数理解析研究所講究録
第481巻 1983年 93-108

Schrödinger方程式の固有解と群の表現

早大 理工 大豆生田雅一
Mamiuda Masaichi

§1 序. 次の様な微分作用素を考える。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{a}{|x|} \qquad \hbar, m, a \in \mathbb{R},\ \hbar>0,\ m>0,\ a\neq 0.$$

$$X_{ij} = x_i\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad 1\le i, j\le n.$$

$$\sqrt{-1}\,Y_k = x_k\Delta - D\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{n-1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{ma}{\hbar^2}\frac{x_k}{|x|} \qquad 1\le k\le n.$$

ここで $x = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$

又, $\Delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$ $\quad D = \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$

おると, H は formally hermitian, 又, X_{ij}, Y_k は formally skew hermitian となる。さらに H は X_{ij}, Y_k と可換であり, 次の commutating relations

$$(1)\begin{cases} [X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{jk}X_{il} + \delta_{il}X_{jk} + \delta_{ik}X_{lj} + \delta_{jl}X_{ki} \\ [X_{ij}, Y_k] = \delta_{jk}Y_i - \delta_{ik}Y_j \\ [Y_i, Y_j] = \left(\frac{2m}{\hbar}H\right)X_{ij} \end{cases}$$

を満す。従って次の Schrödinger 方程式

(2) $Hu = Eu \quad (E \in \mathbb{R})$

の解空間では $E>0$, $E=0$, $E<0$ に応じて、(1)は Lorentz群 $SO_0(1,n)$、Euclid 運動群 $M(n)$, 回転群 $SO(n+1)$ の各々の Lie 代数の commutating relations と同値となる。従って、この空間に、各々の Lie 代数の infinitesimally unitary な表現が実現出来る。

さらに、次の式

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 = \left(\frac{2m}{\hbar^2}H\right)\left(|x|^2\Delta - D^2 - (n-2)D - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{me}{\hbar^2}\right)^2$$

と

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} X_{ij}^2 = |x|^2\Delta - D^2 - (n-2)D$$

が成立するから

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - \left(\frac{2m}{\hbar^2}H\right)\sum_{1\leq i<j\leq n} X_{ij}^2$$

とすると、

Ω は各々の Lie 代数の Casimir operator の定数倍に対応しており、(2)の解空間では scalar

$$\Omega = -\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) - \left(\frac{me}{\hbar^2}\right)^2$$

となる。故に、上の表現は各々の群の、ある既約ユニタリ表現の微分表現と関係が付くことが予想出来る。

この論説では、方程式(2)との関係で、この様な表現を構

成することを目的とする。

$n=3$ の場合，(2) は良く知られた，Coulomb potential を持つ静電場に於ける電子の運動方程式で，考えている表現は，隠された対称性を記述している。（[1]）

この時，X_{ij} は角運動量，Y_k は Runge-Lenz-Pauli のベクトル，E がエネルギーとなる。さらに，この古典力学的対応物は Kepler 運動で，E の符号は，その orbit が，双曲線，放物線，楕円 にそれぞれ対応している。

§2. 方程式 (2) の変換と表現の構成.

$x=(x_1 \cdots x_n)$，$y=(y_1 \cdots y_n) \in \mathbb{R}^n$ の内積 (x, y) を $(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$，又，Euclidean measure を $dx=dx_1 \cdots dx_n$ と書く。そこで Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}u(y)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sqrt{-1}(x, y)}\, u(x)\, dx$$

で定義する。(2) を運動量表示で考える為，

$$\varphi(\mathbb{P})=\mathcal{F}u(\hbar^{-1}\mathbb{P})$$

とおくと，$C_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ として，(2) は

(3) $$\left(\frac{|\mathbb{P}|^2}{2m}-E\right)\varphi(\mathbb{P})+\frac{a}{2\pi\hbar C_{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(\mathbb{P}')}{|\mathbb{P}-\mathbb{P}'|^{n-1}}\,d\mathbb{P}'$$

