

## $SU(n,1)$ の保型形式の次元公式について

立教大 理 加藤 末広

(Kato Suehiro)

この報告の目的は, Selberg の跡公式を用いて  $SU(n,1)$  の lattice に対して保型形式の次元公式を求めることである。特に level 3 以上の合同部分群  $\Gamma(N)$  に対してこの次元公式が適用できる。 $\Gamma(N)$  についての更に詳しい結果は, [9] で述べる予定である。なお今までの結果としては  $SU(2,1)$  に関して Cohn が Selberg の跡公式を使う方法で, Hemperly が Riemann-Roch の定理を用いる方法である non-uniform lattice に対して保型形式の次元を計算している。また uniform lattice に対しては Langlands 等により一般の半単純群で研究されている。

### § 1. 記号と準備

$K$  を虚 2 次体,  $S$  を  $\bar{S} = -S$  かつ  $-iS > 0$  となるような  $GL_{n-1}(K)$  の元とする。そのとき次のような  $\mathbb{Q}$  上定義された

代数群を考える;

$$G_{\mathbb{R}} = \{ g \in SL_{n+1}(\mathbb{C}); {}^t \bar{g} R g = R \}$$

$$G_{\mathbb{R}} = \{ g \in SL_{n+1}(\mathbb{C}); {}^t \bar{g} R g = R \}.$$

但し  $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$  とおく。  $G_{\mathbb{R}}$  は  $SU(n,1)$  に同型である。以下簡単のため  $G = G_{\mathbb{R}}$  とかこう。  $G$  は type 2 の Siegel 領域  $\mathcal{Z}$  に自然に作用する; すなわち,

$$\mathcal{Z} = \{ z = (w, z) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}; i({}^t \bar{w} S w + {}^t \bar{z} - z) > 0 \}$$

$$g z = \left( \frac{a_1 w + b_1 z + c_1}{a_3 w + b_3 z + c_3}, \frac{a_2 w + b_2 z + c_2}{a_3 w + b_3 z + c_3} \right)$$

$$\left( g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in G \quad \left( \begin{array}{l} R \text{ と同じ block} \\ \text{で分けたもの} \end{array} \right) \right. \\ \left. z = (w, z) \in \mathcal{Z} \right)$$

とおく。以下  $z = (w, z) \in \mathcal{Z}$  に対し,  $w(z) = w, z(z) = z$  とかく。また任意の  $g \in G, z \in \mathcal{Z}$  に対し,  $\mu(g, z) = a_3 w + b_3 z + c_3$  と定義する。

$z_0 = (0, i) \in \mathcal{Z}$  としよう。そのとき  $K = \{ g \in G; g z_0 = z_0 \}$  は極大コンパクト部分群になる。

$$A = \left\{ a(v) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{v}^{-1} \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C}); v > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ (x, y) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & x \\ {}^t \bar{x} S & 1 & y + \frac{1}{2} {}^t \bar{x} S x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C}); \begin{array}{l} x \in \mathbb{C}^{n-1} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

とおく。そのとき  $G$  は岩沢分解  $G = NAK$  を持つ。この分解で  $g = (x, y) a(v) k$  としたとき,  $G$  上の Haar 測度を次のように正規化しよう;

$$dg = \frac{dx dy dv dk}{v^{n+1}}.$$

ここで  $dx$  は  $\mathbb{C}^{n-1} (\cong \mathbb{R}^{2(n-1)})$  上の Euclidean 測度,  $dy, dv$  は  $\mathbb{R}$  上の Euclidean 測度,  $dk$  は  $\int_K dk = 1$  となるように正規化された  $K$  上の Haar 測度とする。

$\Gamma$  を  $G$  の離散群としよう。  $\Gamma$  は  $\mathbb{R}$  の体積が有限のとき lattice, さらに  $\mathbb{R}$  が compact のとき, uniform lattice であるという。今  $v_0 > 0$  に対し,  $A(v_0) = \{a(v) \in A; v > v_0\}$  とおく。そのとき  $N$  における 1 の任意の開かつ相対コンパクトな近傍  $\eta$  に対して  $\Omega_{v_0, \eta} = \Gamma A(v_0) K (\subset G)$  とおく。次の補題は Garland-Raghunathan [3] によりよく知られている。

