数理解析研究所講究録
第483巻 1983年 249-283

Good lattice pointsを用いた多重数値積分

筑波大 電子情報 杉原正顯(Masaaki Sugihara)

0. はじめに

Good lattice points法は，HlawkaやKorobovによって導入されたs次元単位超立方体($[0,1]^s$)上の関数に対する数値積分公式で次式で定義される。

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{g_1}{N}k\right\},\cdots,\left\{\frac{g_s}{N}k\right\}\right),\quad g_i, N\in\mathbb{Z}(\text{整数}),\ \{x\}\text{は}x\text{の小数部分}\ (0,1)$$

従来この公式は主に$[0,1]^s$上の多項式変数変換を施した微分可能関数に対して適用されて，その有効性が示されていた。本稿では，IMT型二重指数変数変換を施した多変数解析関数へのgood lattice points法の適用可能性をみるために、より解析の容易な関数族$\mathcal{E}_s(\beta, C)$：

$f\in\mathcal{E}_s(\beta,C)\quad(\beta, C>0)$

$\Leftrightarrow$ fは$[0,1]^s$上の実数値関数であって，次のような絶対収束する多重Fourier級数に展開可能である。

$$f(x)=\sum_h c_h e^{2\pi i\langle h,x\rangle},\quad \langle\ ,\ \rangle は内積,$$
$$|c_h|\leqq C\,e^{-\beta(|h_1|+\cdots+|h_s|)}, \tag{0,2}$$

に対してgood lattice points法を適用した時の有効性を論ずる．また，good lattice points法を複合化した公式(複合化good lattice points法)：

$$\frac{1}{n^s}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_s=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}f(\{\tfrac{1}{n}(i_1+\tfrac{g_1}{p}k)\},\cdots,\{\tfrac{1}{n}(i_s+\tfrac{g_s}{p}k)\})\right),$$
$$p,n,g_i\in\mathbb{Z},\quad pは固定で，nが動く， \tag{0,3}$$

を導入して$\mathcal{E}_s(\beta,C)$に対して適用した時の有効性を論じ，good lattice points法よりも複合化good lattice points法がより有効であることを指摘する．そして，より具体的に$s\leqq5$に対して有効と思われる数値積分公式を提案する．また，一方において，$\mathcal{E}_s(\beta,C)$に対する関数値のみを用いた数値積分公式の誤差の下限に対する評価を与え，誤差の下限の評価からのgood lattice points法，複合化good lattice points法の有効性の評価を行なう．最後に，具体的なIMT型＝重指数変数変換を施した多変数解析関数に，$\mathcal{E}_s(\beta,C)$に対して有効であるとして得られた数値積分公式を適用して，その有効性を実用的視点から論ずる．

1. Good lattice points法について

1.1 序論

まず，(0.1)式によって定義される数値積分公式を$GL_s(N;g)$,

$g=(g_1, g_2, \cdots, g_s)$，と略記することにする。ここで，$N, g_1, \cdots, g_s$ の最大公約数 $\gcd(N, g_1, \cdots, g_s) = l > 1$ の時は，$GL_s(N; g) = GL_s(N/l; g/l)$ であり，$N/l\ (<N)$ に対する公式を考察すればよいから，初めから $\gcd(N, g_1, \cdots, g_s) = 1$ を仮定しておく。この時，$GL_s(N, g)$ を関数 $f \in \mathcal{E}_s(\beta, C)$ に適用した時の誤差は次のように評価される。

$$
\begin{aligned}
|\text{誤差}| &= \left| \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{g_1}{N}k\right\}, \cdots, \left\{\frac{g_s}{N}k\right\}\right) \right| \\
&= \left| c_0 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{h} c_h e^{2\pi i \frac{k}{N}\langle h, g\rangle}\right) \right| \quad \left(\because c_0 = \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx\right) \\
&= \left| c_0 - \sum_{h} c_h \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{k}{N}\langle h, g\rangle}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{h:\ \langle h, g\rangle \equiv 0 \pmod N \\ h \neq 0}} c_h \right| \\
&\leq C \sum_{\substack{h:\ \langle h, g\rangle \equiv 0 \pmod N \\ h \neq 0}} e^{-\beta(|h_1| + \cdots + |h_s|)} .
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

ここで，(1.1)の最右辺の式を評価して，その値が小さくなる N と g をもとめれば，誤差の小さい(＝よい)数値積分公式が得られることになる。しかし，(1.1)の最右辺の式を直接評価し，その値を小さくする N と g をもとめることは，一般には困難である。そこで，比較的扱いやすい誤差の指標となる量：

$$
\rho_s(N; g) \overset{d}{=} \operatorname*{Min}_{\substack{h:\ \langle h, g\rangle \equiv 0 \pmod N \\ h \neq 0}} (|h_1| + \cdots + |h_s|) \tag{1.2}
$$

を導入する。これによって，(1.1)の誤差は，ほぼ次のように

評価され，

$$|\text{誤差}| \sim O\left(e^{-\beta\rho_s(N;g)}\right), \tag{1.3}$$

誤差に関する研究は，$\rho_s(N;g)$の研究に帰着されることになる．ただし，(1.3)は正確な評価式ではないので，その正確なρ_sを用いた評価式を求めておく必要がある．従って，good lattice points法を$\mathcal{E}_s(\beta, C)$の関数に適用した時の誤差の研究は次の2つの問題に分けることができる．

問題1．　$\rho_s(N;g)$の性質を調べること．

（主たる目的は"効率"の良いNとgを求めることである）

問題2．　$\rho_s(N;g)$を与えられたとして(1.3)の評価を正確に行なうこと．

以下，$s=1$の場合，(0.1)は台形則であって，その性質は比較的よくわかっているので，$s=2$, $s=3$, $s\geq 4$の3つの場合に分けて上述の2つの問題について検討を加え，良い数値積分公式を決定して行く．

1.2 2次元の場合の解析

1.2.1 ρ_2の性質（問題1について）

(i) ρ_2の上限およびそれを達成する場合

まず，$\rho_2(N;g)$に対する上限を定める．そのための道具はMinkowskiによるGeometrie der Zahlenの理論である．結果は，次のようである．

定理 1-1

任意の $N \in \mathbb{Z}$, $g=(g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対して

$$\rho_2(N;g) \equiv \min_{\substack{h:\langle h,g\rangle \equiv 0 \pmod N \\ h \neq 0}} (|h_1|+|h_2|) \leqq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gaussian bracket}}}{[\sqrt{2N}]} \tag{1.4}$$

この定理1-1によって，$\rho_2(N;g)$が$\sqrt[2]{N}$のオーダーであることがわかる。そこで，次式で定義される効率という概念を導入する。

$$\mathrm{eff}_2(N;g) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \rho_2(N;g)/\sqrt[2]{N}. \tag{1.5}$$

すると，定理1-1は次のように言い替えることができる。

"任意の $N \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{Z}^2$ に対して $\mathrm{eff}_2(N;g) \leqq \sqrt[2]{2}$."

従って，もし，数値積分において分点数に対して制約がないのであれば，$\mathrm{eff}_2(N;g)=\sqrt[2]{2}$ となるようなNとgの系列を使用して，数値積分を行なうことが良いことになる。次に，このような場合，つまり，効率最大の場合がどのような場合かについて述べる。結果は次の通りである。

定理 1-2

$\rho_2(N;g)=\sqrt[2]{2N}$ となるのは，次の場合であり，かつ，その場合に限る。

$$N = 2q^2, \quad g \equiv \xi\cdot(1,\ 2q\alpha \pm 1) \pmod N, \tag{1.6}$$
ここで，$q, \xi, \alpha \in \mathbb{Z}$, $\gcd(q,\alpha)=1$, $\gcd(\xi, N)=1$.

なお，この結果と関連して次の結果が成立する．

命題 1-3

$N=2q^2$, $g\equiv\xi\cdot(1,2q\alpha+1)$, $\gcd(q,\alpha)=1$, $\gcd(\xi,N)=1$ と

$N=2q^2$, $g\equiv\xi'\cdot(1,2q\alpha-1)$, $\gcd(q,\alpha)=1$, $\gcd(\xi',N)=1$ とに対して

$$\sum_{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0 \pmod N \\ h\neq 0}} e^{-\beta(|h_1|+|h_2|)}$$

の値は同じである．つまり，(1.1)の誤差の上からの評価の値は同じである．

以上，定理1-2，命題1-3より，積分近似公式としては，$GL_2(2q^2;(1,2q\alpha-1))$, $\gcd(q,\alpha)=1$ を使用すれば，効率最大となる．ただし，α の値によって誤差は，違い得る．

次に上記の α の値による誤差の違いを見る．それには，関数

$$\sum_{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0 \pmod N \\ h\neq 0}} e^{-(|h_1|+|h_2|)} \qquad (1.7)$$

の値の α の値による違いを見れば良い．そのためには，実際に，関数

$$\sum_{h} e^{-(|h_1|+|h_2|)} e^{2\pi i\langle h,x\rangle} = \prod_{j=1}^{2} \frac{e^2-1}{e^2-2e\cdot\cos(2\pi x_j)+1} \qquad (1.8)$$

に数値積分公式 $GL_2(2q^2;(1,2q\alpha-1))$, $\gcd(q,\alpha)=1$ を適用して誤差を見れば (1.7) の値がわかる．表1に $q=11$ の場合について，各 $g_2(\alpha)$ の値に対する誤差を示す．つまり，(1.7) の値を示す．この表から，わかるように (1.7) の値は，α によって

ほとんど変化することがない。従って，積分近似公式としては，形の最も簡単な $GL_2(2g^2;(1,2g-1))$ を使用すればよい。

これで，効率最大となる場合については解析が終ったのであるが，定理1-1の ρ_2 に対する上限 $[\sqrt{2N}]$ を達成する他の N と g の系列がわかっているのでそれを次に記す。

表1. $N=242\,(g=11)$ の時の各 $g_2(\alpha)$ に対する $\displaystyle\sum_{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,N)\\ h\neq 0}} e^{-(|h_1|+|h_2|)}$ の値（数値積分誤差）.

