数理解析研究所講究録
第 485 巻 1983 年 23-28

Gedanken Experiments on Linear Representation Systems

名古屋大学 工学部 松尾 強 (Tsuyoshi Matsuo)

1. はじめに

Kalman[1]等による有限次元線形系の実現理論の完成により，最近は非線形系の実現理論が展開されている．特に著者等は非線形の一種である線形表現系を導入し，それが非線形系の実現に適していることを示した[2,3,4]。又，線形系と同様に，線形表現系の部分実現理論を展開した[5]。これらの実現理論は，対象に対し多重実験が可能であり，理想的入出力データが与えられるときのみ意味を持つ。本論文では，対象に対し一重実験のみが許される場合，例えば運転状況にあるプラントに対する場合，一つの入出力実験データから，そのプラントを真に再生するという実時間部分実現問題に対する主定理を与える．この定理はMooreの強連結シーケンシャル・マシーンが単一実験により同定できるという定理[6]に対応している。

2. 線形表現系

入力値集合Uを有限集合，すなわち，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ とする。又，出力は1変数，すなわち，出力値集合はある体Kとする。

（2.1） 定義. XをK上の線形空間，$F: U\to L(X,X)$，$x^0\in X$，$h\in L(X,K)$ とする。この時，組 $\sigma=((X,F),x^0,h)$ は線形表現系と云われ，その系方程式は

$$\begin{cases} x(0)=x^0\\ x(t+1)=F(\omega(t+1))x(t)\\ y(t)=hx(t)\end{cases}$$

である。ただし，$t=0,1,\cdots$，$\omega(t)\in U$，$x(t)\in X$，$y(t)\in K$ である。

σに対しモノイド射 $\phi: U^*\to L(X,X)$ を

$$\phi(u^n\cdots u^1)=F(u^n)\cdots F(u^1),\quad u^n\cdots u^1\in U^*$$

で与える。ただし U^* はUから生成される自由モノイド。

σの行動は入力応答関数 $a_\sigma: U^*\to K;\ \omega\mapsto h\phi(\omega)x^0$ であり，σはa_σを実現すると云う。

集合 $\{\phi(\omega)x^0;\ \omega\in U^*\}$ の線形包がXのときσは擬可到達，$h\phi(\omega)x=0\ \forall\omega\in U^*$ ならば $x=0$ が成立するときσは可識別，擬可到達で可識別なσは正準であると云われる。

$\sigma_1=((X_1,F_1),x_1^0,h_1)$，$\sigma_2=((X_2,F_2),x_2^0,h_2)$ を線形表

現系とする。線形写像 $f: X_1 \to X_2$ は関係 $fF_1(u)=F_2(u)f$, $\forall u \in U$, $fx_1^0 = x_2^0$, $h_2 f = h_1$ を満すとき, 線形表現系射 $f: \sigma_1 \to \sigma_2$ と云われる。$f: X_1 \to X_2$ が全単射のとき $f: \sigma_1 \to \sigma_2$ は同型射といわれる。

3、実現定理

（3.1） 定理. どんな入力応答関数 $a: U^* \to K$ に対しても, それを実現する正準線形表現系が同型を除いて唯一つ必ず存在する。

（3.2） 定理. 入力応答関数 $a: U^* \to K$ の Hankel 行列を

$$H_a = \begin{array}{c c} & \omega_1 \\ \omega_2 & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a(\omega_2\omega_1) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

とする。a が n 次元（有限次元）正準線形表現系の行動であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} H_a = n$ （有限）である。

4. 実時間部分実現

線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ とある入力系列 $\omega = u^n \cdots u^1 \in U^*$ に対し, 写像

$$a_\sigma : [0, |\omega|] \to K \;;\; m \mapsto h\phi(u^m \cdots u^1)x^0$$

はσのωに対する出力系列（実験データ）といわれる。ただし，$0 \leq m \leq |\omega|$.

逆に，与えられた入力系列ωと実験データ$\gamma : [0, |\omega|] \to K$（入出力データ$(\omega, \gamma)$）に対し，$h\phi(u^m \cdots u^1)x^0 = \gamma(m)$, $0 \leq m \leq |\omega|$ を満す線形表現系σは入出力データ(ω, γ)を部分実現すると云われる。

任意の入出力データ(ω, γ)を実現する有限次元線形表現系は必ず存在する。したがって，その中で最小次元のもの，すなわち，(ω, γ)の最小部分実現系が存在する。それは正準ではあるが，同型を除いた意味でさえも，それらは一般に一意ではない。一意性が云えなければ，それらが真にプラントを記述すると主張することはできない。

(4.1) 命題.　プラントが有限次元線形表現系$\sigma_t = ((X, F), x^0, h)$で記述され，$F(u)$, $u \in U$ が全単射であるとする。ただし，σ_tすなわち，X, F, x^0, hおよびXの次元は未知であるとする。この時，入出力データ(ω, γ)のみからσ_tを（同型を除いて）一意に導出できるような入力系列$\omega \in U^*$が（一般にσ_tに依存して）存在する。

(4.2) 主定理.　プラントがN次元以下の正準線形表現系$\sigma_t = ((X, F), x^0, h)$で記述され，$F(u)$, $u \in U$ が全単射であるとする。ただし，σ_t，すなわち，X, F, x^0, h

およびXの次元は未知である。この時、入出力データ(ω, γ)のみからσ_tを（同型を除いて）一意に導出できるような入力系列$\omega \in U^*$がσ_tに依存しないで存在する。

(4.3) 定理. プラントは主定理と同じ仮定を持つσ_tで記述されるとする。入力値を無作為に選び実験系列を伸していけば、その入出力データからσ_tが同型を除いて求まる確率は1に近づく。

5. 単一実験擬可到達性および可識別性

主定理(4.2)は定理(4.1)から導出され、定理(4.3)は主定理から導出される。ここで、定理(4.1)を導出するに重要な命題を2つ述べる。

(5.2) 命題. $\sigma = ((K^n, F), x^0, -)$を擬可到達な線形表現系、ただし、$F(u), u \in U$は全単射、$Y \subset K^n$をm次元の線形部分空間とする。任意の$x^0 \in \{\phi(\omega)x^0 ; \omega \in U^*\} \cap Y$に対し、ある入力系列$\omega \in U^*$ただし$|\omega| \leq m-1$が存在し、$\phi(\omega)x \notin Y$となる。

(5.2) 命題. $\sigma = ((K^n, F), -, h)$を可識別な線形表現系、ただし、$F(u), u \in U$は全単射とする。この時、入出力データから初期状態$x^0$が決定出来るような入力系列$\omega \in U^*$、ただし、$|\omega| \leq n(n-1)/2$、が存在する。

参考文献

1) R. E. Kalman et al ; Topics in Mathematical System Theory, McGraw, 1969

2) T. Matsuo ; Realization Theory of Continuous-Time Dynamical Systems, Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol. 32, 1981

3) 長谷川・松尾 ; 離散時間線形表現系の実現理論, 計測自動制御学会論文集 第15巻 第3号

4) 長谷川・松尾 ; 離散時間有限次元線形表現系, 同上 第15巻, 第4号.

5) 長谷川・松尾・平野 ; 離散時間線形表現系の部分実現問題, 同上, 第18巻, 第2号.