補題 1.1. (Garland-Raghunathan)  $\Gamma$  を  $G$  の任意の lattice とする。そのとき次の条件をみたすようなある  $v_0 > 0, N$  のある開かつ相対コンパクト集合  $\eta_0, G$  の有限集合  $\Xi, G$  の相対コンパクト集合  $\Omega$  が存在する;

(i)  $\Omega_{v_0, \eta_0} = \Omega \cup \left( \bigcup_{k \in \Xi} k \Omega_{v_0, \eta_0} \right)$  とおいたとき,

$$\Gamma \Omega_{v_0, \eta_0} = G$$

(ii)  $\{r \in \Gamma; r \Omega_{v_0, \eta_0} \cap \Omega_{v_0, \eta_0} \neq \emptyset\}$  は有限集合

(iii)  $M$  を  $K$  における  $A$  の中心化群,  $P = NAM$  とする。そ

のとき, “ $\gamma h \in \mathcal{O}_{v_0, \tau_0} \cap h' \mathcal{O}_{v_0, \tau_0} \neq \emptyset$  ( $h, h' \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma$ )  $\Rightarrow$   
 $h = h', h^{-1} \gamma h \in P$ .”

例 1.2.  $\mathcal{O}$  を  $K$  の整数環,  $L = \mathcal{O} \times \cdots \times \mathcal{O}$  ( $n+1$ 個)  
 とおき,  $N \in \mathbb{N}$  に対し,

$$\Gamma(N) = \{ \gamma \in G_{\mathcal{O}}; L(\gamma-1) \subset NL \}$$

と定義する。 $\Gamma(N)$  は合同部分群とよばれる  $G$  の離散部分群で  
 $\Gamma(N)$  は  $\Gamma(1)$  の正規部分群である。 $\Gamma(1)$  に対しては Borel (1)  
 により上の補題の三として  $\Gamma(1) \backslash G_{\mathcal{O}} / P_{\mathcal{O}}$  の完全代表系をとる  
 ことができる。ここで,  $P_{\mathcal{O}} = G_{\mathcal{O}} \cap P$ 。

## § 2. 保型形式と次元公式

$l \in \mathbb{Z}$  とする。 $G$  の lattice  $\Gamma$  に対して,  $\mathfrak{z}$  上の正則関数  
 $F(\mathfrak{z})$  が weight  $l$  の  $\Gamma$ -保型形式であるとは  $F(\mathfrak{z})$  が

$$F(\gamma \mathfrak{z}) = \mu(\gamma, \mathfrak{z})^l F(\mathfrak{z}) \quad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}, \gamma \in \Gamma)$$

を満たすときにいう。さらに  $F(\mathfrak{z})$  が条件:

$$\left( \operatorname{Im} \mathbb{Z}(\mathfrak{z}) + \frac{1}{2} {}^t \bar{W}(\mathfrak{z}) S W(\mathfrak{z}) \right)^{\frac{l}{2}} F(\mathfrak{z}) \text{ は } \mathfrak{z} \text{ 上有界}$$

を満たすとき,  $F(\mathfrak{z})$  を weight  $l$  の  $\Gamma$ -cusp 形式という。 $S_l(\Gamma)$   
 を (weight  $l$  の)  $\Gamma$ -cusp 形式全体としよう。 $F(\mathfrak{z}) \in S_l(\Gamma)$  に対  
 し  $G$  上の関数  $f_F(g)$  を,

$$f_F(g) = \mu(g, \mathfrak{z}_0)^{-l} F(g \mathfrak{z}_0)$$

で定義する。そのとき次の補題が成立する。

補題 2.1.  $l > 2n$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) と仮定する。そのとき  $G$  上の函数  $f$  がある  $F \in S_e(\Gamma)$  に対して  $f = f_F$  となるための必要十分条件は  $f$  が次の条件を満足することである:

