

Subring of an affine domain

阪大 理 小野田 信春 (Nobuharu Onoda)

吉田 寛一 (Ken-ichi Yoshida)

ここでは、ネーター的可換環 D を \rightarrow 定め、 D 上有限生成な環 A と、 A の部分 D -環 R について、次の問題を考えます。

R はどんな条件のもとで、再び D 上有限生成となり得るのか？

この問題の発端は Hilbert 14 問題との関連から出たわけですが、Hilbert 14 問題は、御存知のように反例があり、否定的に解決を見たわけですが、どのような十分条件があるかという点、あまり良くは知られていないわけですが。現在は作用する群に条件を与えるという立場で研究が続けられておられる人がいますが、私達は、 A の部分環 R にかゝる条件があればよいかという立場をとり、一応 Hilbert 14 問題から少し離れて、アフィン環の部分環が再びアフィン環となる

るための特徴づけを行なって見ました。実際問題としては、 R がネーター的であることを求めた事は、 R がアフィンである事を求めた事とさして変わりぬ程難かしいのでしようが、一つの D 上有限生成となるための特徴づけを得たとおもうのです。

§1. 今までに知られている幾つかの結果

始めに、Hilbert 14問題をここで述べておきましょう。

D はこの場合体長で、 A は長上の多変数多項式環、 L を A の商体の部分体として、 $R = A \cap L$ 、このとき、 R は長上有限生成か？ というものです。この形で述べたのは、O. Zariski先生だと聞いています。元来は、 L が $Q(A)$ のある群 G の不変部分体、従って R が A の不変部分環に属している場合で、従って、Hilbert 14問題は不変式論との関係が密接にあり、実際は、可換環の出生の一つの源流でもあったとおもうのです。

ところで、この問題は永田雅宜さん、そして Rees さんによって反例が作り上げられました。講演では、せっかく Rees さんに関してもう、ていながら、Rees さんの反例を紹介する事が出来ず、残念でした。気がきかるか、たわけですが、さてこの反例を詳しく述べる事はここでの本筋ではありませぬから省略しますが、 R が正規(ネーター的整域)であつても

答えは No! でありまして、後との関連で今から言うのは
 石人ですが、ネ-グ-的であるが *equi-dimension* である例も存
 在します。

肯定的な話に移りましょう。次は Zariski 先生の結果
 です。

R を正規環で、 $\text{tr. deg}_k R = 2$ 、 $\gamma \in R$ の高々 1
 の素イデアル \mathfrak{p} が、 $\text{tr. deg}_k R/\mathfrak{p} = 1$ であれば、 R は k
 上有限生成。

次は 永田-大塚さんの結果で、

D をネ-グ-整域で、 D 上の正規局所域 (D 上有限生成
 から正規石環による局所化環) は解析的に既約 (完備化環が
 整域) とする。 A が正規で、 $R = A \cap \mathcal{Q}(R)$ とする、 γ とい
 えば、今 $\text{Spec } A \longrightarrow \text{Spec } R$ が上への写像のとき、 R は D 上
 有限生成である。

もう一つ 永田さんの結果、

R は A の部分環で、*strongly submersive* とすれば、 R
 は D 上有限生成である。

§2. *main theorem* のための準備。

定義; R は D -algebra とする。 I を R の素イデアルで、
 $\mathfrak{p} = I \cap D$ とおく。 I が「次元公式」を満たすとは、

$$\text{ht } P + \text{tr. deg}_{k(S)} k(P) = \text{ht } J + \text{tr. deg}_D R$$

が成り立つことである, ここで, $k(S)$ は S の剰余体.

そして, D と R が次元公式を満たすとは, D の任意の素イデアル P が次元公式を満たす事と定めた. 特に, D が体長の場合は, k と R が次元公式を満たす事と, R が equi-dimensional である事は同じである. D 上有限生成な環と, 次元公式についてはいま知られている.

命題 1. (i) D が locally quasi-unmixed であるならば, D 上有限生成な環 A は D 上で次元公式を満たす.

