数理解析研究所講究録
第481巻 1983年 109-125

Lie群上の総和法

慶大 理工　河添 健
Kawazoe Takeshi

半単純Lie群上のK両側不変関数についてのフランシェレル公式は $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ あるいはシュバルツ空間 $\mathcal{C}(K\backslash G/K)$ 上で成立する事が知られている。しかし，一般に $L^1(K\backslash G/K)$ では成立しない。(逆変換の積分が発散). ここではその逆変換公式が，総和法を用いる事により，$L^1(K\backslash G/K)$ のある部分空間(滑らかさを仮定する)において成立する事を示す。

<u>1. $\mathbb{R}$の場合</u>. まず一次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ 上の総和法について復習する。$f\in L^1(\mathbb{R})$ に対してそのフーリエ変換は $\hat{f}(\nu)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{\sqrt{-1}\nu x}dx$ $(\nu\in\mathbb{R})$ で定義され，さらにもし，f が $C_c^\infty(\mathbb{R})$ あるいはシュバルツ空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属するならば，逆変換公式：$f(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\nu)e^{-\sqrt{-1}\nu x}d\nu$ $(x\in\mathbb{R})$ が成立する。しかし，一般の $f\in L^1(\mathbb{R})$ に対してはリーマン・ルベーグの定理(cf. [Ti, 定理1]) により $\hat{f}$ は連続，有界な関数にはなるが，逆変換公式の積分を収束させるまでには至らない。そこで，収

束の意味を弱めて考えたらどうか？　という事が問題となる。これが総和法である。今，$K(x,y,\delta)$ を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上の，次の条件を満たす関数とする。ある正数 α が存在し，

(i) $K(x,y,\delta) = O(1/\delta) \quad (|x-y| \leq \delta)$

(ii) $K(x,y,\delta) = O(\delta^{\alpha}/|x-y|^{\alpha+1}) \quad (|x-y| > \delta)$

(iii) $\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_x^{\infty} K(x,y,\delta)\,dy = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{x} K(x,y,\delta)\,dy = \frac{1}{2}.$

この時，次の定理が知られている。

定理 1.1 ([Ti, 定理13]).　もし，$f(x)/(1+|x|^{\alpha+1})$ が $L^1(\mathbb{R})$ に属し，かつ，$x\in\mathbb{R}$ で，$\int_0^h |f(x+t)-\phi(x)|\,dt = o(h)$，$\int_0^h |f(x-t)-\psi(x)|\,dt = o(h)$ $(h\to +0)$ なる関数 ϕ, ψ が存在するならば，

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,\delta)f(y)\,dy = \frac{1}{2}\{\phi(x)+\psi(x)\}.$$

勿論，f が x で連続，あるいは第一種不連続，すなわち，$f(x\pm 0)$ が意味を持つならば，$\phi(x)=f(x+0)$，$\psi(x)=f(x-0)$ である。

さて，ここで $K(\nu)$ を

(i) $K_C(\nu) = \begin{cases} (1-|\nu|)^{\alpha} & (|\nu|<1) \\ 0 & (|\nu|\geq 1), \end{cases}$ (Cesàro)

(ii) $K_A(\nu) = e^{-|\nu|}$, (Abel)

(iii) $K_G(\nu) = e^{-\nu^2}$ (Gauss)

のいずれかとし，$K(x,y,\delta) = [e^{\sqrt{-1}\nu x}K(\delta\nu)]^{\wedge}(y)$ (ν の関数としてフーリエ変換) として上の定理を用いれば，次の定理が得られる。

定理1.2. ([Ti, 1.16,17,18]). もし, f が $L^1(\mathbb{R})$ に属し, $x \in \mathbb{R}$ で連続, あるいは第一種不連続であるならば.

$$f(x) = \lim_{\delta \to 0} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{-\sqrt{-1}\nu x} K(\delta\nu) d\nu .$$