(i)  $f(g)$  は  $G$  上有界

(ii)  $f(\gamma g k) = \mu(k, z_0)^{-l} f(g)$  ( $\gamma \in \Gamma, g \in G, k \in K$ )

(iii)  $f(k) = C_l \int_G \omega_l(g^{-1}k) f(g) dg$  ( $k \in G$ )

但し,  $C_l = \frac{(l-1)!}{2^{n+1} \pi^n (l-n-1)!}$ ,

$$\omega_l(g) = \mu(g, z_0)^{-l} \left( \frac{z(gz_0) + i}{2i} \right)^{-l}.$$

注意 2.2.  $\omega_l(g)$  は次のような意味で球函数になる:

(i)  $\omega_l(kgk') = \mu(k, z_0)^{-l} \omega_l(g) \mu(k', z_0)^{-l}$

(ii)  $\omega_l(1) = 1$

(iii)  $\omega_l(g)$  は  $G$  の Casimir 作用素の固有函数である。

また上の仮定  $l > 2n$  は  $\int_G |\omega_l(g)| dg < \infty$  なる条件である。

上の補題を使って, Selberg, Godement によるよく知られた方法に従い次の次元公式が示される。

定理 2.3.  $l > 2n$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) と仮定する。そのとき  $G$  の任意の lattice  $\Gamma$  に対し,  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \omega_l(g^{-1}\gamma g)$  は  $\Gamma \backslash G$  上有界でかつ次の式が成立する:

$$\dim Se(\Gamma) = Ce \int_{\Gamma \backslash G} \sum_{\gamma \in \Gamma} \omega_e(g^{-1}\gamma g) dg.$$

### § 3. 次元の計算

前定理の右辺の計算を進めるため、積分と和の順序を交換すると便利なのだが、一般に  $\Gamma$  が *non-uniform lattice* の場合 *parabolic* 元の存在のためにそれはできない。しかし右辺の各項に 1 に十分近い *damping factor* とよばれるある関数をかけることによりこの交換が可能となる。これは Selberg 以来次元公式を求めるのによく使われる方法である。我々はこの方法により  $G$  のある *lattice* に対し次元を計算しよう。以下  $l > 2n$  ( $l \in \mathbb{Z}$ )、 $\Gamma$  を  $G$  の *lattice* とする。

まず  $\Gamma$  の元を次のように分類する。(i)  $\gamma \in \Gamma$  が *central*  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma \in Z(\Gamma)$  ( $:= \Gamma$  の中心), (ii)  $\gamma \in \Gamma$  が *elliptic*  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma$  は *non-central* でかつ  $K$  の元に  $G$  共役な *semisimple* 元, (iii)  $\gamma \in \Gamma$  が *hyperbolic*  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma$  は *non-central, non-elliptic semisimple* 元, (iv)  $\gamma \in \Gamma$  が *parabolic*  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma$  は *non-semisimple* 元。

我々は以下次の仮定(\*)をみたすような  $G$  の *lattice* を考察する;

- (\*) (i)  $\Gamma$  は *elliptic* 元を含まない。  
 (ii)  $\mathfrak{M}, \mathfrak{P}, \mathfrak{N}$  を補題 1.1. でいうものとする。そのと

き任意の  $A \in \Sigma$  に対して,

$$A P A^{-1} \cap \Gamma = Z(\Gamma) \cdot A N A^{-1}$$

が成立する。

$\Gamma$  がこれらの条件をみたすとき parabolic 元全体  $\Pi(\Gamma)$  に対して次のことが成立する。

補題 3.1. (Raghunathan-Warner [8])  $\Gamma_0$  を  $G$  の lattice で  $\Gamma$  をその正規部分群として含むようなものとする (例えば  $\Gamma_0 = \Gamma$ )。そのとき,

$$\Pi(\Gamma) = \bigcup_{A \in \Sigma(\Gamma_0)} \bigcup_{\delta \in \Gamma_0 / \Gamma_0 \cap A P A^{-1}} \left\{ \delta A n z A^{-1} \delta^{-1} ; \begin{array}{l} n \in N \cap A \Gamma A^{-1} \\ n \neq 1 \\ z \in Z(\Gamma) \end{array} \right\}$$

