$ に対して，$\eta_g(s)$ は一位の極のみを持つ有理型関数であり，その極の位置と留数は次のとうりである；

極	留数		
$s = \rho_0 \pm i\lambda$	$\kappa\, m(g, \lambda)$	$(\lambda \in Q_g)$	(下記の注意参照)
$s = \rho_0 + ir_k$	$-\chi(e)e_k E$	$(k \geq 0,\ k \in \mathbb{Z})$。	

更に関数等式を持つ；

$$\eta_g(s) + \eta_g(2\rho_0 - s) = \phi_g(s) \quad 。$$

注意. $0 < |g| < n$，$g \not\equiv n \pmod{2}$ の場合，たとえ $0 \in Q_g$ であっても $\eta_g(s)$ は $s = \rho_0$ で極を持たない。

$\eta_g(s) = \eta_{T_r \cdot \tau_g}(s)$ は上で見たように，その極はすべて一位で，留数はすべて整数であるから，$(d/ds)(\log z_g(s)) = \eta_g(s)$ を満たす有理型関数 $z_g(s) = z_{T_r \cdot \tau_g}(s)$ が定数倍を除いて unique に存在する。そこで $\mathrm{Re}\, s_0 > 2\rho_0$ であるような $s_0 \in \mathbb{C}$ を選び

$$Z_q(s) = c_0 \cdot \exp\left(\int_{s_0}^{s} \eta_q(z)\,dz\right)$$

とおく。但し c_0 は Z_q を適当に normalize する定数であるとする。本稿の主な結果は次のとうりである。

<u>定理10.</u> 各 $\tau_q \in \hat{K}_0$ $(q \neq 0)$ に対して，関数 Z_q は以下の性質を持つ。

(A). Z_q は半平面 $\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ で正則で，更に全平面に有理型関数として解析接続出来る。

(B). 次の関数等式を満たす。

$$Z_q(2\rho_0 - s) = c_1 \cdot \exp\left\{\tilde{\kappa}\, \mathrm{vol}(G/\Gamma)\, \chi_{T_\Gamma}(e) \int_{s_0}^{s} \mu_q(i(z-\rho_0))\,dz\right\} \cdot Z_q(s)$$

但し. $c_1 = Z_q(2\rho_0 - s_0)\, Z_q(s_0)^{-1}$。

(C). Z_q の non-trivial な零点は．有限個の例外を除けばすべて線分 $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s = \rho_0\}$ 上にある。有限個の例外は（もしあるとすればそれらは）実数で区間 $[0, 2\rho_0]$ に ρ_0 に関し対称な位置にある。更に，Z_q の non-trivial な零点 $s = \rho_0 \pm i\lambda$ $(\lambda \in Q_q)$ の位数は $\tilde{\kappa} \cdot m_{T_\Gamma}(q, \lambda)$ で与えられる。

(D). 下の表にあるように，Z_q は $s = \rho_0 + i r_k$ $(k \geq 0,\ k \in \mathbb{Z})$ で位数が $e_{k,q} \cdot E \cdot \chi_{T_\Gamma}(e) = i d_{k,q} \cdot \chi_{T_\Gamma}(e)\, \mathrm{vol}(G/\Gamma)\, \tilde{\kappa}$ の極あるいは零点を持つ。（自明な極あるいは零点とい

う。)

τ_q		ρ_0+ir_k ; the location of pole or zero
$\|q\| \leq n$	n ; even	pole
	n ; odd	zero
$\|q\| > n$	n ; even	$0 \leq k \leq (\|q\|-n-1)/2$; zero
		$k \geq (\|q\|-n)/2$; pole
	n ; odd	zero

(E). $\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ で Z_q は無限積表示を持つ。即ち，0でない定数 C が存在して

$$Z_q(s) = C(s-\rho_0)^{-\tilde{r}_q} \prod_{\delta \in \mathrm{Prim.}} \prod_{\lambda \in L} \left(\det\left(I - T_r(\delta)\tau_q^M(h_k(\delta))^{-1}\xi_\lambda(h(\delta))^{-1} e^{-su_\delta}\right)\right)^{m_\lambda \cdot \tilde{k}}.$$

ここで Prim. は Γ の primitive な元全体。$P_+ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$ とするとき $L := \{\lambda = \sum_{i=1}^{t} m_i \alpha_i \mid m_i \in \mathbb{Z},\ m_i \geq 0\}$ で，m_λ は λ を $\lambda = \sum_{i=1}^{t} m_i \alpha_i$ と表したときの表し方の数とする。また ξ_λ は λ に対応する A の指標とする。

$\square$

以上に関する詳しいことは preprint がありますので参照して下さい。

文 献

[1]. Gangolli, R. Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. 21, 1~41 (1977)

[2]. Gangolli, R., Warner, G. On Selberg's trace formula. J. Math. Soc. Japan 27, 328~343 (1973)

[3]. Knapp, A.W., Okamoto, K. Limits of holomorphic discrete series. J. Func. Analysis 9, 375-409 (1972)

[4]. Knapp, A.W., Stein, E.M. Intertwining operators for semi-simple groups, II. Invent. Math. 60, 9-84 (1980)

[5]. Muta, Y. On the spherical functions with one dimensional K-types and Paley-Wiener type theorem on some simple Lie groups. Rep. Fac. Sci. & Eng., Saga Univ. 9, 31~59 (1981)

[6]. Scott. D. Selberg type zeta functions for the group of complex two by two matrices of determinant one. Math. Ann. 253, 177~194 (1980)

[7]. Selberg, A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20, 47~87 (1956)

[8]. Trombi, P.C. Harmonic analysis of $C^p(G.F)$ $(1 \leq p < 2)$. J. Func. Analysis. 40, 84 ~ 125 (1981)

[9]. Wallach, N.R. On the Selberg trace formula in the case of compact quotient. Bull. Amer. Math. Soc. 82, 171 ~ 195 (1976).

[10]. Wakayama, M. Zeta functions of Selberg's type for compact quotient of SU(n.1) $(n \geqq 2)$. preprint.