以下. この定理の類型を半単純Lie群上のプランシェレル公式に対して求める事を目的とする。

2. 記号と準備. Gを中心有限な連結半単純Lie群とし, $G=KAN$をその岩沢分解とする。以下, $\dim A = 1$を仮定する。Gの部分群のLie環はすべてドイツ小文字を用いて表わし, 特にその複素化, 双対空間は c, $*$ を添えて表わす事とする。$\mathfrak{F} = \mathfrak{a}^*$ と略す。Δ^+により $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$ の正ルートの全体, αをその単純ルート, H_0を $\alpha(H_0)=1$ を満たす$\mathfrak{a}$の元とする。m_1, m_2 を α, 2α の重複度とする。(cf. [He. P.532]). 以下, $a_t = \exp tH_0$ $(t \in \mathbb{R})$ により Aの元を表わし, A上の関数 F を $F(t) = F(a_t)$と略す。$A^+ = \{a_t ; t \geq 0\}$とすれば, カルタン分解: $G=KA^+K$ により, $x \in G$ に対して, $x \in K a_{t(x)} K$ なる $t(x) \in \mathbb{R}$ が唯一決まる。この事より, G上のK両側不変関数 f も $f(t(x)) = f(x)$と略す。$B(,)$ により $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$上のキリング形式を表わし, $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$上の内積を $\langle\lambda, \mu\rangle = B(H_\lambda, H_\mu)$ $(\lambda, \mu \in \mathfrak{F})$ で定義する。ここで, H_ν $(\nu \in \mathfrak{F})$ は $B(H, H_\nu) = \nu(H)$ $(H \in \mathfrak{a}_c)$ を満たす$\mathfrak{a}$の元である。$d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{F}$, dA を それぞれ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{F}$, A のユークリッド測度とし, dk,

dn を K, N のハール測度とする。ただし, $\int_K dk = 1$, $\int_N e^{-2\rho(H(\theta(n^{-1})))}dn = 1$ と正規化する。($\rho = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)\alpha$, θ は K によって決まる G のカルタン対合, $H : G \to \mathfrak{a}$ は岩沢分解による $G \to A$ なる射影と, $\log : A \to \mathfrak{a}$ の合成)

次に以下の議論で必要な良く知られた事実を列挙する。([He¹, chap. X], [War, chap. 9.2]). $\nu \in \mathfrak{F}$ に対して $\phi_\nu(x) = \int_K e^{(\sqrt{-1}\nu - \rho)H(xk)}dk$ $(x \in G)$ と置けば, これは G 上の帯球関数となり, G のカシミール作用素 ω の固有値 $-\langle \nu, \nu \rangle - \langle \rho, \rho \rangle$ をもつ固有関数である。今, $L^1(K \backslash G/K)$ により G 上の複素数値, 両側 K 不変, 可測関数で, $\int_G |f(x)|\, dx < \infty$ なるもの全体とする。この時 $f \in L^1(K \backslash G/K)$ に対して, その フーリエ変換及びラドン (アーベル) 変換は

$$\hat{f}(\nu) = \int_G f(x)\, \phi_\nu(x^{-1})\, dx \qquad (\nu \in \mathfrak{F}), \tag{2.1}$$

$$Ff(a) = e^{\rho(\log a)} \int_N f(an)\, dn \qquad (a \in A) \tag{2.2}$$

で定義され,

$$\hat{f}(\nu) = \int_A Ff(a)\, e^{\sqrt{-1}\nu(\log a)}\, da \tag{2.3}$$

なる関係式を満す。($da = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} dA$). さらに f が $C_c^\infty(K \backslash G/K)$ あるいはシュバルツ空間 $\mathcal{C}(K \backslash G/K)$ の元であれば, 逆変換公式 :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{F}} \hat{f}(\nu)\, \phi_\nu(x)\, |c(\nu)|^{-2}\, d\nu \qquad (x \in G) \tag{2.4}$$

が成立する。ただし, $d\nu = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{F}$, $|c(\nu)|^{-2} d\nu$ はプランシェレル測度 (cf. [War. chap. 9.2.]) である。

以下, $|c(\nu)|^{-2}$ の多項式部分を $P(\nu)$, その残りを $R(\nu)$ と書く

事にする。すなわち $|c(\nu)|^{-2} = P(\nu)R(\nu)$ であり，$R(\nu)$ は 1, $\mathrm{th}\,\pi\nu$, $\mathrm{th}\,\pi\nu/2$, $\mathrm{cth}\,\pi\nu/2$ のいずれかの形をしている。特に $R(\nu) = O(1)$ $(\nu \to \infty)$ に注意する。さらに c の具体的な形により，$\deg(P) = m_1 + m_2 = d-1$ ($d = \dim G/K$) である事がわかる。以下，多項式 Q に対して，$D(Q)$ をそのシンボルが Q となる $\mathbb{R}$ 上の微分作用素とし，$\Omega = \omega^n$ ($n = [\frac{d}{2}]$, $[,]$ は Gauss 記号) と置く。さらに $R_k(\nu) = |c(\nu)|^{-2}(-\langle\nu,\nu\rangle - \langle\rho,\rho\rangle)^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$ とし，もし存在するならば，$R_k(\infty) = \lim_{\nu\to\infty} R_k(\nu)$ と置く。