ここで  $\Sigma(\Gamma_0)$  は  $\Gamma_0$  に対して補題で与えられた  $\Sigma$  であり,  $\delta$  は  $\Gamma_0 / \Gamma_0 \cap A P A^{-1}$  の完全代表系を動くものとする。 $\Pi(\Gamma)$  の上の表示の仕方は一意的である。

この事実を使って  $Se(\Gamma)$  の次元を計算しよう。次の補題は以下の計算に基本的である。

補題 3.2.  $F(N)$  を  $N$  の  $N \cap \Gamma$  における基本領域として  $L > 0$  に対して,

$$E(\infty) = \left\{ g = [x, y] \cdot a(v) k ; \begin{array}{l} (x, y) \in F_N \\ v > 0, k \in K \end{array} \right\}$$

$$V_\infty(L) = \left\{ g = [x, y] \cdot a(v) k \in E(\infty) ; v > L \right\}$$

とおく。そのとき十分大きな正数  $L$  に対して次の主張が成り立つ:

$$\begin{aligned}
& \text{(i)} \quad \int_{V_\infty(L)} \sum_{r \in \Gamma - (\Gamma \cap P)} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg \text{ は項別積分可能} \\
& \text{(ii)} \quad \int_{V_\infty(L)} v(g)^{-\varepsilon} \sum_{r \in \Gamma \cap P} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg \\
& \quad = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{r \in \Gamma \cap P} \int_{V_\infty(L)} v(g)^{-\varepsilon} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg \\
& \text{(iii)} \quad \sum_{r \in \Gamma \cap N \setminus \{1\}} \int_{E^{(\infty)} - V_\infty(L)} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg \\
& \quad = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{r \in \Gamma \cap N \setminus \{1\}} \int_{E^{(\infty)} - V_\infty(L)} v(g)^{-\varepsilon} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg.
\end{aligned}$$

ここで岩沢分解に従い,  $g = n a(v(g)) k \in NAK$  とおいた。

上の補題の  $v(g)^{-\varepsilon}$  が dumping factor とよばれるものである。  
 の補題によりまず,

$$\begin{aligned}
\dim S_\varepsilon(\Gamma) &= C_\varepsilon \sum_{z \in Z(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(g^{-1}zg) dg \\
\text{(1)} \quad &+ C_\varepsilon \sum_{r: \text{hyperbolic}} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg \\
&+ C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{R \in \mathfrak{O}} \sum_{z \in Z(\Gamma)} \sum_{s \in \mathfrak{O}} \sum_{\substack{r \in \Gamma \cap P \\ r \in \Gamma \cap N \setminus \{1\}}} \omega_\varepsilon(g^{-1}srnzr^{-1}sg) dg
\end{aligned}$$

右辺の第3項をまとめよう。次の命題は補題3.2. を使って証明される:

命題3.3.  $\int_{R^{-1}\Gamma_0 R \cap N} \sum_{r \in R^{-1}\Gamma R \cap N \setminus \{1\}} |\omega_\varepsilon(g^{-1}rg)| dg$  が絶対収束して次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{r \in R^{-1}\Gamma R \cap N \setminus \{1\}} \int_{R^{-1}\Gamma_0 R \cap N} v(g)^{-\varepsilon} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg \\
& = \int_{R^{-1}\Gamma_0 R \cap N \setminus \{1\}} \sum_{r \in R^{-1}\Gamma R \cap N \setminus \{1\}} \omega_\varepsilon(g^{-1}rg) dg \quad (A \in \mathfrak{O}(\Gamma_0)).
\end{aligned}$$