となる。表現を構成する為に，E の符号に応じて，次の

3通りの場合に分ける。

(I) $E>0$ の場合

$p_0=\sqrt{2mE}$ $\quad p={}^t(p_0\ \mathbb{P})$, $\langle p,p\rangle=p_0^2-|\mathbb{P}|^2$ とする。この時，(3) は

$$(4)\quad \langle p\ p\rangle\varphi(\mathbb{P})=\frac{ma}{\pi\hbar C_{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(\mathbb{P}')}{|\mathbb{P}-\mathbb{P}'|^{n-1}}d\mathbb{P}'$$

と書ける。

$G=SO_0(1,n)$, $K=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&k\end{pmatrix}_n^1 \;\middle|\; k\in SO(n)\right\}$，又

$\mathbb{B}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|<1\}$. 又 G の $\mathbb{B}$ 上の作用を

$$gx=\frac{g_{11}x+g_{10}}{g_{01}x+g_{00}}\qquad g=\begin{pmatrix}g_{00}&g_{01}\\g_{10}&g_{11}\end{pmatrix}_n^1\in G\quad x\in\mathbb{B}$$

によって定義する。すると $G/K\cong\mathbb{B}$。この時，$\mathbb{B}$ の G-invariant measure $d\mu$ は適当な normalization で

$$d\mu(x)=\frac{2^{n-1}}{C_n}\sqrt{\frac{n-1}{\pi}}\frac{dx}{(1-|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

となる。次に $\Phi:\{\mathbb{P}\in\mathbb{R}^n \mid |\mathbb{P}|\neq p_0\}\to\mathbb{B}$ 2対1の differentiable mapping を $\Phi(\mathbb{P})=2p_0\mathbb{P}/(p_0^2+|\mathbb{P}|^2)$ によって与える。(4) を Φ によって $\mathbb{B}$ 上の方程式に変換する為にさらに，次の記号を導入する。

$$\xi(\mathbb{P})=\xi(\varepsilon,x)=\frac{1}{\langle p\ p\rangle}{}^t(p_0^2+|\mathbb{P}|^2\quad 2p_0{}^t\mathbb{P}).$$

ここで $x=2p_0\mathbb{P}/(p_0^2+|\mathbb{P}|^2)$, $\varepsilon=\langle p\ p\rangle/|\langle p,p\rangle|$.

又、$\xi = {}^t(\xi_0, {}^t\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して、

$\varepsilon(\xi) = \xi_0/|\xi_0|$ $(\xi_0 \neq 0)$, $\langle \xi, \xi \rangle = \xi_0^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2$.

とする。そこで、

$$\Phi(\xi(P)) = \frac{\langle p, p\rangle}{|\langle p, p\rangle|} |\langle p, p\rangle|^{\frac{n+1}{2}} \varphi(P) \qquad P \in \mathbb{R}^n,\ |P| \neq p_0$$

$j = \pm 1$ に対して、

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{2}\left(\Phi(\xi(1, x)) + j\,\Phi(-\xi(1, x))\right) \qquad x \in \mathbb{B}.$$

とおき、

$$k(\xi; \xi') = \varepsilon(\xi')\, |\langle \xi - \xi', \xi - \xi' \rangle|^{-\frac{n-1}{2}}. \qquad (\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n+1})$$

$j = \pm 1$, に対して

$$k_j(x; y) = k(\xi(1, x), \xi(1, y)) - j\, k(\xi(1, x), -\xi(1, y))$$

とする。$(x, y \in \mathbb{B})$.

この時、計算の結果、(4) は Φ によって次の方程式

$$(5) \quad \Phi_j(x) = \lambda_n \int_{\mathbb{B}} k_j(x; y)\, \Phi_{-j}(y)\, d\mu(y)$$

$$j = \pm 1, \quad \lambda_n = ma\,\Gamma\left(\tfrac{n-1}{2}\right) / \left(2^n p_0 \hbar \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right)\right)$$

と変換されることが分る。

$\mathbb{B}$ 上の function f (resp. distribution T) は right K-invariant な G' 上の function $\tilde{f}$ (resp. distribution $\tilde{T}$) と1対1に対応が付く。([4]) そこで G' 上の K-bi invariant な function $\tilde{f}_j$ を次の式で定義する。

$$\mathcal{F}_j(g) = (2(g_{00}-1))^{-\frac{n-1}{2}} - j\,(2(g_{00}+1))^{-\frac{n-1}{2}} \qquad j = \pm 1$$