3. G 上の総和法. $d = \dim G/K$ とし，$L^1_{d-1}(\mathbb{R})$ により，$\mathbb{R}$ 上の $d-1$ 回連続微分可能な偶関数で，その $d-1$ 階までの各導関数が $L^1(\mathbb{R})$ に属するもの全体とする。明らかに各導関数は無限遠点で零となり，また各奇数階の導関数は原点で零となる。以下，$\mathbb{R}$ 上の関数 g に対して，$\underline{g}(t) = \begin{cases} g(t) & t \geq 0 \\ g(-t) & t < 0 \end{cases}$ と置く。

命題 3.1. $m_1 \equiv_{(4)} 0$ あるいは $m_2 \equiv_{(2)} 0$ とする。もし，F が $L^1_{d-1}(\mathbb{R})$ に属するならば，$x \in G$ に対して，

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2}\int_F \hat{F}(\nu)\,\phi_\nu(x)\,|c(\nu)|^{-2} K(r\nu)\,d\nu$$
$$= \frac{1}{2}\int_K \left(\underline{D(P)F}(t(xk)) + \underline{D(P)F} * (\underline{R}-1)^{\wedge}(t(xk)) \right) e^{-\rho(H(xk))}\,dk \qquad (3.1)$$
$$< \infty.$$

(証明) F が $L^1_{d-1}(\mathbb{R})$ に属する事に注意すれば，$\hat{F}(\nu)|c(\nu)|^{-2} =$

$(\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\ \underline{R}(\nu)\ (\nu\in\mathfrak{F})$ となる事がわかる。よって

$$\int_{\mathfrak{F}} \hat{F}(\nu)\,\phi_\nu(x)\,|c(\nu)|^{-2} K(r\nu)\,d\nu$$
$$= \int_{\mathfrak{F}} (\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\,\phi_\nu(x)\ \underline{R}(\nu)\,K(r\nu)\,d\nu$$
$$= \int_{\mathfrak{F}} (\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\,\phi_\nu(x)\,K(r\nu)\,d\nu$$
$$+ \int_{\mathfrak{F}} (\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\,\phi_\nu(x)\,(\underline{R}(\nu)-1)\,K(r\nu)\,d\nu$$
$$= \int_K \Big[\int_{\mathfrak{F}} (\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\,e^{\sqrt{-1}\nu(H(xk))} K(r\nu)\,d\nu$$
$$+ \int_{\mathfrak{F}} (\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\,(\underline{R}(\nu)-1)\,e^{\sqrt{-1}\nu(H(xk))} K(r\nu)\,d\nu\Big]\,e^{-\rho(H(xk))}\,dk$$
$$= \int_K \left[\, I_r^1 + I_r^2 \,\right] e^{-\rho(H(xk))}\,dk$$

となる。ところで、$D(\rho)F$ は仮定より $L^1(\mathbb{R})$ に属し、連続である。よって、定理1.2. より $\lim_{r\to 0} I_r^1 = \underline{D(\rho)F}(t(xk)) < \infty$ となる。

一方、$m_1 \equiv_{(4)} 0$ or $m_2 \equiv_{(4)} 0$ の時、$R(\nu)$ は $\mathrm{th}\,\pi\nu$, $\mathrm{th}\,\pi\nu/2$ の形をしている事に注意すれば、$\underline{R}-1$ は $L^2(\mathbb{R})$ に属する事がわかる。特に $(\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\,(\underline{R}(\nu)-1)$ も $L^2(\mathbb{R})$ に属する。($(\underline{D(\rho)F})^{\wedge}$ は有界)。よって パーセバルの公式：[Ti, 定理49] と積のフーリエ変換に関する定理：[Ti, 定理 65] を用いれば、

$$\int_{\mathfrak{F}} (\underline{D(\rho)F})^{\wedge}(\nu)\,(\underline{R}(\nu)-1)\,e^{\sqrt{-1}\nu(H(xk))} K(r\nu)\,d\nu$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\underline{D(\rho)F} * (\underline{R}-1)^{\wedge})(t)\,\left[e^{\sqrt{-1}\nu(H(xk))} K(r\nu)\right]^{\wedge}(t)\,dt\,.$$