$N=2g^2$	α	$g_2(=2\alpha g-1)$	$-\log_{10}\|$誤差$\|$
242 $(=2\cdot 11^2)$	1	21	8.757
	2	43	8.776
	3	65	8.776
	4	87	8.776
	5	109	8.774

（$g=(1,g_2)$ と $g=(1,N-g_2)$ は同じ誤差を生成することに注意せよ.）

定理 1-4

$$N=2g^2+2g;\quad g=(1,2g\alpha\pm 1),\ \gcd(g,\alpha)=1 \Rightarrow \rho_2(N;g)=2g\ (=[\sqrt{2N}]).$$

$$N=2g^2+2g+1,\ g=(1,\ 2g^2) \Rightarrow \rho_2(N;g)=2g+1\ (=[\sqrt{2N}]).$$

$$N=2(g+1)^2-1,\ g=(1,\ 2g(g-1)) \Rightarrow \rho_2(N;g)=2g+1\ (=[\sqrt{2N}]).$$

以上，定理1-1，定理1-2，定理1-4をまとめると次のようになる。

N	$[\sqrt{2N}]$	$\geqq$ (定理1-1)	$\mathrm{Max}_g\,\rho_2(N;g)$	
$2g^2$	$2g$		$2g$	← 定理1-2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$2g^2+2g$	$2g$		$2g$	← 定理1-4
$2g^2+2g+1$	$2g+1$		$2g+1$	← 定理1-4
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$2(g+1)^2-1$	$2g+1$		$2g+1$	← 定理1-4
$2(g+1)^2$	$2(g+1)$		$2(g+1)$	← 定理1-2

(ii) 与えられたNに対して $\underset{g\in\mathbb{Z}^2}{\mathrm{Max}}\,\rho_2(N;g)$ を達成する g を求める方法

一般に，数値積分を行なうにあたって，分点数Nがあらかじめ与えられている場合もあり得る．この時は，$\underset{g\in\mathbb{Z}^2}{\mathrm{Max}}\,\rho_2(N;g)$ を達成するような g を数値積分公式で使用するのが最も良い．そこで，ここでは，Nが与えられたとして $\underset{g\in\mathbb{Z}^2}{\mathrm{Max}}\,\rho_2(N;g)$ を達成する g を求める問題を考える．

この問題は，$\rho_2(N;g)=\underset{h:\langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,N),\,h\neq 0}{\mathrm{Min}}(|h_1|+|h_2|)$ を計算する部分と，$\rho_2(N;g)$ が求まったとしてそれを g に関して最大化する部分（$\underset{g\in\mathbb{Z}^2}{\mathrm{Max}}\,\rho_2(N;g)$ を求める部分）とに分けることができる．現在，後半の部分については，$\underset{g\in\mathbb{Z}^2}{\mathrm{Max}}\,\rho_2(N;g)=\underset{1\leq g_1\leq g_2\leq N/2}{\mathrm{Max}}\,\rho_2(N;g)$ に注意して，各 g に関して $\rho_2(N;g)$ を計算して，その中から最大値を求めてそれを達成する g を求めるしかないようである．そこで，以下，$\rho_2(N;g)$ を求める話に専心する．

まず，次の補題が成立する：

補題 1-5

$\gcd(N,g_1,g_2)=1$，$N,g_1,g_2>0$，$d\equiv\gcd(N,g_1)$ とする．

この時，ある $a\in\mathbb{Z}$ $(0\leq a<N/d)$ が存在して

$$\rho_2(N;g)=\underset{(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2-\{0\}}{\mathrm{Min}}\left(\left|\tfrac{N}{d}\lambda-a\mu\right|+|d\mu|\right).$$

（a は，本質的に，g_1 と g_2，g_1 と N とに Euclid 互除法を適用すれば求まる）

さらに次の定理が成立する。

定理 1-6

記号を補題1-5と同じとする。そして，$b \overset{d}{=} \gcd(N/d,\ a)$とし，$\frac{a}{b} / \frac{N}{db}$が次のように連分数展開されているものとする。

$$\frac{a}{b} \Big/ \frac{N}{db} = \frac{1|}{|a_1} + \cdots + \frac{1|}{|a_n}.$$

この時，$\frac{A_m}{B_m} \overset{d}{=} \frac{1|}{|a_1} + \cdots + \frac{1|}{|a_m}$ $(m \geqq 1)$, $A_{-1} = 1, A_0 = 0, B_{-1} = 0, B_0 = 1$
とおくと，

$$\rho_2(N;g) = \underset{-1 \leqq m \leqq n}{\mathrm{Min}} \left(b \left| A_m \frac{N}{db} - B_m \cdot \frac{a}{b} \right| + dB_m \right).$$

以上の補題1-5，定理1-6を用いると，本質的にEuclid互除法によって$\rho_2(N;g)$を求めることができることがわかる。従って，計算の手間としては$O(\log N)$でよく，非常に効率良く$\rho_2(N;g)$を求めることができる。より詳しくは［1］を参照されたい。

(iii) $N = U_n$, $g = (1, U_{n-1})$ (U_n: Fibonacci数) に対する$\rho_2(N;g)$の値

(i)で述べたような定理1-1の$\rho_2(N;g)$の上限を達成する場合ではないが，(ii)の結果を用いて$\rho_2(N;g)$の値がわかるNとgの系列がある。この(iii)では，それについて記す。まず，次の定理が成立する。

定理 1-7

U_nをFibonacci数 ($U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $U_{k+2} = U_{k+1} + U_k$, $k \geqq 0$) とすると，

$$\rho_2(U_n;(1, U_{n-1})) = U_{n-[\frac{n}{2}]} + U_{[\frac{n}{2}]} \quad (n \geqq 3)$$

また，Fibonacci 数を一般化して，$V_0=0$, $V_1=1$, $V_{k+2}=c\cdot V_{k+1}+V_k$ ($k\geq 1$)，c は自然数，なる V_n を考えると，次が成立する．

定理 1-8

$$\rho_2(V_n;(1,V_{n-1}))=V_{n-[\frac{n}{2}]}+V_{[\frac{n}{2}]} \qquad (n\geq 3)$$

定理1-8において，$c>1$である V_n を用いた時の効率 $eff_2(V_n;(1,V_{n-1}))$ はかなり低い．そこで，比較的効率の良いと思われる $N=U_n$, $g=(1,U_{n-1})$ の場合に $\rho_2(N;g)$ の値を表2に記す．この表より，$\rho_2(U_n;(1,U_{n-1}))$ の値が定理1-1より得られる上限 $[\sqrt{2U_n}]$ と大差ないことがわかる．従って，数値積分公式 $GL_2(U_n;(1,U_{n-1}))$ が比較的効率の良い公式であることがわかる．ただし，実際の数値積分への適用可能性については，後に数値実験を通して見ることにする．なお，$GL_2(U_n,(1,U_{n-1}))$ は，Zaremba によって，多項式変換を施した微分可能関数の数値積分法と

表2. $N=U_n$, $g=(1,U_{n-1})$ の時の $\rho_2(N;g)$

($U_0=0$, $U_1=1$, $U_{k+2}=U_{k+1}+U_k$ ($k\geq 0$))

n	$N=U_n$	$[\sqrt{2N}]$ ($\geq$)	$\rho_2(U_n;(1,U_{n-1}))$
3	2	2	2
4	3	2	2
5	5	3	3
6	8	4	4
7	13	5	5
8	21	6	6
9	34	8	8
10	55	10	10
11	89	13	13
12	144	16	16
13	233	21	21
14	377	27	26
15	610	34	34
16	987	44	42
17	1597	55	55
18	2584	71	68
19	4181	91	89
20	6765	116	110
21	10946	147	144

して，ある意味で最良であることが示されている．

1.2.2　誤差評価（問題2について）

$s=2$ の場合のみ可能である連分数論を用いた誤差評価と，多次元にも拡張可能な手法を用いた誤差評価を与える．両評価の比較は，次の 1.2.3 において数値実験を通して行なう．

まず，連分数論を用いた誤差評価から与える．なお，記述の簡易化のために $\varepsilon_2(1,1)$ に対する誤差評価を扱う．

定理 1-9

補題1-5，定理1-6で用いた記号を使用する．そして $N' \triangleq N/dl$, $g_2' = a/l$ とする．この時

$$|\text{誤差}| \leq \sum_{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,N)\\ h\neq 0}} e^{-(|h_1|+|h_2|)}$$

$$\leq \frac{4}{1-\exp(-N')}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\exp(-(l|A_mN'-B_mg_2'|+dB_m))}{1-\exp(-l|A_mN'-B_mg_2'|)} + \frac{2}{\exp(dN')-1} + \frac{2}{\exp(lN')-1} + \frac{2}{\exp(dN')-1}\times\frac{2}{\exp(lN')-1} \qquad (1.9)$$

系 1-10

$$|\text{誤差}| \leq \frac{4}{1-\exp(-N')}\times\frac{1}{1-\exp(-l)}\cdot n\cdot\exp(-\rho_2(N;g)) + \frac{2}{\exp(dN')-1} + \frac{2}{\exp(lN')-1} + \frac{2}{\exp(dN')-1}\times\frac{2}{\exp(lN')-1}$$