この命題を使って,

$$(1) \text{の右辺の第3項} = C_\ell C_{Z(\Gamma), \ell} \sum_{R \in \Xi(\Gamma_0)} \frac{1}{W_R} \int_{\substack{G \\ R^{-1}\Gamma R \cap N}} \sum_{g \in R^{-1}\Gamma R \cap N \setminus \{1\}} \omega_\ell(g^{-1}rg) dg$$

$$(2) = C_\ell C_{Z(\Gamma), \ell} \sum_{R \in \Xi(\Gamma_0)} \frac{1}{W_R} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{g \in R^{-1}\Gamma R \cap N \setminus \{1\}} \int_{\substack{G \\ R^{-1}\Gamma R \cap N}} v(g)^{-\varepsilon} \omega_\ell(g^{-1}rg) dg \right\}$$

ここで,  $C_{Z(\Gamma), \ell} = \sum_{z \in Z(\Gamma)} \mu(z, z_0)^{-\ell}$ ,  $W_R = [R^{-1}\Gamma_0 R \cap P, R^{-1}\Gamma_0 R \cap N]$ .

さて(2)の右辺の計算を実行するために,  $N$ を2つに分解して考える:

$$N_1 = \{[0, \gamma] \in N; \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

$$N_2 = \{[x, \gamma] \in N; x \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

そのとき,

補題3.4. 任意の  $R \in \Xi(\Gamma_0)$  に対し次式が成立;

$$(i) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{g \in R^{-1}\Gamma R \cap N_1} \int_{\substack{G \\ R^{-1}\Gamma R \cap N}} v(g)^{-\varepsilon} \omega_\ell(g^{-1}rg) dg$$

$$= \text{vol}(R^{-1}\Gamma_0 R \cap N \setminus N) V_R^{-n} 2^n \frac{(\ell-n-1)!}{(\ell-1)!} (2\pi)^n \zeta(1-n).$$

ここで  $V_R = \min \{ \gamma > 0; [0, \gamma] \in R^{-1}\Gamma R \cap N \}$  とおいた。また

$\zeta(s)$  は Riemann zeta 函数。

$$(ii) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{g \in R^{-1}\Gamma R \cap N_2} \int_{\substack{G \\ R^{-1}\Gamma R \cap N}} v(g)^{-\varepsilon} \omega_\ell(g^{-1}rg) dg = 0.$$

特に,  $n$  が  $n > 1$  なる奇数ならば  $\pi(\Gamma)$  の,  $Se(\Gamma)$  の次元

公式への寄与は zero。

(証明は Cauchy の積分定理や共役類の構造を調べることな

どより得られる。)

以上で  $\pi(\Gamma)$  の,  $Se(\Gamma)$  の次元公式への寄与が計算された。  
hyperbolic 元については次の補題が成り立つ。

補題 3.5.

$$\sum_{r: \text{hyperbolic}} \int_{\Gamma_r} w(g^{-1}rg) dg = 0$$

(証明) 容易に示されるように

$$\sum_{r: \text{hyperbolic}} \int_{\Gamma_r} w(g^{-1}rg) dg = \sum_{(r): \text{hyperbolic}} \text{vol}\left(\frac{G_r}{\Gamma_r}\right) \int_{\frac{G_r}{\Gamma_r}} w(g^{-1}rg) dg.$$

但し,  $G_r, \Gamma_r$  はそれぞれ  $r \in \Gamma$  の  $G, \Gamma$  における中心化群で、  
右辺の和は  $\Gamma$  の hyperbolic 元の ( $\Gamma$  における) 共役類全体を動く。  
従って注意 2.2. により, 補題は Harish-Chandra [4] で与えられた Selberg の原理を  $w(g)$  に適用することから得られる。  
q. e. d.