となる。$D(\rho)F$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であり、$\underline{D(\rho)F} * (\underline{R}-1)^{\wedge}$ が $L^1(\mathbb{R})$ に属する事に注意すれば、定理1.1を用いて、$\lim_{r\to 0} I_r^2 = \underline{D(\rho)F} * (\underline{R}-1)^{\wedge}(t(xk)) < \infty$ である事がわかる。

（証明終り）

$m_1 \equiv_{(4)} 2$, $m_2 \equiv_{(2)} 1$ の場合，$R(\nu) = \mathrm{cth}\,\pi\nu/2$ となり，$\underline{R}-1$ は $L^2(\mathbb{R})$ に属さない。この場合，P, R をそれぞれ，$P'(\nu) = P(\nu)(1+\nu)/\nu$，$R'(\nu) = R(\nu)\nu/1+\nu$ に置きかえてやる事により（P' は多項式に注意），先の議論を適用する事ができる。よって，

<u>命題 3.2.</u> $m_1 \equiv_{(4)} 2$, $m_2 \equiv_{(2)} 1$ とする。もし Ff が $L^1_{d-1}(\mathbb{R})$ に属するならば，(3.1) の P, R を P', R' に置きかえた式が成立する。

<u>注意 1.</u> $K = K_G$ の時，$\mathbb{R}$ 上の総和法は多変数の場合に拡張される。(see [BC, chap. 2-3])．この事から [BC, p62–63] の議論と [Ti, 定理16] も用いれば，$K = K_G$ の時，上の命題 3.1, 3.2 は任意のランクの群に対しても成立する事がわかる。

次に $L^1_r(K\backslash G/K)$ $(r \in 2\mathbb{N})$ を G 上の r 回連続微分可能な K 両側不変関数で，$\omega^l f$ $(0 \leq l \leq r/2)$ がすべて $L^1(K\backslash G/K)$ に属するもの全体とする。明らかに $L^1_p(K\backslash G/K) \subset L^1_q(K\backslash G/K)$ $(p \geq q)$，$L^1_0(K\backslash G/K) \subset L^1(K\backslash G/K)$ である。$f \in L^1(K\backslash G/K)$ に対して，$L_x^0 f(g) = \int_K f(gkx)\,dk$ $(g, x \in G)$ と置く。

<u>補題 3.3.</u> $f \in L^1_0(K\backslash G/K)$，すなわち，$L^1(K\backslash G/K)$ の連続関数ならば，Ff は A 上の連続関数である。

(証明) $n\in N$ を $n=\exp(Y+Z)$ $Y\in\mathfrak{g}_\alpha$, $Z\in\mathfrak{g}_{2\alpha}$ ($\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}$ は $\alpha, 2\alpha$ のルート空間) と書けば,

$$F_f(t)=\iint_{\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}} f[((\mathrm{ch}\,t+|Y|^2/2)+|Z|^2)^{1/2}]\,dY\,dZ$$

と書く事ができる。ただし, $\mathbb{R}$ 上の関数 g に対して, $g(t)=g[\mathrm{ch}\,t]$ である。(この公式は講演後, 橋爪氏より教えていただいた。) よって適当な変数変換をほどこせば, 定数倍を除いて,

$$\int_t^\infty f(u)(\mathrm{ch}\,u)^{2m_2-2}\Big(\mathrm{sh}(2u)\int_t^u(\mathrm{ch}\,2u-\mathrm{ch}\,2v)^{-\frac{m_2}{2}}$$
$$\times(\mathrm{ch}\,v-\mathrm{ch}\,t)^{m_1-2/2}\,\mathrm{sh}\,v\,dv\Big)du$$

と書ける事がわかる。ここで [Ko, (2.18), (2.20)] の $A_{\alpha,\beta}$ なる関数を用いれば, $\alpha=m_1-m_2+\frac{1}{2}$, $\beta=-m_2+1/2$ とする事により

$$F_f(t)=C_{m_1,m_2}\int_t^\infty f(u)(\mathrm{ch}\,u)^{2m_2-2}A_{\alpha,\beta}(t,u)\,du$$