次にもう一つの誤差評価を与える．

定理 1-11

$$|\text{誤差}| \leq N_g\cdot\exp(-\rho_2(N;g)) + (9-N_g)\cdot\exp(-\rho_2(N;g)-1) + \frac{7-5r}{(1-r)^2}\cdot r^3, \qquad (1.10)$$

ここで， $r = \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_2(N;g)\right)$

N_g : h に関する不定方程式 $\langle h, g\rangle \equiv 0 \pmod{N}$ の解で，$|h_1|+|h_2|=\rho_2$ となる h の個数．

1.2.3 数値実験

ここでは，次の2つの問題を数値実験を通して考察する．

(i). 1.2.2で与えた2つの誤差評価式（定理1-9, 定理1-11）の比較検討．

(ii). 1.2.1 (iii)で導いた比較的効率の良いと思われる $GL_2(u_n;(1,u_{n-1}))$ と効率最大の意味で最良の公式 $GL_2(2g^2;(1,2g-1))$ との数値積分誤差を通しての比較．

以下，数値実験結果は，被積分関数が $\mathcal{E}_2(1,1)$ に属する関数 (1.8)，つまり，

$$f(x) = \sum_h e^{-(|h_1|+|h_2|)} e^{2\pi i\langle h, x\rangle} = \prod_{j=1}^{2} \frac{e^2-1}{e^2-2e\cos(2\pi x_j)+1}$$

である場合を記す．しかし，以下の結論は，β があまり小さくない $\mathcal{E}_2(\beta, C)$ に対しても，成立することが他の数値実験からわかっている．

(ii)について)

表3に，$N=u_n$, $g=(1,u_{n-1})$ の時と，$N=242$, $g=(1,2g\alpha\pm1)$ の時の実際の数値積分誤差と

表3. 実際の数値積分誤差と 定理1-9, 定理1-11 による誤差の推定値の比較．
(1-9)式 (1-10)式

$GL_2(u_n;(1,u_{n-1}))$, (u_n: Fibonacci数) の場合．

N	g_2	$-\log_{10}$|誤差|	$-\log_{10}$(1-9)	$-\log_{10}$(1-10)	$-\log_{10}$(1-10)第1項
55	34	3.799	3.491	3.678	4.042
89	55	5.023	4.720	4.879	5.044
144	89	6.543	6.242	6.288	6.648
233	144	8.515	8.214	8.354	8.518
377	233	10.949	10.648	10.631	10.991

定理1-9, 定理1-11, 定理1-11の誤差評価式オ1項を用いた誤差の推定値を与える。
(1.9)式 (1.10)式

この表より，(1.9)式より(1.10)式の方が良い評価式であることがわかる。また，(1.10)式のオ1項が，実際の誤差をよく近似していることがわかる。従って，誤差評価としては，多少誤差の過小評価となり得るが，(1.10)式オ1項 $N_g \cdot \exp(-P_2)$ が最も良い。

(ii)について)

図1に，数値積分公式 $GL_2(u_n, (1, u_{n-1}))$ (u_n: Fibonacci 数)，および，$GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ を関数(1.8)に適用した時の誤差を示す。比較のために台形則の結果も記しておく。この図1より，GL_2

表3（つづき）

$GL_2(242; (1, 2g\alpha \pm 1))$，($g=11$, $\alpha=1,2,3,4,5$)の場合。

N	g_2	$-\log_{10}$|誤差|	$-\log_{10}$(1.9)	$-\log_{10}$(1.10)	$-\log_{10}$(1.10)オ1項
242	21	8.757	8.445	8.703	8.776
242	23	8.757	8.382	8.703	8.776
242	43	8.776	8.474	8.703	8.776
242	45	8.776	8.475	8.703	8.776
242	65	8.776	8.475	8.703	8.776
242	67	8.776	8.473	8.703	8.776
242	87	8.776	8.475	8.703	8.776
242	89	8.776	8.467	8.703	8.776
242	109	8.774	8.451	8.703	8.776
242	111	8.774	8.472	8.703	8.776

（$g_2=(2g\alpha+1)$ と $g_2=(2g\alpha-1)$ は同じ誤差を生成することに注意。）

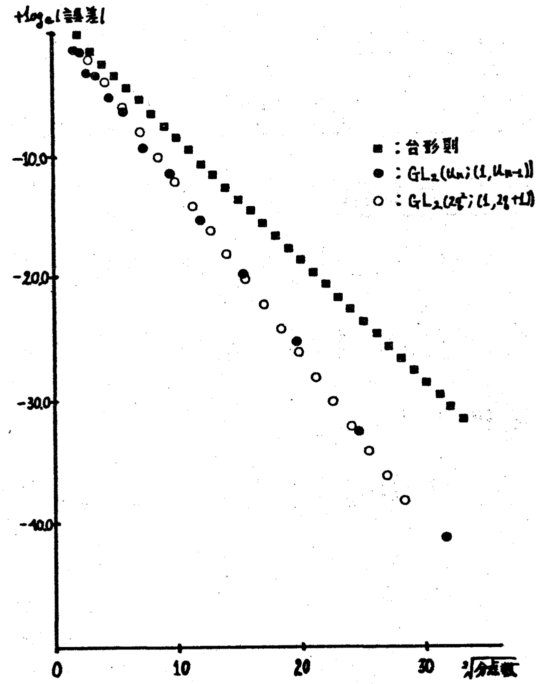


図1. 台形則，$GL_2(u_n; (1, u_{n-1}))$ (u_n: Fibonacci 数)，$GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ を関数 $\prod_{j=1}^{2} \frac{e^2-1}{e^2-2e\cdot\cos(2\pi x_j)+1}$ に適用した時の誤差。

$(2q^2;(1,2q-1))$ の方が，数値積分誤差が小さいという意味で，$GL_2(u_n;(1,u_{n-1}))$ より有効であることがわかる。また，実際に数値積分を行なう場合，多くの N（分点数）に対して数値積分結果が得られる方が望ましい。この点からも，$GL_2(2q^2;(1,2q-1))$ が $GL_2(u_n;(1,u_{n-1}))$ より有効である．

1.2.4 まとめ

$\mathcal{E}_2(\beta, C)$ に属する関数に対する数値積分法としては，$GL_2(2q^2;(1,2q-1))$ を用いるのがよく，その公式を適用した時の数値積分誤差は，$6\cdot C\cdot e^{-2q\beta}$ で近似される（$q=1$ の時は，$8\cdot C e^{-2q\beta}$）.

1.3 3次元の場合の解析

1.3.1 ρ_3 の性質（問題1について）

(i) ρ_3 の上限およびそれを達成する場合.

2次元の場合と同様に，Geometrie der Zahlen の理論を用いて，$\rho_3(N;g)$ の上限を定める．

定理 1-12

任意の $N\in\mathbb{Z}$，$g=(g_1,g_2,g_3)\in\mathbb{Z}^3$ に対して，

$$\rho_3(N;g)=\underset{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)\\ h\neq 0}}{\mathrm{Min}}(|h_1|+|h_2|+|h_3|)\leqq\sqrt[3]{\frac{109}{18}N}.$$

この定理 1-12 より，2次元の場合と同じように効率 eff_3 を次式で定義するのが自然であろう．

$$\mathrm{eff}_3(N;g)\triangleq\rho_3(N;g)/\sqrt[3]{N}.$$

すると，定理1-12の主張は，次の不等式と同値となる．

$$\mathrm{eff}_3(N;g) \leqq \sqrt[3]{\frac{108}{19}} \doteqdot 1.7847 \quad (<\sqrt[3]{3!}=1.8171).$$

ここで，2次元の場合の類推からすると $\sqrt[3]{\frac{108}{19}N}$ = 整数となるN，つまり，$N=2\cdot 19\cdot g^3\ (g\in\mathbb{Z})$ なるNに対して，ある $g\in\mathbb{Z}^3$ が存在して，効率が最大値 $\sqrt[3]{\frac{108}{19}}$ を達成することが期待される．しかし，このことは，次の定理によって，否定される。

定理 1-13

定理1-12で等号が成立するのは，次の場合に限る．

$$\begin{cases} N=38 \\ g\equiv \xi\cdot(1,\pm 7,\pm 11)\pmod{38},\ \gcd(\xi,38)=1,\ \text{および,} \\ \text{その順序を入れかえたもの} \end{cases}$$

この定理1-13により，効率の最大値を達成するのは，分点数 $N=38$ の場合のみであり，2次元の場合のような効率の良いNとgの系列は得られないことになる．従って，次の(ii)で述べる方法によって，各Nに対して $\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \rho_3(N;g)$ を達成するようなgを求めて行くより他に良い数値積分公式列を得る方法がないことになる．ただし，この効率の良い数値積分公式列が得られないという困難は，2で導入する複合化good lattice points法を用いることにすれば解消する．

(ii) 与えられたNに対して $\underset{g\in\mathbb{Z}^3}{\mathrm{Max}}\ \rho_3(N;g)$ を達成するgを求める方法

2次元の場合と同様に，$\rho_3(N;g)=\underset{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,N)\\ h\neq 0}}{\mathrm{Min}}\left(\sum_{j=1}^{3}|h_j|\right)$ を計算する

部分し，$\rho_3(N;g)$ が与えられたとして $\max_{g\in Z^3}\rho_3(N;g)$ を計算する部分とに分けることができる。詳細は略するが，本質的に両部分とも，しらみつぶし計算を行なうしかないようである。表4に，比較的しらみつぶし計算が少なくてすむ $g=(1,g_2,g_3)$ $g_2,g_3\in Z$，および，$g=(1,g,g^2)$，$g\in Z$ の場合について，実際に計算を行なった結果を示す（$\max_{g=(1,g_2,g_3),\,g_2,g_3\in Z}\rho_3(N;g)$，$\max_{g=(1,g,g^2),\,g\in Z}\rho_3(N;g)$ を計算した結果）.