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix}^{1}_{n} \in G.$$

すると (5) は G 上の合成積方程式

(6) $\hat{\Phi}_j = \lambda_n \hat{\Phi}_{-j} * \tilde{\mathcal{F}}_j$

となる。又は、これを $G/K = \mathbb{B}$ 上の合成積方程式とも考えることが出来る。([4])。

すると、すべての積分が distribution として意味をもつとの仮定のもとで、$\mathbb{B} = G/K$ での Fourier 変換の理論([3]. ~ [4])を用いると

$\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_{-1} * \mathcal{F}_1 = T$ ($\mathbb{B}$ 上の関数に収束する。)

であり、ω を適当に normalize した G の Lie 代数の Casimir operator. $a_n = 2^{n-1}\sqrt{\pi^{n-1}}\,\Gamma(\frac{n}{2})/\Gamma(\frac{n-1}{2})$, 又. δ を $\mathbb{B}$ の原点に support を持つ Dirac measure とする。この時、$\rho = (n-1)/2$ として.

$$(7) \quad \begin{cases} (\omega + \rho^2)T = -a_n^2\,\delta \\ \Phi_j = \lambda_n^2\, \Phi_j * T \qquad j = \pm 1. \end{cases}$$

従って

(8) $\omega \Phi_j = (\lambda^2 - \rho^2)\Phi_j \qquad j = \pm 1 \qquad \lambda = \pm\sqrt{-1}\,\frac{ma}{2p_0\hbar}.$

となる。ω が $\mathbb{B}$ 上の elliptic differential operator となるから、Φ_1 が distribution として意味を持つなら (8) より real analytic function となる。そこで $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{B}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{B}) \mid \omega f = (\lambda^2 - \rho^2) f \}$.

又、τ_λ で $\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{B})$ 上の G の left regular representation を表わす。すると、Poisson 変換の理論（[3], [4]）により、$\lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \setminus \{0\}$ なら τ_λ は G のある既約ユニタリ表現（class 1 の principal series）と同値となる。

形式的な計算を忠実に実行することにより、$Hu = Eu$ の解空間に実現した G の Lie 代数の表現は、以上の変換によって $(\tau_\lambda, \mathcal{E}_\lambda(\mathbb{B}))$ の微分表現と同値になることも確めることが出来る。

(II) $E = 0$ の場合

このとき、方程式は

$$|\mathbb{P}|^2 \varphi(\mathbb{P}) = -\frac{ma}{\pi \hbar C_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\mathbb{P}')}{|\mathbb{P} - \mathbb{P}'|^{n-1}} d\mathbb{P}' \quad \text{となる。}$$

そこで、次の変換

$$\Phi(\mathbb{P}) = |\mathbb{P}|^{-n-1} \varphi(\mathbb{P}/|\mathbb{P}|^2)$$

を行うと、この方程式は次の様になる。

(9) $\Phi = \lambda_n \Phi * T_1 = \lambda_n T_1 * \Phi$. $\lambda_n = -\dfrac{ma}{\sqrt{\pi}\,\hbar\, C_{n-1}}$.

ここで T_1 は次の様に定義される $\mathbb{R}^n$ の tempered distributions T_α の $\alpha=1$ の場合.

$\alpha \in \mathbb{C}$ とする。

$\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ の時.

$$\langle T_\alpha\ f \rangle = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n} f(x)\, dx.$$

これを f の $x=0$ での Taylor 展開を用いて α に関して解析接続する。すると $\alpha \to \langle T_\alpha\ f \rangle$ はすべての f に対して holomorphic となるから任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対してこの値を $\langle T_\alpha\ f \rangle$ とする distribution を T_α と書く。T_α に関して次のことが知られている。([21])

(i) δ を $x=0$ に support をもつ Dirac measure.

$$T_{-2k} = \frac{(-1)^k C_n}{2^{2k-1}} \Delta^k \delta.$$

(ii) $0 < \mathrm{Re}(\alpha),\ \mathrm{Re}(\beta),\ \mathrm{Re}(\alpha+\beta) < n$ のとき.

$$T_\alpha * T_\beta = \left(\pi^{n/2}\,\Gamma\!\left(\tfrac{n-\alpha-\beta}{2}\right) \Big/ \Gamma\!\left(\tfrac{n-\alpha}{2}\right)\Gamma\!\left(\tfrac{n-\beta}{2}\right)\right) T_{\alpha+\beta}.$$

(iii) $\Delta T_\alpha = 2(\alpha - n)\, T_{\alpha-2}$.