となる。よって, f が $L^1(G)$ の元である条件: $\int_{\mathbb{R}^+}|f(u)|\,\mathrm{sh}\,u^{\frac{m_1+m_2}{2}}\,\mathrm{ch}\,u^{m_2}du<\infty$, f の連続性の仮定及び $A_{\alpha,\beta}$ の不等式 (cf. [Ko, p.155]) を用いれば, 容易にもとめる結果を得る。 (証明終り)

定理 3.4 もし, f が $L^1_{2n}(K\backslash G/K)$ ($n=[\frac{d}{2}]$, $d=\dim G/K$) に属するならば

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\nu)\,\phi_\nu(x)\,|c(\nu)|^{-2}K(r\nu)\,d\nu$$
$$=\frac{1}{2}R_n(\infty)F_{\Omega L_x^*f}(0)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}F_{\Omega L_x^*f}(t)\,(R_n-R_n(\infty))^\wedge(t)\,dt \tag{3.2}$$
$$<\infty.$$

(証明) f が $L^1_{2n}(K\backslash G/K)$ に属する事から $\hat{f}(\nu)\,\phi_\nu(x)\,|c(\nu)|^{-2}=(F_{L_x^*f})^\wedge(\nu)\,|c(\nu)|^{-2}$

$= (F_{\Omega L_x^{\circ} f})^{\wedge}(\nu)\, R_n(\nu)$ $(\nu \in \mathcal{F})$ である事がわかる。また補題3.3を用いれば，$F_{\Omega L_x^{\circ} f}$ はA上連続である事も容易にわかる。よって，定理は命題3.1と同様の方法にて証明される。（証明終り）

(3.2)式を簡単のため $f_0(x)$ と書く事にする。以下 $f_0(x)$ の評価式をもとめる。次の§ではこれを用いて $f_0(x) = f(x)$ を示す。$\alpha \equiv_{(2)} 1$ の時，$R_n(\infty) \neq 0$ であり，$R_n - R_n(\infty)$ は $L^1(\mathbb{R})$ に属する事がわかる。特に $(R_n - R_n(\infty))^{\wedge}$ は有界である。しかし，$\alpha \equiv_{(2)} 0$ の時，$R_n(\infty) = 0$ であり，$\hat{R_n}$ は有界とは限らない。

<u>補題 3.5.</u> 各 $0 \leq \alpha < 1$ に対して定数 C_α が存在し，

$$|\hat{R_n}(t)| \leq C_\alpha |t|^{\alpha-1} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

（証明）R_n の具体的な形を用いれば，$\nu^\alpha \frac{d}{d\nu} R_n(\nu)$ が $L^1(\mathbb{R})$ に属する事がわかる。よって，$\hat{R_n}(t) = 2\int_0^\infty R_n(\nu) \cos\nu t \, d\nu = -\frac{2}{t}\int_0^\infty \frac{d}{d\nu} R_n(\nu) \sin\nu t \, dt = -2t^{\alpha-1}\int_0^\infty (\nu^\alpha \frac{d}{d\nu} R_n(\nu))(\sin\nu t/\nu t)^\alpha (\sin\nu t)^{1-\alpha} d\nu$ よりもとめる結果を得る。（証明終り）

<u>命題 3.6.</u> もし，f が $L^1_{2n}(K \backslash G/K)$ に属するならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 C_1, C_2 が存在し，

$$|f_0(x)| \leq C_1 \sup_{|t| \leq \varepsilon} |F_{\Omega L_x^{\circ} f}(t)| + C_2 \| F_{\Omega L_x^{\circ} f} \|_1 \qquad (3.3)$$

$$\leq C_1 \sup_{|t|\leq \varepsilon} |F_{\Omega L_x^{\circ} f}(t)| + C_2 \|\Omega f\|_1$$

(証明)　(3.2)式, 補題3.5 及び(2.2)より明らか.　　　(証明終り).

<u>注意2.</u>　帯球関数 $\phi_\nu(x)$ が, ν の関数として, $\mathbb{R}$ 上の $|t|\leq t(x)$ に台をもつ L^1 関数 $\Phi_x(t)$ のフーリエ変換として書ける事に注意すれば $F_{\Omega L_x^{\circ} f}(0) = F_{\Omega f} * \Phi_x(0)$ となり, (cf. [FKR]).

$$(3.2) = \frac{1}{2} R_n(\infty) F_{\Omega f} * \Phi_x(0) + \frac{1}{2} F_{\Omega f} * \Phi_x * (R_n - R_n(\infty))^{\wedge}(0)$$