(ii) T を local domain とする. 今 T が k 上の locality によって支配されているならば,

$$\dim T + \text{tr. deg}_k k(M) = \text{tr. deg}_k T, \quad \text{ここで } M \text{ は}$$

T の極大イデアル. 従って, $\text{Spec } R$ がある k -アフィン環の surjective image になっているならば, R は equi-dimensional である.

§ 3. main theorem

定理 A. D は pseudo-geometric ring で 次の条件 (c) を満たす,

(c) D 上の正規局所域は解析的に既約。

R を A の部分 D -環とす。このとき次は同値,

(1) R は D 上有限生成;

(2) R は局所的ネータ環で, R の極小イデアル \mathcal{P} に対して, $(D/\mathcal{P}_D R)'$ と $(R/\mathcal{P})'$ は次元公式を満たす, ここで $(\)'$ はそれぞれの商体の中での整閉包である。

上で, 特に D が体場であれば,

系 R は体場を含む局所的ネータ整域で, R はある k -アフィン環に含まれるとす。このとき, R' が equi-dimensional であれば, R は k -アフィンである。

§ 4. Examples

始めに正規環で equi-dimensional である例を示す。これは Heinger に依る。

x, y を形式的中級数環 $k[[t]]$ の 2 つの元として, order $\nu(x) = \nu(y)$ が, x と y は k 上代数的独立なもの

とする。 $V = k[[t]] \cap k(x, y)$ とおく、 V は $k(x, y)$ の discrete 値環である。 $R = V \cap k[x, \frac{1}{y}]$ とおくと、 R は $k[x, \frac{1}{y}]$ の 2次元正規的な部分環である。 しかし R は equi-dimensional ではない。 これは、 M を V の 極大イデアルとして、 $m = R \cap M$ とおけば、 $\text{ht } m = 1$ であり、 m は R の 極大イデアルである。 R は 無論 アフィン環ではない。

次にこの R を利用して、ネーター的かつ equi-dimensional であるが、アフィンでないものを作ろう。 これは先の系で、 R' が equi-dimension である条件を R が equi-dimension である条件に弱められたいという一つの例にもなっている。

$n = (x, \frac{1}{y} - 1) k[x, \frac{1}{y}] \cap R$ とおく。 $\text{ht } n = 2$ であり、 n は R の 極大イデアル、 $\tilde{R} := \{ f \in R \mid f(m) = f(n) \}$ とおく、ここで $f(m), f(n)$ はそれぞれ f の m, n での剰余類である。 \tilde{R} は m, n を gluing して得られたものと言ってもよい。 このとき R は finite \tilde{R} -module であるから \tilde{R} はネーター的であり、かつ $n \cap \tilde{R} = \tilde{n}$ とおくと、 $\text{ht } \tilde{n} = 2$ である。 これから \tilde{R} は equi-dimensional であり、しかし \tilde{R} は アフィン環ではない。 これは、次から出る。

補題 2. D は pseudo-geometric ring とする。 このとき、 R の 整閉包 R' が D 上有限生成であれば、 R は

D 上有限生成である, \times 逆も成り立つ。

以上の例によつて我々の得た定理 A はこの方向での結果として *best possible* であると思ふ。例として述べた環 R は Hilbert 14 問題の反例にはなっていないが, Hilbert 14 問題の設定の元でも, 定理 A はこれ以上条件を弱める事は出来ないことになってゐる。

§ 5. 証明の概略.

詳しい証明は [ONODA] を見て欲しい, $D = \text{体}$ の場合であれば [ONODA-YOSHIDA] が短く書かれてゐる, 前者は後者の相対的な結果を目ざして書いたものであるが, 基本的なアイデアは後者を見てもうえれば良かったとおもいます。

次の定義と, それに関する諸性質がこの証明の中心となるものである。

定義: $A_D(R) = \{a \in R \mid a \neq 0, R_a \text{ は } D \text{ 上有限生成}\} \cup \{0\}$.