従って (9) より. $T = T_1 * T_1 = \left(\pi^{n/2} \Big/ \Gamma\!\left(\tfrac{n-1}{2}\right)^2\right) \Gamma\!\left(\tfrac{n-2}{2}\right) T_2$

とすると

$\Phi = \lambda_n^2\, \Phi * T$. $\Delta T = -16\pi C_{n-1}^{2}\,\delta$.
故に, $\Delta\Phi = -\lambda^2\Phi$ $\left(\lambda = \pm\dfrac{4ma}{\sqrt{\pi}\hbar}\right)$ となる。
$G = M(n) = SO(n)\times_s \mathbb{R}^n$ $K = SO(n)$ とすると,
$\mathbb{R}^n \approx G/K$. この時も G の既約ユニタリ表現が構成出来て, この微分表現は $Hu=0$ の解空間と実現した Lie 代数の表現と"形式的"に同値となる。(infinitesimally equivalent)

(III) $E<0$ の場合.

$p_0 = \sqrt{2m|E|}$ $p = {}^t(p_0\ {}^t\mathbb{P})$ $|p|^2 = p_0^2 + |\mathbb{P}|^2$ とする。又 $G = SO(n+1)$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \,\middle|\, k\in SO(n) \right\}$.
G の $S^n = \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|=1\}$ 上の作用は. $\mathbb{R}^n$ での canonical な作用 $x \to gx$ の S^n への制限とする。すると $S^n \approx G/K$ となる。
又. imbedding Ψ $\mathbb{R}^n \to S^n$ を.

$$\Psi(\mathbb{P}) = \frac{1}{|p|^2}\begin{pmatrix} p_0^2 - |\mathbb{P}|^2 \\ 2p_0\mathbb{P} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}\in\mathbb{R}^n.$$

で定義すれば. S^n 上の normalized G-invariant measure $d\mu$ は $x = \Psi(\mathbb{P})$ とすると.

$$d\mu(\omega) = \frac{(2p_0)^n}{d_{n+1}}\,\frac{d\mathbb{P}}{|p|^{2n}}$$

となる。又. $\Phi(x) = |p|^{n+1}\varphi(\mathbb{P})$　$\lambda_n = ma/(p_0 t)(n-1)$.
とすれば, (2) は次の様に変換される。

$$\text{(10)}\quad \Phi(x) = -\lambda_n \int_{S^n} \frac{\Phi(x')}{|x-x'|^{n-1}}\, d\mu(x')$$

(I) と同様に. S^n 上の function (or distribution) を G 上の right K-invariant な function (or distribution) と同一視しておく。

$g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \in G$ と対し.

$$\hat{F}(g) = \left(\mathfrak{k}(1-g_{00})\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

とすると, $\hat{F}$ は G 上 K-bi invariant な局所可積分. (従って可積分) 関数となる。
すると (10) は G 上の合成積方程式

$$\text{(11)}\quad \tilde{\Phi} = -\lambda_n \tilde{\Phi} * \tilde{F}$$

となる。さらに. $\tilde{T} = \tilde{F} * \tilde{F}$ とすれば (11) より

$$\text{(12)}\quad \tilde{\Phi} = \lambda_n^2 \tilde{\Phi} * \tilde{T}$$

となる。T を $\tilde{T}$ に対応する S^n 上の distribution
δ を S^n の原点に support を持つ Dirac measure
又. ω を適当に normalize した Casimir

operator, $\lambda = \rho\lambda_n = \pm(ma)/2\rho$ 方 $\rho = (n-1)/2$

とすると. ω は S^n 上の Laplace-Beltrami operator で

$$(13)\begin{cases} (\omega + \rho^2)T = \rho^2\delta \\ \omega\Phi = (\lambda^2 - \rho^2)\Phi \end{cases}$$ となる。

(13) の前半な複雑ではあるが計算によって, 後半は (12) より分る。ω は elliptic 故. (I) と同様にして (12) の解は real analytic となる。そこで $\lambda \in \mathbb{C}$ とおし

$$\mathcal{E}_\lambda(S^n) = \{ f \in C^\infty(S^n) \mid \omega f = (\lambda^2 - \rho^2) f \}$$