表4. $\max_{g}\rho_3(N;g)=n$ $(n=2,3,\cdots)$ となる最小のNとそれを達成する g

$g=(1,g_2,g_3)$ の場合

N	g	$\max_g \rho_3(N;g)$	$\le[\sqrt[3]{\frac{108}{19}N}]$	$\max_g \mathrm{eff}_3$
2	(1, 1, 1)	2	2	1.5874
7	(1, 2, 3)	3	3	1.5683
12	(1, 3, 5)	4	4	1.7472
27	(1, 7, 11)	5	5	1.6667
38	(1, 7, 11)	6	6	1.7847
70	(1, 16, 25)	7	7	1.6985
92	(1, 35, 41)	8	8	1.7721
145	(1, 9, 61)	9	9	1.7131
178	(1, 23, 81)	10	10	1.7777
260	(1, 40, 94)	11	11	1.7235
312	(1, 47, 149)	12	12	1.7693
421	(1, 125, 192)	13	13	1.7345
486	(1, 83, 129)	14	14	1.7807

$g=(1,g,g^2)$ の場合

N	g	$\max_g \rho_3(N;g)$	$\le[\sqrt[3]{\frac{108}{19}N}]$	$\max_g \mathrm{eff}_3$
2	(1, 1, 1)	2	2	1.5874
7	(1, 2, 3)	3	3	1.5683
14	(1, 5, 11)	4	4	1.6597
29	(1, 13, 24)	5	5	1.6274
38	(1, 11, 7)	6	6	1.7847
79	(1, 34, 50)	7	7	1.6314
104	(1, 23, 9)	8	8	1.7012
147	(1, 31, 79)	9	9	1.7053
190	(1, 69, 11)	10	10	1.7395
286	(1, 80, 108)	11	11	1.6696
356	(1, 95, 125)	12	12	1.6932
455	(1, 199, 16)	13	13	1.6902
518	(1, 211, 491)	14	14	1.7432
635	(1, 274, 146)	15	15	1.7452
784	(1, 177, 753)	16	16	1.7352
982	(1, 46, 152)	17	17	1.7103

この表より，$g=(1,g,g^2)$ 型の中から良い g を求めても，それほど効率が低くならないのがわかる。従って，少ない手間（g に関する部分が N/2 のしらみつぶしですむ）で良い g を求められる $g=(1,g,g^2)$ 型の数値積分公式が有効であることになる。ただし，上の表4は，実用に供するには，Nが小さすぎ，good lattice points法のみを考える限り，さらなるしらみつぶし計算を実行する必要がある．しかし，現在のような計算法では，大きなNに対して $\underset{g}{\mathrm{Max}}\,\rho_3(N;g)$ を求めることは不可能に近い．$\underset{g}{\mathrm{Max}}\,\rho_3(N;g)$ を求める算法の工夫を含めて，実用に使し得る表の作成を今後の課題としたい．

1.3.2 誤差評価（問題2について）

次の結果が得られる（ただし，$\mathcal{E}_3(1,1)$ に対する結果を示す）．

定理1-14

$$|\text{誤差}| \leq \sum_{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0 \pmod N\\ h\neq 0}} e^{-(|h_1|+|h_2|+|h_3|)}$$

$$\leq N_g\cdot\exp(-\rho_3(N;g)) + (C_3\cdot 27-N_g)\cdot\exp(-\rho_3(N;g)-1) + C_3\frac{(37-60r+19r^2)}{(1-r)^3}r^3$$

ここで，$r=\exp(-\frac{1}{2}\rho_3(N;g))$，$C_3\leq 80$，

N_g：$\langle h,g\rangle\equiv 0 \pmod N$ の解 h の中で $\sum_{j=1}^{3}|h_j|=\rho_3(N;g)$ となる個数．

1.3.3 まとめ

(i) より大きなNに対して，表4に対応するものが必要である．

(ii) 定理1-14については，数値実験を行なった結果（紙数の関係で示すことができない）によれば，$N_g\cdot\exp(-\rho_3(N;g))$ が誤差をよく近似している．

1.4 一般の次元の場合の解析（$S\geq 4$）

1.4.1 $\rho_s(N;g)$ $(S\geq 4)$ の性質（問題1について）．

ii) $\rho_s(N;g)$ の上からの評価

次の定理が成立する。

定理 1-15

任意の $N \in Z$, $g \in Z^s$ に対して

$$\rho_s(N;g) = \underset{\substack{h:\langle h,g\rangle \equiv 0 \pmod N \\ h \neq 0}}{\mathrm{Min}} \left(\sum_{j=1}^{s} |h_j|\right) \leqq \sqrt[s]{s!N}.$$

つまり、

$$\mathrm{eff}_s(N;g) \overset{\mathrm{d}}{=} \rho_s(N;g)/\sqrt[s]{N} \leqq \sqrt[s]{s!}.$$

ここで、2次元、3次元と異なり、等号の成立条件、もしくは、等号不成立かどうかもわかっていない。従って、3次元と同様に、与えられたNに対して効率の良いgを求めていく以外、良い数値積分公式を得る方法がない。次のiii)でその問題を扱う。

iii) 与えられたNに対して $\underset{g \in Z^s}{\mathrm{Max}}\ \rho_s(N;g)$ を達成するgを求める方法。

3次元の場合と同様に本質的にしらみつぶし法しかないようである。ここでは、しらみつぶし計算が少なくてすむ $g=(1, g_2, \cdots, g_s)$, $g_i \in Z$ の場合と $g=(1, g, g^2, \cdots, g^{s-1})$, $g \in Z$ の場合を考える。

まず、与えられたNに対して、どれほど効率の良い $g=(1, g_2, \cdots, g_s)$, $g_i \in Z$ が存在し得るかの評価— $\underset{g=(1,g_2,\cdots,g_s),\, g_i \in Z}{\mathrm{Max}}\ \rho_s(N;g)$ の下からの評価—を与える。そして、それに続いて、$g=(1, g, g^2, \cdots, g^{s-1})$ の型の場合についても、$\underset{g=(1,g,g^2,\cdots,g^{s-1}),\, g \in Z}{\mathrm{Max}}\ \rho_s(N;g)$ の下からの評価を与える。

定理1-16

$s \geq 2$, この時,
$$\max_{\substack{g=(1,g_2,\cdots,g_s)\\ g_i \in \mathbb{Z}}} \rho_s(N;g) > \sqrt[s]{\frac{s!}{2^{s-1}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)}\,(1-o(1))N} \quad (N \to \infty)$$
が成立する. つまり, 任意の $\eta > 0$ に対して, ある整数 $N_0(\eta)$ が存在して, $N_0(\eta)$ より大きい任意の整数 N に対して, ある $g=(1,g_2,\cdots,g_s)$ が存在して (N に依存する)
$$\rho_s(N;g) > \sqrt[s]{\frac{s!}{2^{s-1}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)}\,(1-\eta)\cdot N}\,.$$

定理1-17

$$\max_{\substack{g=(1,g,g^2,\cdots,g^{s-1})\\ g \in \mathbb{Z}}} \rho_s(N;g) > \sqrt[s]{\frac{s!}{2^{s-1}} \times \frac{p_1\cdots p_m}{(s-1)^m}} - s\,,$$
但し, $N = p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$ (p_i は相異なる素数).

表5, 表6 に, 具体的に, $s=4,5$ の場合に小さな N に対して, $g=(1,g_2,\cdots,g_s)$, $g_i \in \mathbb{Z}$ の型の時と $g=(1,g,g^2,\cdots,g^{s-1})$, $g \in \mathbb{Z}$ の型の時にしらみつぶし計算を行なった結果を示す. この結果から次の結論が得られる.

① $g=(1,g_2,\cdots,g_s)$, $g_i \in \mathbb{Z}$ の場合と $g=(1,g,g^2,\cdots,g^{s-1})$, $g \in \mathbb{Z}$ の場合の効率の差は小さい.

表5. $\max_g \rho_4(N;g) = n$ $(n=2,3,\cdots)$ となる最小の N とそれを達成する g.