と表わされる。

<u>4. 逆変換公式.</u>　ここでは前の(3.3)を用いて, $f \in L^1_{2n}(K\backslash G/K)$ ならば, $f_0(x) = f(x)$ $(x \in G)$ を示す。その前に次の2つの補題に注意する。

<u>補題4.1.</u>　もし, f が $L^1(K\backslash G/K)$ に属し, そのフーリエ変換 $\hat{f}$ も $L^1(\mathfrak{F}, |c(\nu)|^{-2}d\nu)$ に属するならば, (2.4) が成立する。

(証明) 任意の $g \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対して, $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) = \int_{\mathfrak{F}} \hat{f}(\nu) \cdot \overline{\hat{g}(\nu)} |c(\nu)|^{-2} d\nu = (\int_{\mathfrak{F}} \hat{f}(\nu)\phi_\nu(x)|c(\nu)|^{-2}d\nu, g)$. よって, f は (2.4) を満す。
(証明終り)

<u>補題4.2.</u>　もし, f が $L^1_{2(n+1)}(K\backslash G/K)$ $(n = [\frac{d}{2}], d = \dim G/K)$ に属する

ならば，(2.4)が成立する。

(証明) 仮定より $\omega^{n+1}f$ は $L^1(K\backslash G/K)$ に属し，よって，$(\omega^{n+1}f)^\wedge$ は有界である。一方 $(\omega^{n+1}f)^\wedge(\nu)=(-\langle\nu,\nu\rangle-\langle\rho,\rho\rangle)^{n+1}\hat{f}(\nu)$ であり，$|c(\nu)|^{-2}=O(\nu^{d-1})$ $(\nu\to\infty)$ に注意すれば，$\hat{f}$ は $L^1(\mathfrak{F},|c(\nu)|^{-2}d\nu)$ に属する事がわかる。故に前の補題より求める結果を得る。

(証明終り)

さて，$(V_m^K)_{m\in\mathbb{N}}$ を $V_{m+1}^K\subset V_m^K$ を満たす K の原点のコンパクトな基本近傍系とする。同様に，A，N に対しても $(V_m^A)_{m\in\mathbb{N}}$，$(V_m^N)_{m\in\mathbb{N}}$ を定める。明らかに $V_m=V_m^K V_m^A V_m^N$ $(m\in\mathbb{N})$ は G の原点のコンパクトな基本近傍系となる。$h_m\in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ を $h_m\geq 0$，$\mathrm{supp}(h_m)\subset V_m$，$\int_G h_m(x)\,dx=1$ なる条件を満す様に選ぶ。この時，次の補題が成立する。

<u>補題 4.3.</u> f を $L^1(K\backslash G/K)$ の元とする。

(i) $\lim_{m\to\infty}\|h_m*f-f\|_1=0$

(ii) もし，f が $x\in G$ で連続であれば，

(a) $\lim_{m\to\infty}h_m*f(x)=f(x)$

(b) x のあるコンパクト近傍 U_x に対し，

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{y\in U_x}|h_m*f(y)-f(y)|=0.$$

(証明) (i) $\| h_m * f - f \|_1 \leq \int_G \int_G h_m(y) | f(y^{-1}x) - f(x) | \, dy \, dx \leq \sup_{y \in V_m} \sigma(y, f)$, ただし, $\sigma(y, f) = \int_G | f(y^{-1}x) - f(x) | \, dx$ である。 よって, f を $g_k \in C_c^\infty(K \backslash G / K)$, $k \in \mathbb{N}$ なる元により, L^1-norm で近似する事により, $\lim_{y \to e} \sigma(y, f) = 0$ となり, 求める結果を得る。
(ii)(a) は良く知られている。 (ii)(b) f の連続性から, f は $V_1^{-1} U_x$ で一様連続と仮定できる。 よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在し, $u, v \in V_1^{-1} U_x$ に対し, $uv^{-1} \in V_m$ $(m \geq M)$ ならば $| f(u) - f(v) | < \varepsilon$ である。 故に, $| h_m * f(y) - f(y) | \leq \int_G h_m(z) | f(z^{-1}y) - f(y) | \, dz \leq \varepsilon$ $(m \geq M, y \in U_x)$ が得られる。 (証明終り).