ここで R_n は $\{a^n \mid n > 0\}$ に関する商環。

命題 3. (i) $A_D(R)$ は R の根基イデアル。

(ii) R が D 上有限生成な環の部分環に入るときは,

$A_D(R)$ は *non zero-divisor* を含む, \times 逆も成立。

(iii) $A_D(R)$ が non-zero divisor を含むと仮定する。 R の素イデアル \mathfrak{p} に対して、 $\mathfrak{p} \not\subset A_D(R)$ であることと、 $R_{\mathfrak{p}}$ が D 上の *locality* であることは同値、従って、

(iv) R が D 上有限生成であるためには、 R の極大イデアル M に対して、 R_M が D 上の *locality* である事が必要充分。

これから、我々の問題は局所的な次の問題； $R_{\mathfrak{p}}$ は D 上の *locality* に存するのか？ になった。 これに対する、一つの答えとして、次の結果を得た。

補題 4. D は pseudo-geometric domain で条件 (C) を満たすとする。 R を D を含む整域で、 $A_D(R) \neq (0)$ とする。
 D' , R' をそれぞれ D , R の整閉包として、 R' の素イデアル P' が D' 上に次元公式を満たし、 $R'_{P'}$ がネーター的であれば、 $R'_{P'}$ は D 上の *locality*。

この証明は Zariski's Main Theorem (Z.M.T) を使って得られたのである。 参考のため、Z.M.T を述べておこう。

Zariski's Main Theorem (永田, local Ring 37.4)

正規局所環 (R, \mathfrak{m}) は解析的既約と仮定する。 K を R の商体とする。局所環 (R', \mathfrak{m}') が次の3つの条件を満たすとする。

- (i) $R \leq R' \subset K$
- (ii) $R'/\mathfrak{m}R'$ は有限 \mathbb{F}_m -加群
- (iii) $\dim R' = \dim R$ 。

このとき、 $R = R'$ 。

なお講演中 Rees さんから、上の形で述べた Z.M.T は Peskine に依りて改良されたので、それを使ったら条件 (C) が除けるのではなかとの御指摘を受けました。Peskine の形での Z.M.T. は適用出来ぬことが分かりました。

以上の結果を使って、定理 A の証明の概略を述べよう。

まず R が整域の場合に証明すればよいことを言って、補題 2 から、 R の整閉包 R' が D 上有限生成である事を示せばよい。そこで命題 3 から局所的な問題に変わり、 R' の(極大)イデアル \mathfrak{p}' に対して、 $R'_{\mathfrak{p}'}$ が D 上 *locality* であればよい、これは補題 4 によって、条件 (C) のもとでは次元公式を満たせば $R'_{\mathfrak{p}'}$ は D 上 *locality* と合するので、よって我々の証明が

完成す了。

最後に D 上有限生成な環に支配されれば、 D 上有限生成となるよと... 次の結果を述べたおこし。

定理 B. D を pseudo-geometric domain で条件 (c) を満たすものとする。 R は D を含む環で、 $A_D(R) \neq (0)$ とす。 R は 局所ネーター的で、 R の 整閉包 R' が、 R' の 各極大イデアル M' に対して、 R' 上の locality S で、 $R'_{M'}$ を支配し、 D 上次元公式を満足するものがあるならば、 R は D 上有限生成。

この系として、

系 R は 正規環として、 R を含む D 上有限生成な環 A があって、 $\text{Spec } A \longrightarrow \text{Spec } R$ が surjective であるならば、 R は D 上有限生成である。

上の結果は次元公式を満たす環に支配されれば、次元公式を満たすよと... でおもう、 \times 系については、 R が正規である時、 \times ねに $A_D(R) A = A$ が成り立つのであす。

これは アフィンに支配されれば、 \times アフィンに有すよと... 事であす。

直接的には次元公式が成立する...の事だ、次も成り立つ。

定理 C. D の条件は前と同じとする。ここでは更に、 $0 \neq a \in D$ に対して、 $\dim D[\frac{1}{a}] = \dim D$ を仮定する。このとき、 R が局所ネーター的で、 R' が *equi-dimension* であれば、 R は D 上有限生成である。

REFERENCES

- [1] M. Nagata, A theorem on finite generation of a ring, Nagoya Math. J. 27(1966), 193-205.
- [2] M. Nagata and K. Otsuka, Some remarks on the 14th problem of Hilbert, J. Math. Kyoto Univ. 5(1965), 61-66.
- [3] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, to appear.
- [4] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, Hiroshima Math. J. 12(1982), 377-384.