とすると (11) の解は $\mathcal{E}_\lambda(S^n)$ の元となる。

この場合も τ_λ で $\mathcal{E}_\lambda(S^n)$ 上の G の left regular representation を表わす。ところが. この場合は (I) と異なり. すべての λ に対して自明でない解が存在するとは限らない。この様な λ を求める為に G 上の Fourier 変換を利用する ([5])

その為, 若干の準備をする

$$\hat{G} = \left\{ \Lambda = (\Lambda_1 \cdots \Lambda_p) \in \mathbb{Z}^p \;\middle|\; \begin{matrix} \Lambda_1 \geq \cdots \geq |\Lambda_p| & p = [\frac{n+1}{2}] & n \in 2\mathbb{N} \\ \text{のとき} & \Lambda_p \geq 0 & \end{matrix} \right\}$$

とすると. $\hat{G}$ は dominant integral forms | ある

Cartan subalgebra に関する。) の集合と同一視出来る。又これは highest weight を考えることで G' の既約なユニタリ表現の同値類とも同一視出来る。そこで，$\Lambda \in \hat{G}$ に対し，$(\tau_\Lambda, V_\Lambda)$ を Λ と対応する G' の既約ユニタリ表現 $(\ |\ )_\Lambda$ を V_Λ の内積とする。$\hat{G}(0)=\{\Lambda(\ell)=(\ell, 0 \cdots 0) \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ とする。又 $\Lambda=\Lambda(\ell)$ の時 $\tau_\Lambda=\tau_\ell$, $V_\Lambda=V_\ell$ $(\ |\ )_\Lambda=(\ |\ )_\ell$ 等と書く。$V_\Lambda^K=\{v \in V_\Lambda \mid \tau_\Lambda(k)v=v \ \forall k \in K\}$ とすると $\dim_{\mathbb{C}} V_\Lambda^K \leq 1$ で $\dim_{\mathbb{C}} V_\Lambda^K=1$ となる為には $\Lambda \in \hat{G}(0)$ となることが必要十分。又 $\Lambda=\Lambda(\ell)$ のとき $v_\ell \in V_\ell^K$ norm が 1 の vector とし $\varphi_\ell(g)=(\tau_\ell(g)v_\ell \mid v_\ell)_\ell$ とする。

T を G 上の distribution，$\Lambda \in \hat{G}$ に対し

$\hat{T}(\Lambda)=\int_G \tau_\Lambda(g)\,dT(g)$ は well-defined で V_Λ の linear endomorphism を与える。この時，$\{\hat{T}(\Lambda)\}_{\Lambda \in \hat{G}}$ を T の Fourier 変換 (又は係数) と呼ぶ。次の結果はよく知られている。

(i) $\varphi \in C^\infty(G)$ に対して

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{\Lambda \in \hat{G}} (\dim V_\Lambda) \int_G \mathrm{tr}(\tau_\Lambda(g^{-1})\hat{T}(\Lambda))\varphi(g)\,dg$$

ここで dg は G の normalized Haar measure

又，L，R で各々 left, right regular representation

と表わす。

(ii) $(L(g)T)^\wedge(\Lambda) = \tau_\Lambda(g)\hat{T}(\Lambda)$ $\quad (R(g)T)^\wedge(\Lambda) = \hat{T}(\Lambda)\tau_\Lambda(g^{-1})$

(iii) $(T_1 * T_2)^\wedge(\Lambda) = \hat{T}_1(\Lambda)\hat{T}_2(\Lambda)$.