この補題における (G, V_m, h_m) の満たす条件は $(A, V_m^A, e^{\rho} F_{h_m})$ によっても満される事がわかる。 よって $F_{f*g} = e^{-\rho}(e^{\rho} F_f * e^{\rho} F_g)$ $(f, g \in L^1(K \backslash G / K))$ に注意すれば, 次の補題は前の補題と同様に得られる。

<u>補題 4.4.</u> f を $L^1(K \backslash G / K)$ の元とする。

(i) $\lim_{m \to \infty} \| F_{h_m * f} - F_f \|_1 = 0$

(ii) もし, F_f が $t \in \mathbb{R}$ で連続であれば,

(a) $\lim_{m \to \infty} F_{h_m * f}(t) = F_f(t)$

(b) t のあるコンパクト近傍 U_t に対し,

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{s \in U_t} | F_{h_m * f}(s) - F_f(s) | = 0.$$

定理4.5. もし，f が $L^1_{2n}(K|G/K)$ に属するならば，$f_0(x)=f(x)$ $(x\in G)$ である。すなわち，

$$f(x)=\lim_{r\to 0}\int_{\mathcal{F}} \hat{f}(\nu)\phi_\nu(x)\,|c(\nu)|^{-2}\,K(r\nu)\,d\nu \qquad (4,1)$$
$$=\frac{1}{2}R_n(\infty)\,F_{\Omega L_x^n f}(0)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}F_{\Omega L_x^n f}(t)\,(R_n-R_n(\infty))\hat{}\,(t)\,dt$$

（証明）．補題3.3により，$F_{\Omega L_x^n f}$，$F_{\Omega L_x^n(h_m*f)}=F_{h_m*\Omega L_x^n f}$ は $\mathbb{R}$ 上連続な関数である。よって $f-h_m*f$ に対し（h_m*f は $L^1_\infty(K|G/K)$ に属する事に注意）命題3.6を適用し，$\Omega L_x^n f$ に対し，補題4.4を適用すれば $\lim_{m\to\infty}|f_0(x)-(h_m*f)_0(x)|=0$ がわかる。ところで，h_m*f は $L^1_\infty(K|G/K)$ に属する事より，補題4.2により，$(h_m*f)_0(x)=h_m*f(x)$ である。よって補題4.3 (ii)(a) から，$\lim_{m\to\infty}(h_m*f)_0(x)=f(x)$ がわかる。故に $f_0(x)=f(x)$ でなくてはならない。（証明終り）

注意3. 明らかに $C_c^\infty(K|G/K)$，$\mathcal{C}^1(K|G/K)$（see [TV], [War, p363]）は $L^1_{2n}(K|G/K)$ に含まれる。特に $f\in C_c^\infty(K|G/K)$ の時，(4,1) は [He^3, 定理3.1] と一致する。また近似列を用いる事により，(4.1) は $\mathcal{C}(K|G/K)$ においても成立する事がわかる。

注意4. 以上の議論は ω，R_n を $(-a+\omega)$ $(a>-\langle\rho,\rho\rangle)$，$R_{n,a}(\nu)=|c(\nu)|^{-2}/(-a-\langle\nu,\nu\rangle-\langle\rho,\rho\rangle)^n$ にとれぞれ置き換えても，

成立する事がわかる。

5. 応用. Γ を $\Gamma\backslash G/K$ がコンパクトとなる G の離散部分群とし、G/K に固定点を持たないとする。ここでは総和法の公式をセルバーグの跡公式に適用する事により、[GW], [Wal] によって得られた X のスペクトルに関する式を求める。記号はすべて [DKV] と同じものを用いるが、[DKV] の $\mathfrak{F}_R, \mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_c$ と表わし、G 上の主系列は実軸 $\mathfrak{F}$ を用いて表わす事にする。

$h \in C_c^\infty(A)^W$ に対して ポアソンの和公式：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda)\hat{h}(\lambda) = vol(X)\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{F}} \hat{h}(\nu)\,|c(\nu)|^{-2}d\nu + \sum_{c\neq[e]_\Gamma} l_0(c)\,\Delta^+(\gamma)\,h(\gamma_R) \tag{5,1}$$

が成立する。ただし、Λ は X のスペクトルであり、$\lambda\in\Lambda$ に対し、$m(\lambda)$ はその重複度である。また右辺の $\sum$ は Γ の Γ-共役類で、原点に等しくないもの全体を動く。その他の記号、詳しい定義に関しては [DKV] の (3.14), (3.25), (5.42c), (4.5a), (3.59) を参照されたい。ここで $h\in C_c^\infty(A)^W$ に対し、唯一な $H\in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ でもって $F_H = h$ なるものが存在する事に注意する。特に右辺の第一項は $vol(X)\,H(e)$ と書ける。さらに [GW, 系6.3] により、(5,1) は F_H ($H\in \mathcal{C}^1(K\backslash G/K)$ (see [TV])) に対しても成立する事が知られている。