以上をまとめて次の定理を得る;

定理 3.6.  $l > 2n$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ),  $\Gamma$  を  $G$  の lattice で (A) の条件を満たすとする。 $\Gamma_0$  を  $G$  の lattice で  $\Gamma$  をその正規部分群として含むものとする。そのとき次の次元公式が成立する;

$$\dim Se(\Gamma) = C_{Z(\Gamma), l}[\Gamma_0, \Gamma] \frac{(l-1)!}{2^{n+1} \pi^n (l-n-1)!} \text{vol}\left(\frac{G}{\Gamma_0}\right) + C_{Z(\Gamma), l}[\Gamma_0, \Gamma] \sum_{R \in \Gamma_0} \text{vol}(R \backslash \Gamma_0 \backslash N) w_R^{-1} v_R^{-n} 2^{n-1} \zeta(1-n).$$

特に,  $n$  が  $n > 1$  なる奇数ならば右辺の第 2 項 = 0。ここで

三(Γ₀) は Γ₀ に対し補題 1.1. で与えられた有限集合,  $C_{Z(\Gamma), l} = \sum_{z \in Z(\Gamma)} \mu(z, z_0)^{-l}$ ,  $\nu_R = \min\{y > 0; [0, y] \in N \cap K^{-1}\Gamma K\}$ ,  $w_R = [K^{-1}\Gamma_0 K \cap P, K^{-1}\Gamma_0 K \cap N]$ ,  $\zeta(s)$  は Riemann zeta 函数である。

例 3.7. Γ として例 1.2. における Γ(N) をとろう。但し,  $N \geq 3$  とする。そのとき, Γ(N) は (\*) の条件 (i) (ii) をみたし,  $Z(\Gamma) = \{1\}$  である。よって定理 3.6. が  $\Gamma = \Gamma(N)$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma(1)$  に対して適用できる;

$$\dim S_e(\Gamma(N)) = [\Gamma(1), \Gamma(N)] \frac{(l-1)!}{2^{n+1} \pi^n (l-n-1)!} \text{vol} \left( \frac{G}{\Gamma(1)} \right) + [\Gamma(1), \Gamma(N)] \sum_{K \in \Gamma(1) \backslash G_0 / P_0} \text{vol} \left( \frac{N}{K^{-1}\Gamma(N)K} \right) w_R^{-1} \nu_R^{-n} 2^{n-1} \zeta(1-n).$$

最初に述べたように Γ(N) についての次元公式はさらに [9] で述べる予定である。

定理 3.6. の応用として次の命題が与えられる。結果はすでに一般的に Mumford [6] によって知られている。

定理 3.6. の系. Γ, Γ' を任意の lattice とする。そのとき,  $\text{vol}(\Gamma \backslash G)$ ,  $\text{vol}(\Gamma' \backslash G)$  の比は有理数である。

証明は条件 (\*) をみたす lattice Γ に対して定理 3.6. を適用し,

$$C_{Z(\Gamma), l} \frac{n!}{2^{n+1} \pi^n} \text{vol}(\Gamma \backslash G) \in \mathbb{Z}$$

を示すことにより得られる。

## 参考文献

- [1] A. Borel, Reduction theory for arithmetic groups, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 20-25.
- [2] L. Cohn, The dimension of spaces of automorphic forms on a certain two dimensional complex domain, Memoirs Amer. Math. Soc., No 158, Providence, Rhode Island, 1975.
- [3] H. Garland and M. S. Raghunathan, Fundamental domains for lattices in  $(\mathbb{R})$ -rank 1 semi-simple groups, Ann. of Math. 92 (1970), 279-326.
- [4] Harish-Chandra, Discrete series for semi-simple Lie groups II. Explicit determination of the characters, Acta Math. 116 (1966), 1-111.
- [5] J. C. Hemperly, The parabolic contribution to the number of linearly independent automorphic forms on a certain bounded domain, Amer. J. of Math. 94 (1972) 1078-1100.
- [6] D. Mumford, Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case, Inventiones Math. 42 (1977), 239-272.
- [7] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47-87.
- [8] G. Warner, Selberg's trace formula for non-uniform lattices: The  $\mathbb{R}$ -rank one case, Advances in Math. Studies, vol. 6 (1979), 1-142.
- [9] 加藤末広,  $SU(n,1)$  の保型形式の次元公式について ( $\Gamma = \Gamma(N)$  ( $N \geq 3$ ) の場合), 概均質ベクトル空間とその周辺 (82年), 数理研講究録, to appear.