$g=(1,g_2,g_3,g_4)$ の場合

N	g	$\max_g \rho_4(N;g)$	$\leq[\sqrt[4]{4!\,N}]$	$\max_g \mathrm{eff}_4$
2	(1, 1, 1, 1)	2	2	1.6818
9	(1, 2, 3, 4)	3	3	1.7320
16	(1, 3, 5, 7)	4	4	2.0000
46	(1, 6, 16, 19)	5	5	1.9199
70	(1, 7, 25, 29)	6	6	2.0743
152	(1, 16, 28, 37)	7	7	1.9936

$\sqrt[4]{4!} \doteqdot 2.2134$

② 3次元より4次元において，4次元より5次元において，一般に効率が高い。

③ $g=(1,g,g^2,\cdots,g^{s-1})$ 型に対する下からの評価（定理1-17）によれば，素因数が少ないNの方が効率の良いgが存在し得るようであるが，実際には，必ずしもそうではない。

今，さらに，図2に，$s=4$, $2 \leqq N \leqq 173$ に対する $\underset{g=(1,g_2,g_3,g_4)}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_4(N;g)$ を，図3に，$s=5$, $2 \leqq N \leqq 76$ に対する $\underset{g=(1,g_2,g_3,g_4,g_5)}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_5(N;g)$ を記す。定理1-16によって得られる評価は $N \to \infty$ で

$$\underset{g=(1,g_2,g_3,g_4)}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_4(N;g) \geqq \sqrt[4]{\frac{4!}{2^3}\frac{1}{(1-\frac{1}{2^4})}} \fallingdotseq 1.3375$$

$$\underset{g=(1,g_2,g_3,g_4,g_5)}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_5(N;g) \geqq \sqrt[5]{\frac{5!}{2^4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2^5})}} \fallingdotseq 1.5058$$

である（図に記してある）。

表5（つづき）

$g=(1,g,g^2,g^3)$ の場合

N	g	$\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \rho_4(N;g)$	$\leqq [\sqrt[4]{4!N}]$	$\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_4$
2	(1, 1, 1, 1)	2	2	1.6818
11	(1, 5, 3, 4)	3	4	1.6473
16	(1. 5, 9, 13)	4	4	2.0000
57	(1, 26, 49, 20)	5	6	1.8197
80	(1, 37, 9, 13)	6	6	2.0062
191	(1, 68, 40, 46)	7	8	1.8830
226	(1, 95, 211, 157)	8	8	2.0633
435	(1, 191, 376, 41)	9	10	1.9707
562	(1, 221, 509, 89)	10	10	2.0538

$\sqrt[4]{4!} \fallingdotseq 2.2134$

表6. $\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \rho_5(N;g)=n\ (n=2,3,\cdots)$ となる最小のNとそれを達成するg.

$g=(1,g_2,g_3,g_4,g_5)$ の場合

N	g	$\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \rho_5(N;g)$	$\leqq [\sqrt[5]{5!N}]$	$\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_5$
2	(1, 1, 1, 1, 1)	2	2	1.7411
11	(1, 2, 3, 4, 5)	3	4	1.8571
20	(1, 3, 5, 7, 9)	4	4	2.1971
69	(1, 13, 22, 29, 32)	5	6	2.1439

$\sqrt[5]{5!} \fallingdotseq 2.6052$

$g=(1,g,g^2,g^3,g^4)$ の場合

N	g	$\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \rho_5(N;g)$	$\leqq [\sqrt[5]{5!N}]$	$\underset{g}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_5$
2	(1, 1, 1, 1, 1)	2	2	1.7411
11	(1. 5, 3, 4, 9)	3	4	1.8571
22	(1, 9, 15, 3, 5)	4	4	2.1556
71	(1, 25, 57, 5, 54)	5	6	2.1317
124	(1, 33, 97, 101, 109)	6	6	2.2288
363	(1, 161, 148, 233, 124)	7	8	2.1534

$\sqrt[5]{5!} \fallingdotseq 2.6052$

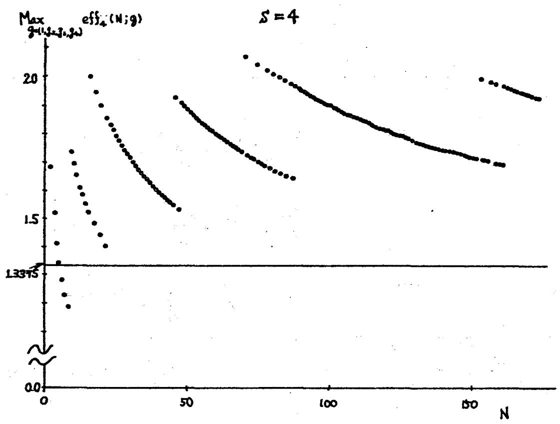


図2. 各Nに対する $\underset{\substack{g=(1,g_2,g_3,g_4)\\ g_2,g_3,g_4\in\mathbb{Z}}}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_4(N;g)$ の値.

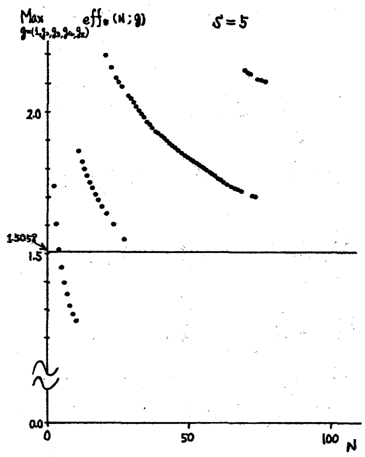


図3. 各Nに対する $\underset{\substack{g=(1,g_2,g_3,g_4,g_5)\\ g_2,g_3,g_4,g_5\in\mathbb{Z}}}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{eff}_5(N;g)$ の値.

図2,図3 より, 定理1-16の評価より, 実際にはかなり効率の良いgが存在することがわかる。なお, この表5,表6 は, 具体的に数値積分を行なおうとするには,不十分であるので, $\mathrm{Max}_g\ \rho_s(N;g)$ を求める算法の改良とともに表を拡充することを今後の課題としたい。

(iii) その他の $\rho_s(N;g)$ の性質

今までは, 次元数 s を固定して, Nとgが与えられた時に $\rho_s(N;g)$ がどのようになるかを見て来た. しかし, 逆に $\rho_s(N;g)$ がある値になるようなNとgを求めることも興味ある問題である. その時, $\rho_s(N;g)$ がある値になるようなNとgが次元数sの簡単な関数になることが望ましい. 次に述べる定理は, この問題の簡単な場合に対する解答である. つまり, $\rho_s(N;g)=2,3,4$

となるような N と g を簡単な s の関数として与えたものである.

定理 1-18

$$N=2,\quad g=(1,\cdots,1) \quad\Rightarrow\quad \rho_s(N;g)=2$$

$$N=2s+1,\quad g=(1,2,\cdots,s) \quad\Rightarrow\quad \rho_s(N;g)=3$$

$$N=4s,\quad g=(1,3,\cdots,2s-1) \quad\Rightarrow\quad \rho_s(N;g)=4$$

$\rho_s(N;g)\geqq 5$ に対しては, 今のところ, このような型の結果は得られていない。しかし, $\rho_s(N;g)\geqq 5$ に対応する N と g が s の簡単な関数になり得るかどうかは疑問である。

1.4.2 誤差評価 (問題2について)

次の定理が成立する. 但し, $\varepsilon_s(1,1)$ に対する誤差評価式を与える.

定理 1-19

$$|\text{誤差}| \leqq \sum_{\substack{h:\langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,N)\\ h\neq 0}} e^{-(|h_1|+\cdots+|h_s|)}$$

$$\leqq N_g\cdot \exp(-\rho_s(N;g)) + (C_s\cdot 3^s-N_g)\cdot \exp(-\rho_s(N;g)-1)$$

$$+\,C_s\cdot\left(\frac{(s+3)!}{6\cdot(1-r)^s}-3^s\right) r^3.$$

ここで, $r=\exp(-\frac{1}{2}\rho_s(N;g))$, $C_s\leqq \frac{(2s-1)!\,2^s}{(s-1)!\,s!}$

N_g: h に関する不定方程式 $\langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,N)$ の解 h で $|h_1|+\cdots+|h_s|=\rho_s(N;g)$ となる個数

1.4.3 まとめ

i). $\underset{g}{\mathrm{Max}}\,\rho_s(N;g)$ を求める算法の工夫を含めて, 表5, 6に対応する, N の大きな値に対する表の拡充が必要である.

ii) 数値実験によれば，定理1-19の誤差評価式第一項が誤差をよく近似する。

2. 複合化 good lattice points 法について

2.1 序論

(0.3)式で定義される複合化 good lattice points 法を，$CGL_s(N; p, g)$，$N=pn^s$（総分点数），$g=(g_1, g_2, \cdots, g_s)$ と略記する。

まず，数値積分公式 $CGL_s(N; p, g)$ を $\mathcal{E}_s(\beta, C)$ に属する関数 f に適用した時の誤差を見る。1.における誤差評価と同様にして，以下の式を得る。

$$
\begin{aligned}
|\text{誤差}| &= \left| \int_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{n^s}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_s=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{1}{n}\left(i_1+\frac{g_1}{p}k\right)\right\}, \cdots, \left\{\frac{1}{n}\left(i_s+\frac{g_s}{p}k\right)\right\}\right)\right)\right| \\
&= \left| c_0 - \frac{1}{n^s}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_s=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{h} c_h \exp\left(2\pi i \frac{1}{n}\left\langle \boldsymbol{i}+\frac{k}{p}g, h\right\rangle\right)\right)\right)\right| \\
&= \left| c_0 - \sum_{h} c_h \left(\frac{1}{n^s}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_s=1}^{n}\exp(2\pi i\langle \boldsymbol{i}, h\rangle)\right)\cdot\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\exp\left(2\pi i\frac{k}{p}\langle g, h\rangle\right)\right)\right| \\
&= \left| \sum_{\substack{h' : \langle h', g\rangle \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p) \\ h' \neq 0}} C_{nh'} \right| \\
&\leq C \sum_{\substack{h' : \langle h', g\rangle \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p) \\ h' \neq 0}} e^{-\beta n(|h_1|+\cdots+|h_s|)} .
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

今，good lattice points 法における ρ_s, eff_s の拡張として

$$
\rho_s(N; p, g) \equiv \min_{\substack{h' : \langle h', g\rangle \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p) \\ h' \neq 0}} \left(n(|h_1|+\cdots+|h_s|)\right)
$$

$$\mathrm{eff}_s(N;p,g) \overset{d}{\equiv} \rho_s(N;p,g)/\sqrt[s]{N}$$

を導入する。すると，1.の場合と同様に

$$\begin{aligned}|誤差| &\sim O(e^{-\beta\,\rho_s(N;p,g)}) \\ &\sim O(e^{-\beta\cdot \mathrm{eff}_s(N;p,g)\cdot\sqrt[s]{N}})\end{aligned} \qquad (2.2)$$