さて、任意の $\varepsilon>0$, $a>0$, $r>0$ に対して、

$$k(t) = k(\varepsilon, a; t)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+\varepsilon)} \left| \frac{t}{2(a+\langle\rho,\rho\rangle)^{\frac{1}{2}}} \right|^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon} K_{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}((a+\langle\rho,\rho\rangle)^{\frac{1}{2}}|t|),$$

$$g_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}r} e^{-\frac{t^2}{4r^2}}$$

と置く。ここで $K_\nu(z)$ は第3種変形ベッセル関数 (cf. [E, 7.2.2 (13)]) である。$k(t) = O(t^{\frac{d}{2}-1+\varepsilon} e^{-(a+\langle\rho,\rho\rangle)^{\frac{1}{2}} t})$ $(t\to\infty)$ (cf. [E, 7.4.1 (4)]) に注意して，[TV] の結果を用いれば，$k*g_r$ に対して (5.1) が適用できる事がわかる。特に [E, 7.12 (27)] より，$(k*g_r)^\wedge(\nu) = (a+\langle\nu,\nu\rangle+\langle\rho,\rho\rangle)^{-\frac{d}{2}+\varepsilon} e^{-r^2\nu^2}$ $(\nu\in\mathfrak{F})$ である。一方，$k(t)$ は命題3.1 or 3.2 の仮定をみたし，よって，(3.1) で $x=e$, $K=K_G$ とする事により，$\lim_{r\to 0}\int_{\mathfrak{F}} (a+\langle\nu,\nu\rangle+\langle\rho,\rho\rangle)^{-\frac{d}{2}+\varepsilon} |c(\nu)|^{-2} e^{-r^2\nu^2} d\nu < \infty$ となる。さらに $H\in \mathcal{C}^1(K\backslash G/K)$ の元でもって，$k*g_r \leq F_H$ $({}^\forall r\geq 0)$ なるものがとれるので，(例えば，$F_H(t)=\mathrm{sech}((a'+\langle\rho,\rho\rangle)^{1/2})$ $(0<a'<a)$)，(5.1) の右辺第2項は $\sum_{C\neq[e]_\Gamma} l_0(c)\Delta^+(\gamma) k(h_R)<\infty$ に収束する事がわかる。

以上の事と，左辺の各項が正値である事に注意して，次の定理を得る。

<u>定理</u>（[GW, 定理5.3], [Wal, 定理1.2]）. 任意の $a>0$, $\varepsilon>0$ に対して

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda) / (a+\langle\lambda,\lambda\rangle+\langle\rho,\rho\rangle)^{\frac{d}{2}+\varepsilon} < \infty. \qquad (d=\dim G/K).$$

<u>注意5.</u> この定理は任意のランクで成立する。(注意1を参照).

References

[BC] S. Bochner and K. Chandrasekharen, Fourier Transform, Annals of Mathematics Studies, 19, Princeton (1949).

[E] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions II, Mcgraw-Hill, New York (1953).

[DKV] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk and V. S. Varadarajan, Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curveture, Inv. Math., 52 (1979), 27-93.

[GW] R. Gangolli and G. Warner, On Selberg's trace formula, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 328-343.

[He^1] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York (1962).

[He^2] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, New York (1978).

[He^3] S. Helgason, The Radon Transform, Birkhäuser, Boston (1980)

[FR] M. Flensted-Jensen and D. L. Ragozin, Spherical functions are Fourier transforms of L_1-functions, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 6 (1973), 457-458.

[Ko] T. Koornwinder, A new proof of Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform, Arkiv för Mat., 13 (1975), 145-159.

[Ti] E. C. Titchmarsh, Introduction to The Theory of Fourier Integrals, Oxford (1948).

[TV] P. C. Trombi and V. S. Varadarajan, Spherical transdorms on semisimple Lie groups, Ann. of Math., 74 (1971),243-303.

[War] G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[Wal] N. R. Wallach, An asymptotic formula of Gelfand and Gangolli for the spectrum of $\Gamma\backslash G$, J. Differential Geometry, 11 (1976), 91-101.