次に $P(\Lambda)$ $V_\Lambda \to V_\Lambda^K$ orthogonal projection とする。すると $P(\Lambda) \neq 0 \iff \Lambda = \Lambda(l) \in \hat{G}(0)$ $P(l) = P(\Lambda(l))$ と書く。($P(\Lambda) = \int_K \tau_\Lambda(k)dk$ dk Kの normalized Haar measure と書ける。) T が left or right K-invariant なら (ii) より $\hat{T}(\Lambda) = 0$ if $\Lambda \notin \hat{G}(0)$. この時と $\hat{T}(\Lambda(l)) = \hat{T}(l)$ と書く。又、さらに F が K-bi invariant なら $\hat{F}(l) = a(F, l)\, P(l)$, ここで, $a(F, l) = \langle F, \varphi_l \rangle$, となる。

以上より方程式 (11) は次の様に表わせる。

$$(14) \quad \hat{\Phi}(l) = -\lambda_n\, a(\tilde{F}, l)\, \hat{\Phi}(l) \qquad l \in N.$$

φ_l は hypergeometric function で表わせ、文[5.7]) $\tilde{F}$ が具体的に与えられているから $a(\tilde{F}, l)$ の値は簡単に計算出来、次の様になる。

$$a(\tilde{F}, l) = (n-1)/(2l+n-1).$$

故に (14) より

$$\left(1 + \frac{ma}{\rho_0 \pi}\frac{1}{2l+n-1}\right)\hat{\Phi}(l) = 0 \qquad l \in N$$

従って $\rho=(n-1)/2$ と書くと.

$\Phi^{\wedge}(l)\neq 0 \Leftrightarrow a<0$ & $\frac{m|a|}{2\rho_0\hbar}-\rho = l\in \mathbb{N}$

故に. (11) が自明でない解を持つ為には

1°) $a<0$

2°) $\exists l\in \mathbb{N}$ $l=\frac{m|a|}{2\rho_0\hbar}-\rho$. i.e $|E| = \frac{m a^2}{(2\hbar)^2}\frac{1}{(l+\rho)^2}$

さらに 1°), 2°) が満されている時. $\lambda=\pm(l+\rho)$

$\hat{\mathcal{E}}_{l+\rho}(S^n)\cong\{ \mathrm{tr}(A\,\tau_l(g)E(l)) \mid A\ V_l\to V_l$ linear endomorphisms $\}$

$\dim \mathcal{E}_{l+\rho}(S^n)\neq +\infty$. $\tilde{\tau}_{l+\rho}\simeq\tau_l$. となる。

が必要十分。

1°) は H の potential が引力であることを表わしており, 又 2°) は エネルギーが量子化されていることを示している。又この場合も. Lie 代数の表現は τ_l の微分表現に同値となる.

さらに, $E<0$ の場合は tempered distributions の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で考えれば以上の議論はすべて正当化出来る。($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ と S^n 上の distribution は Φ で対応が付き $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は Fourier 変換で安定, 又考えている関数もすべて高々多項式 order の増大度しか持たない。)

故に次の定理が成立する。

記号は前の通りとする。

<u>定理</u> m $\hbar$, $a \in \mathbb{R}$ $m>0$ $\hbar>0$ $a \neq 0$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{a}{|x|} \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 \qquad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で次の方程式を考える。

$$Hu = Eu \qquad E \in \mathbb{R}$$

この解の内 $\mathbb{R}^n$ の tempered distribution に拡張出来るもの全体を $\mathfrak{S}(H;E)$ と書く。

$E<0$ である時 $\mathfrak{S}(H,E) \neq \{0\}$ である為の必要十分条件は

1°) $a<0$

2°) $\exists\, l \in \mathbb{N}$ $|E| = \frac{ma^2}{2\hbar^2}\frac{1}{(l+\rho)^2}$ $\rho = \frac{n-1}{2}$

である。さらにこのとき $\mathfrak{S}(H,E)$ は有限次元であり $G = SO(n+1)$ の heighest weight $\Lambda(l) = (l\ 0 \cdots 0)$ を持つ既約有限次元表現 τ_l の表現空間となる。又 §1 で与えた微分作用素はこの表現の微分表現として実現されたものに一致する。

References.

[1] V. Fock ; Zur Theorie des Wasserstoffatoms. Zeitschrift für Physik Bd 98 145–154

[2] I. M Gelfand, G. F. Shilov ; Generalized functions vol 1. Academic Press.

[3] M. Kashiwara, A Kowata, K Minemura, K Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka ; Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space. Ann. of Math. 107 p.1–39.

[4] S. Helgason ; A duality for symmetric spaces with applications to group representations I. Advances in Math. 5. 1–154.

[5] N. J. Vilenkin. Special functions and the theory of group representations. Translations of Mathematical monograph vol 22. A.M.S.