なる評価式が得られる。ところが容易にわかるように $\rho_s(N;p,g) = n\cdot\rho_s(p;g)$，$\mathrm{eff}_s(N;p,g)=\mathrm{eff}_s(p;g)$ であるから，上評価式(2.2)は次のようになる。

$$\begin{aligned}|誤差| &\sim O(e^{-\beta\cdot n\cdot\rho_s(p;g)}) \\ &\sim O(e^{-\beta\cdot \mathrm{eff}_s(p;g)\cdot\sqrt[s]{N}}).\end{aligned} \qquad (2.3)$$

従って，複合化 good lattice points 法の誤差に関する問題は，次の2つの問題に帰着されることになる。

問題1.　$\rho_s(p;g)$の性質を知ること。

(特に，数値積分を行なう場合，多くの分点数Nに対して，数値結果が得られることが望ましい。従って，pが小さいところでの性質が重要である)

問題2.　$\rho_s(p;g)$が与えられたとして，(2.3)の評価を正確に行なうこと。

しかし，これらの問題は，すでに，本質的に，1.で解決済みであり，その1.の知識を用いることによって，効率の良い複合化 good lattice points 法を求めることができる。つまり，問題1については，1.では不幸にして小さなpに対してしか得られなかった$\rho_s(p;g)$の性質をそのまま使用すれば良し，また，問題2については，誤差評価式(2.1)と1.の誤差評価式

(1.1) を見比べれば，わかるように good lattice points 法の誤差評価に対する定理で $e^{-\beta\cdots}$ の部分を $e^{-\beta n\cdots}$ に変換すればよい。

2.2 有効な複合化 good lattice points 法

2.1 における考察から，有効と思われる複合化 good lattice points 法を，以下，列挙する（それらを $\mathcal{E}_s(\beta, C)$ に適用した時の誤差評価も与える）.
$\| \; N_g \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot eff \cdot \sqrt[s]{N}}$

$S=2$.

$CGL_2(2n^2; 2, (1,1))$, $|$誤差$| \doteqdot 8 \cdot C \cdot e^{-\beta 2n} = 8 C e^{-\beta\sqrt{2N}}$

$CGL_2(8n^2; 8, (1,3))$, $|$誤差$| \doteqdot 6 \cdot C \cdot e^{-\beta 4n} = 6 C e^{-\beta\sqrt{2N}}$

$S=3$.

$CGL_3(38n^3; 38, (1,7,11))$, $|$誤差$| \doteqdot 14 \cdot C \cdot e^{-\beta 6n} \doteqdot 14 \cdot C\, e^{-\beta \cdot 1.7847 \cdot \sqrt[3]{N}}$

$CGL_3(12n^3; 12, (1,3,5))$, $|$誤差$| \doteqdot 16 \cdot C \cdot e^{-\beta 4n} \doteqdot 16 \cdot C\, e^{-\beta \cdot 1.7472 \cdot \sqrt[3]{N}}$

$S=4$.

$CGL_4(16n^4; 16, (1,3,5,7))$, $|$誤差$| \doteqdot 32 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 4n} \doteqdot 32 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{N}}$

$S=5$

$CGL_5(20n^5; 20, (1,3,5,7,9))$, $|$誤差$| \doteqdot 58 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 4n} \doteqdot 58 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 2.1971 \cdot \sqrt[5]{N}}$

ここで，$S=3$ の場合，$CGL_3(38n^3; 38, (1,7,11))$ が効率最大の数値積分公式列を与えていることは，注目に値する。2.1で述べたように，もし効率の良い p と g があれば，それを複合化することによって，それと同じ効率をもつ数値積分公式列が得られるのである。その意味で，複合化 good lattice points 法は，good lattice points 法より優れているといえる．

次に，上記の複合化 good lattice points 法を，具体的関数

$$f(x)=\sum_{h} e^{-(|h_1|+\cdots+|h_s|)}e^{2\pi i\langle h,x\rangle}=\prod_{j=1}^{s}\frac{e^2-1}{e^2-2e\cdot\cos(2\pi x_j)+1}$$

に適用した時の数値積分誤差を示す．ただし，紙数の関係で $s=3$ の場合のみを記す（表7，図4）．

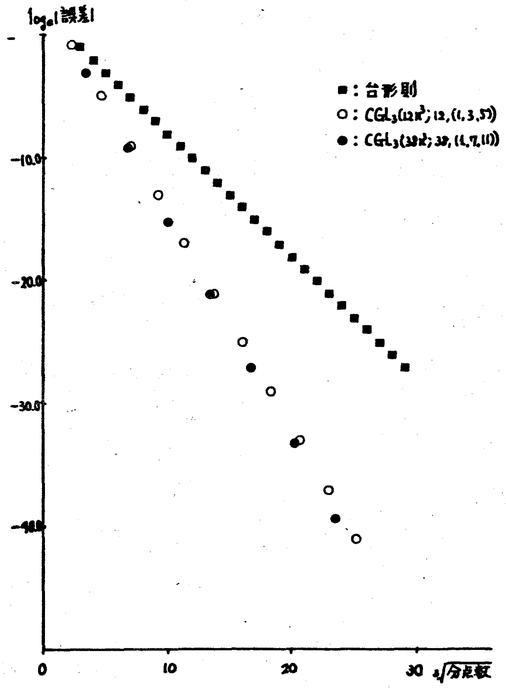


図4 台形則，$CGL_3(12n^3;12,(1,3,5))$，$CGL_3(38n^3;38,(1,7,11))$を関数 $\prod_{j=1}^{3}\frac{e^2-1}{e^2-2e\cdot\cos(2\pi x_j)+1}$ に適用した時の誤差．

表7. $CGL_3(38n^3;38,(1,7,11))$ と $CGL_3(12n^3;12,(1,3,5))$ を関数 $\prod_{j=1}^{3}\frac{e^2-1}{e^2-2e\cdot\cos(2\pi x_j)+1}$ に適用した時の誤差

• $CGL_3(38n^3;38,(1,7,11))$ の場合

n	$N=38n^3$	$-\log_{10}$|誤差|	$-\log_e$|誤差|	$-\log_e 4+6n$
1	38	1.400	3.224	3.361
2	304	4.058	9.345	9.361
3	1026	6.670	15.359	15.361
4	2432	9.277	21.361	21.361
5	4750	11.883	27.361	27.361
6	8208	14.488	33.361	33.361
7	13034	17.094	39.361	39.361

• $CGL_3(12n^3;12,(1,3,5))$ の場合

n	$N=12n^3$	$-\log_{10}$|誤差|	$-\log_e$|誤差|	$-\log_e 6+4n$
1	12	0.446	1.026	1.227
2	96	2.261	5.206	5.227
3	324	4.006	9.225	9.227
4	768	5.744	13.227	13.227
5	1500	7.482	17.227	17.227
6	2592	9.219	21.227	21.227
7	4116	10.956	25.227	25.227
8	6144	12.693	29.227	29.227
9	8748	14.430	33.227	33.227
10	12000	16.168	37.227	37.227
11	15972	17.905	41.227	41.227

この表および図より，前記の誤差評価式の近似度が非常に良いことがわかる．なお，これは，次元に関係なく成立することであることが他の数値実験からわかる．

2.3 まとめ

複合化 good lattice points 法としては，2.2 にあげたものを用いれば良く．その時の誤差は，$C\cdot N_g\cdot e^{-\beta\cdot eff_s(p:g)\cdot s\sqrt{N}}$ でよく近似される。

3. Good lattice points 法と複合化 good lattice points 法のまとめ

実用的観点からすると，多くの分点数Nに対して数値結果が得られることが望ましい．この観点，および，効率が高い方が良いという観点を考慮に入れて，有効な数値積分公式を決定すると，下の表8のようになる。

表8. $E_s(\beta, C)$ に対する有効な数値積分公式

次元 \ 公式	Good lattice points 法	複合化 good lattice points 法	実用上最も有効な数値積分公式
$S=2$	$GL_2(2n^2;(1,2n-1))$	$CGL_2(2n^2;2,(1,1))$ $CGL_2(8n^2;8,(1,3))$	$CGL_2(2n^2;2,(1,1))$
$S=3$	×	$CGL_3(12n^3;12,(1,3,5))$ $CGL_3(38n^3;38,(1,7,11))$	$CGL_3(12n^3;12,(1,3,5))$
$S=\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}$	×	$CGL_4(16n^4;16,(1,3,5,7))$ $CGL_5(20n^5;20,(1,3,5,7,9))$	$CGL_4(16n^4;16,(1,3,5,7))$ $CGL_5(20n^5;20,(1,3,5,7,9))$

×：結果が得られていないことを示す．

4. 数値積分公式の誤差の下限

主要な結果は，次の定理である．

定理 4-1

ある数値積分公式列（分点 $x^{N,j}$, weight $w_{N,j}$）が存在して，任意の $f \in \mathcal{E}_s(\beta, C)$ に対して

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N} w_{N,j}\, f(x^{N,j}) \right| \leqq M_f \cdot \xi(N) \cdot e^{-\beta\cdot\sqrt[s]{s!N}},$$

ここで，M_f は f によって定まる定数，$\{\xi(N)\}_{N=1}^{\infty}$ は 0 へ収束する正数列，

となることはない．つまり，誤差は，$e^{-\beta\cdot\sqrt[s]{s!N}}$ より速くは 0 になり得ない．

この定理により，各次元ごとに，1.～3. で得られた数値積分公式に対する評価ができる．

(i) $s=1$．

N 点台形則を $f \in \mathcal{E}_1(\beta, C)$ に適用した時の誤差は $\frac{2C}{1-e^{\beta N}} \cdot e^{\beta N}$ 以下であり，定理 4-1 より，これをこれ以上改良することはできない．従って，台形則は，定数倍を除いて最良である．

(ii) $s=2$．

定理 4-1 より，定数倍を除いて，$e^{-\beta\sqrt{2N}}$ より誤差を改良することはできない．これは，$\mathrm{eff}_2(N;g)=\sqrt{2}$ となるような N と g の系列をもつ good lattice points 法，および，$\mathrm{eff}_2(N;p,g)=\sqrt{2}$ となるような複合化 good lattice points 法によって達成される．従って，3. で $\mathcal{E}_2(\beta, C)$ に対する実用上最も有効な公式とした $CGL_2(2n^2; 2, (1,1))$ も定

数倍を除いて最良である。

iii) $s \geqq 3$.

定理4-1の結果と、1.〜3.で得られた結果とには、本質的な開きがある。従って、今後、数値積分公式の研究、および誤差の下限に対する研究によって、その開きを縮める必要がある。

なお、この定理4.1を用いて、周期的解析関数の空間における数値積分誤差の下限に対する評価もできる([1]参照)。

5. IMT型二重指数変数変換を適用した多変数解析関数の数値積分

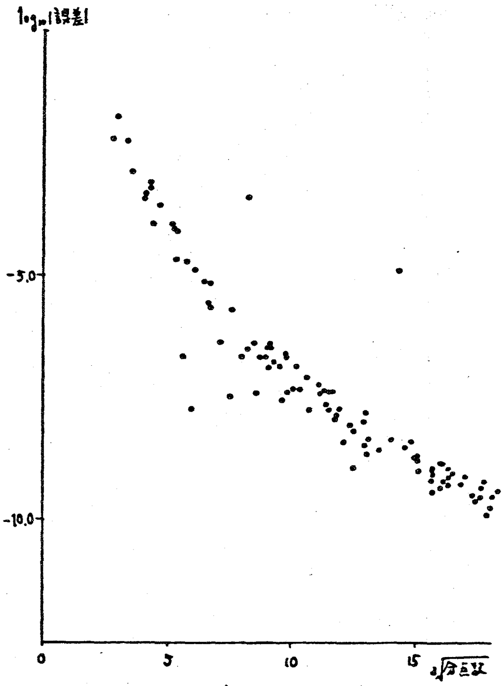
積分 $\int_{[0,1]^s} f(x)\,dx$ において被積分関数が $[0,1]^s$ で解析的である時、積分変数を次の変換

$$x_j = \frac{1}{2}\tanh\left(A\sinh\left(B\left(-\frac{1}{y_j}+\frac{1}{1-y_j}\right)\right)\right)+\frac{1}{2} \quad (\equiv \varphi(y_j)) \tag{5.1}$$

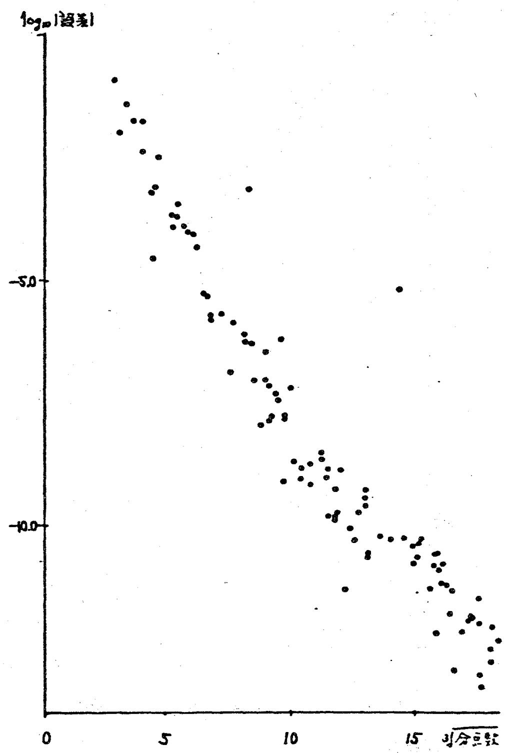
で変換すると、被積分関数 $f(\varphi(y_1),\cdots,\varphi(y_s))\cdot\varphi_1'(y_1)\cdots\varphi_s'(y_s)$ は、$E_s(\beta,C)$ の元と近似的に考えられる。そこで、ここでは、具体例を通して、上記のようなIMT型二重指数変数変換を適用した多変数解析関数の積分への、$E_s(\beta,C)$ に対して有効であるとして得られた公式の適用可能性を調べることにする。

変数変換を具体的に行なうにあたって、(5.1)式の中のA,Bは、関数1に対し変数変換を行なった被積分関数に、$CGL_2(2\cdot16^2; 2,(1,1))$、および、分点数23($\fallingdotseq\sqrt{2\cdot16^2}$)の一次元台形則を適用した時、数値積分誤差が小さくなった値とした。具体的には $A=3.75$, $B=0.4$ である。

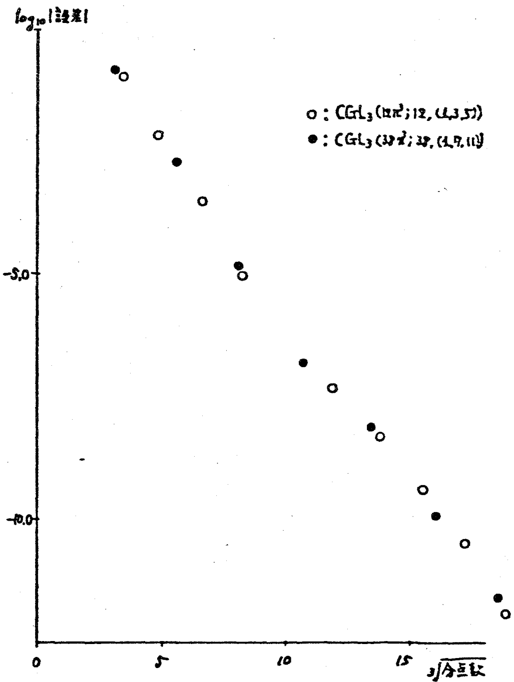
図5に，関数 $\exp(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$ の場合に，多項式変換を行なって good lattice points 法（Zaremba 等が与えたパラメータを使う）を適用した時の誤差と，IMT型二重指数変換を行なって $CGL_3(12n^3; 12, (1,3,5))$，$CGL_3(38n^3; 38, (1,7,11))$ を適用した時の誤差を示す．図6は，関数値の変化の激しい関数 $\prod_{j=1}^{3} 0.11/(0.1+x_j)^2$ について図5と同じことを行なった結果である．これらの図から，IMT型二重指数変換を行なって複合化 good lattice points 法を適用する方法は，被積分関数が積分領域の端点に代数的特異性，もしくは，それに近い性質をもつとき有効であることがわかる．しかし，特異性を有さない関数に対しては，多項式変換を行なって good lattice points 法を適用する方が有効である．従って，端点特異性をもつような関数に対する積分にこの方法を使うべきである．また，図7に，関数 $\prod_{j=1}^{5} 0.11/(0.1+x_j)^2$ にIMT型二重指数変換を行なって，$E_s(\beta, C)$ に対して有効であるとされた公式（3.参照）を適用した時の誤差を示す．この図より，次元があがるにつれて効率があがるのがみてとれる．



i) 3次の多項式変換

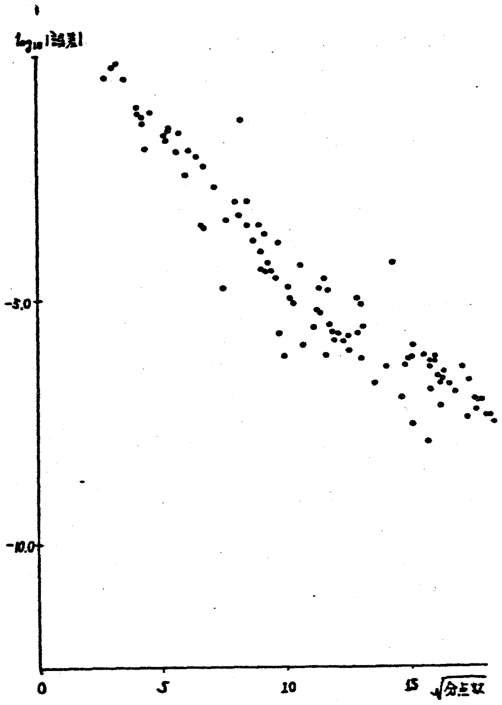


ii) 5次の多項式変換

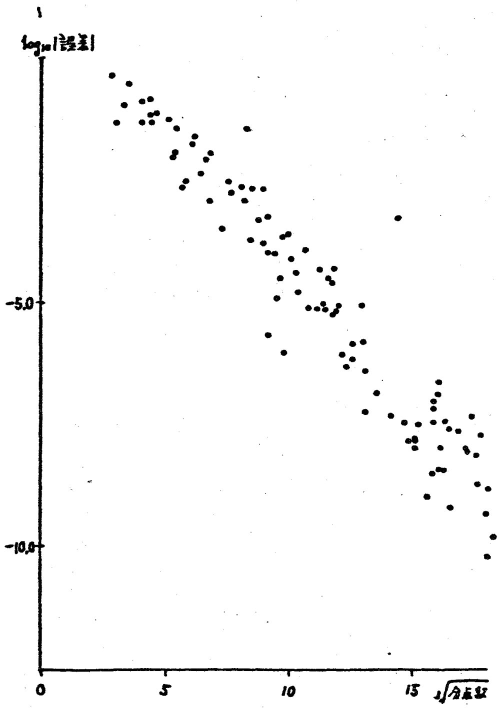


iii) IMT型二重指数変換

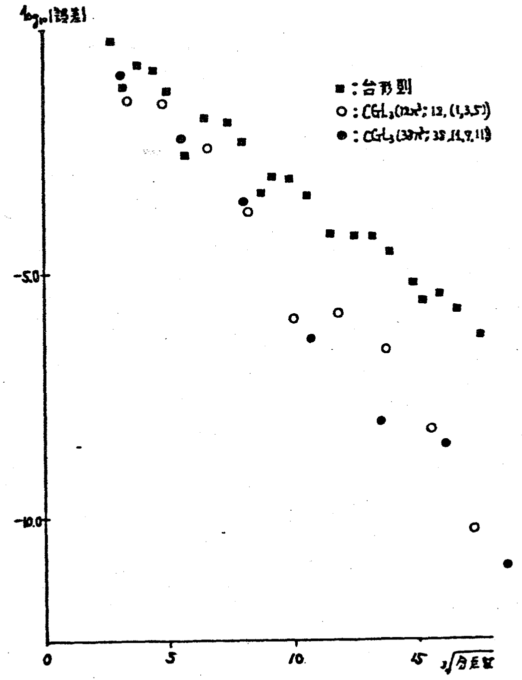
図5. 関数 $\exp(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$ に多項式変換を施して good lattice points 法（Zaremba 等によるパラメータを使用）を適用した結果と IMT型二重指数変換を適用して $CGL_3(12n^3; 12, (1,3,5))$, $CGL_3(38n^3; 38, (1,7,11))$ を行なった結果の比較.



(i) 3次の多項式変換



(ii) 5次の多項式変換.



(iii) IMT型二重指数変換

図 6. 関数 $\prod_{j=1}^{3} 0.11/(0.1+x_j)^2$ に多項式変換を行なって good lattice points法 (Zaremba等によるパラメータを使用)を適用した結果とIMT型二重指数変換を行なって CGL$_3$(12n^3; 12, (1, 3, 5)), CGL$_3$(38n^3; 38, (1, 7, 11)) を適用した結果の比較.

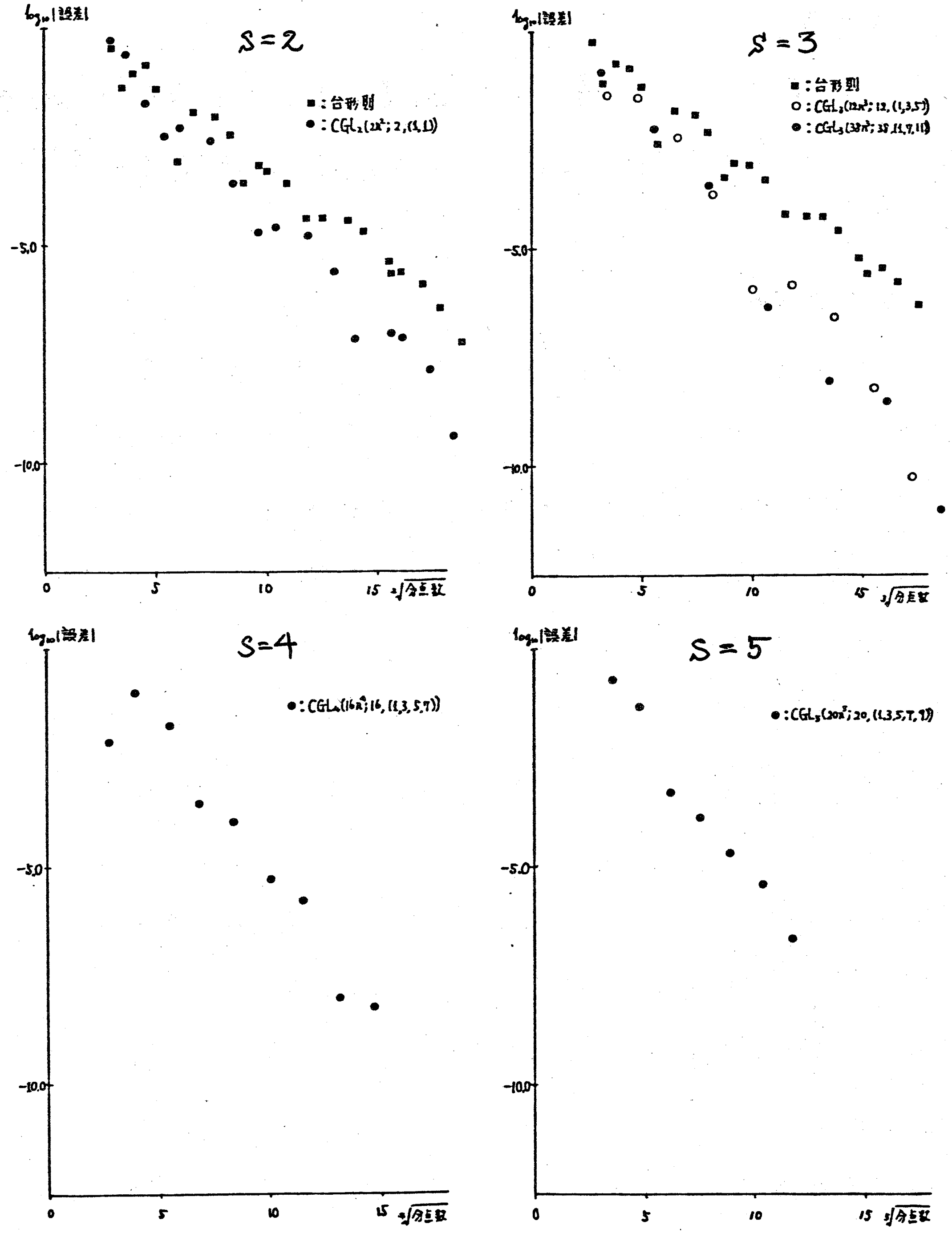


図7. 関数 $\prod_{j=1}^{s} 0.11/(0.1+x_j)^2$ に IMT型二重指数変換を行なって、$E_s(\beta, C)$ に対して有効とされた公式を適用した結果（誤差）.

6. まとめ

ここでは，1.～5. で得られた結果のまとめを行なう。結果は次元ごとで異なるので，1次元，2次元，3次元，4.5次元の場合に分けて述べる．

(i) 1次元の場合

$\mathcal{E}_1(\beta, C)$に対する公式としては，台形則がその誤差を，定数倍を除いて，それ以上改良出来ないという意味で最良である．

IMT型二重指数変換を適用して台形則を用いることについては，高橋・森の研究により，その有効性が示されている．

(ii) 2次元の場合

$\mathcal{E}_2(\beta, C)$に対する実用的見地から有効な公式は $CGL_2(2n^2; 2, (1,1))$であり，その誤差は $8 \cdot C \cdot e^{-\beta\sqrt{2N}}$ $(N=2n^2)$で近似される．また，その $CGL_2(2n^2; 2, (1,1))$ は台形則と同様に，その誤差が定数倍を除いて改良出来ないという意味で最良である．

IMT型二重指数変換を適用して，$CGL_2(2n^2; 2, (1,1))$を用いる方法は，積分領域の端点に特異性があるような関数に対して有効である．

(iii) 3次元の場合

$\mathcal{E}_3(\beta, C)$に対する公式の中で，最も効率の良いものは $CGL_3(38n^3; 38, (1,7,11))$である．そして，その時の誤差 $O(e^{-\beta\sqrt[3]{\frac{108}{19}N}})$，$(N=38n^3)$と任意の積分公式を考慮した時の誤差の下限 $O(e^{-\beta\sqrt[3]{6N}})$との

間には，指数部に差がある．実用上は，$CGL_3(38n^3; 38, (1,7,11))$ と，実用範囲（$\sqrt[3]{分点数} \leqq 20$）で，ほとんど差のない $CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$ が有効と思われる．その誤差は $C \cdot 16 \cdot e^{-4\beta n}$ で近似できる。

IMT型二重指数変換を適用して，$CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$ を用いる方法は，2次元の場合と同様に，関数が積分領域の端点に特異性をもつときに有効である．

(iv) 4.5次元の場合．

good lattice points 法，複合化 good lattice points 法ともに，効率最大となる場合はわかっておらず，現状では，4次元は $CGL_4(16n^4; 16, (1,3,5,7))$（誤差は $C \cdot 32 \cdot e^{-4\beta n}$ で近似できる），5次元では $CGL_5(20n^5; 20, (1,3,5,7,9))$（誤差は $C \cdot 38 \cdot e^{-4\beta n}$ で近似できる）が有効と思われる．これらの公式の生成する誤差と，誤差の下限，4次元では $O(e^{-\beta \cdot \sqrt[4]{4!N}})$，5次元では $O(e^{-\beta \cdot \sqrt[5]{5!N}})$ との間にはかなりの開きがある．

IMT型二重指数変換を適用して，これらの公式を用いる方法は，積分領域の端点に特異性をもつような関数に対して有効である．

参考文献

[1] 杉原正顯：準モンテカルロ法に関する研究．東京大学大学院工学系研究科博士論文，1982．

[2] L.K Hua and Y. Wang: Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer-Verlag, Beijing, 1981.