数理解析研究所講究録
第485巻 1983年 29-46

複合システムの理論——特にWell-posednessについて

京都大学工学部　　荒木光彦（Mitsuhiko Araki）
筑波大学電子情報系　佐伯正美（Masami Saeki）

1．まえがき

ここでいう複合システムとは、いくつかのダイナミカル・システムが結合されて出来ている大きなダイナミカル・システムのことである。すなわち、"サブシステム"

$$S_i : y_i = F_i(u_i) \qquad (1\text{-}1)$$

$$i = 1, \cdots\cdots, n$$

が"結合関係"

$$IC_i : u_i = H_i(y_1, \cdots\cdots, y_n ; \tilde{u}) \qquad (1\text{-}2)$$

$$i = 1, \cdots\cdots, n$$

によって結び合わされたものを"複合システム"とよぶ。複合システムを扱う場合には、次のような模式図を思い浮かべると便利である。ただし、$\tilde{u}$は全体のシステムに入ってくる外界からの入力である。場合によっては、(1)(2)に加えて全体のシステムから外界へ出ていく出力、

$$\tilde{y} = g(y_1, \cdots\cdots, y_n \,;\, \tilde{u}) \tag{1-3}$$

を考える必要がある。

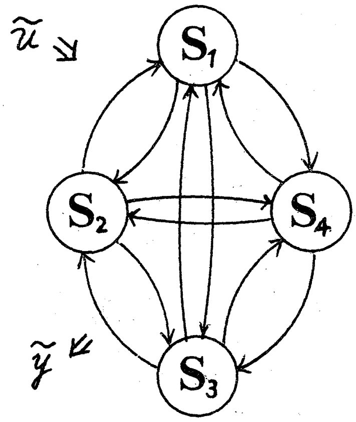

図1

複合システムを考える主な動機としては次の2つが挙げられる。

(i)実在のシステムは、多くの場合いくつかの“部分”から成り立っている。ただし“部分”というのは、それ自身で一まとまりの機能を持つようなもの、または比較的容易に他と区別されうるようなものである。

(ii)非常に大きな対象を扱う場合、技術的制約からそれをいくつかに分割して処理する必要がある。ここに、“非常に大きな対象”としては、物理的・社会的な対象またはそれをモデル化した非常に変数の多い連立方程式を考えている。

上の2つの動機は、ある意味で裏表の関係にあるわけだが以下では、(i)の場合に重点をおいて話を進める。

複合システムという設定の下で、どのような理論的研究が進められてきたかをみてみると、次のような表題が挙げられ

る。

(a)モデルの適合性の判別

(b)安定条件

(c)サブシステムの独立性を重んじた分散制御

この中の(a)，(b)は動的システム理論（とその応用）における一般的な問題でもあるわけだが、複合システムという設定の下で固有の問題が新たに生じることになった。(c)はどちらかというと元来、複合システム固有の問題である。当稿は、この中の(a)についての筆者らの研究結果を紹介しながら、今後の発展方向をさぐってみようというものである。

2．モデルの適合性 ── Well-Posedness とは

ここでいうモデルの適合性とは、ある数理モデル（微分方程式など）が、対象としている実在のシステムの挙動をうまく反映しているか否かという問題である。このような意味での適合性は、実験との対照によって初めて検証できるものであり、本来、理論的考察だけでは解決できないはずの問題である、と考えるのが当然であろう。しかしながら、実験結果との対照を行う以前に、理論の段階だけで解決しておくべき問題もいくつか存在する。どのような問題があるのか、まず一例をながめてみよう。

前節の図1のようなシステムを思い浮かべる。システムの各部分を調べた結果、サブシステムのモデルとして線形の常微分方程式、

$$dx_i(t)/dt = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \tag{1}$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u_i(t) \tag{2}$$

が得られ、結合関係のモデルとして記憶のない線形の関係式、

$$u_i(t) = E_{i1} y_1(t) + \cdots\cdots + E_{in} y_n(t) + E_{io} \tilde{u}(t) \tag{3}$$

が得られたものとする。この場合、上の3式を $i = 1 \sim n$ について連立させたものが全体のモデルと考えられる。

このモデルの適合性を確認するには、実存のシステムをすべてのサブシステムが結合された状態で動作させ、色々な条件下における挙動と、モデルを解いて得られる解とを対照させれば最も確実な保証が得られる。しかし、そのような直接的な方法は、サブシステムに“分解”して“モデル”を作っているという立場と相矛盾するものである。というのは、サブシステムに分解して解析しているという事は、システム全体を結合した状態で実験を行うことが困難、もしくは望ましくないという事情を前提としていることが多く、さらにさかのぼって考えてみれば、数理モデルを作るという事自身の中に、なるべく実験を行わずに対象の挙動についての知見を得たいという要望が含まれているからである。したがって、複

合システムのモデルを作る過程において、上のように方程式を連立させた場合に、何か不都合が生じないかどうかという点を理論的手段で判別することが非常に重要となる。

では、サブシステムや結合関係のモデルを連立させた場合にどんな不都合が生じるであろうか。(1)〜(3)式をながめてまず気がつくのは、u_i, y_iについての連立一次方程式(2), (3)が一意解を持つであろうかという点である。すなわち、(2)式を(3)式に代入して整理すると、

$$(I-ED)u = Cx + E_0\tilde{u} \tag{4}$$

となる。† I−EDが正則でないと、uが一意に定まらないことになり、実在のシステムのモデルとして不都合である。このように、代数関係の部分の解の存在と一意性（今の場合は、I−EDの正則性）が、上の複合システムモデルが“適当”であるために要求される第1の条件となる。さて、I−EDが正則であると、(4)式より、

$$u = (I-ED)^{-1}Cx + (I-ED)^{-1}E_0\tilde{u} \tag{4a}$$

---

† $u=(u_1^T, \cdots\cdots, u_n^T)^T$; $x=(x_1^T, \cdots\cdots, x_n^T)^T$

$C = \text{Block diag}(C_i) \quad i=1,\cdots\cdots,n$; $D = \text{Block diag}(D_i) \quad i=1,\cdots\cdots,n$

$E=(E_{ij}) \quad i,j=1,\cdots\cdots,n$; $E_0=(E_{10}^T, \cdots\cdots, E_{n0}^T)^T$

$A = \text{Block diag}(A_i) \quad i=1,\cdots\cdots,n$; $B = \text{Block diag}(B_i) \quad i=1,\cdots\cdots,n$

となる。これを(1)に代入すると、

$$dx/dt = \{A + B(I-ED)^{-1}C\}x + B(I-ED)^{-1}E_0\tilde{u} \qquad (5)$$

という微分方程式が得られる。† この微分方程式の解の存在と一意性が第2の条件である。(今の場合のように線形定係数方程式のモデルであれば、$\tilde{u}$のクラスを適当に制限することによって、この条件は必ず満たされる。)

さて、上の2つの関門を通過して一意解$x(t)$が得られたとする。この解が常に実在のシステムの挙動とうまく対応づけられるということであれば、"複合システムのモデルの適合性"として提起された問題は、単に方程式の解の存在と一意性の問題の特殊例にすぎないということになる。しかし、現実には、(5)式の一意解と実在のシステムの挙動とが全く違ったものとなる例がごく普通に存在する。次に、このような現象が生じるメカニズムの一例を掲げてみる。

サブシステムのモデルの(2)式は記憶のない関係式となっているが、実際には非常に速い動的現象が終了した後の平衡関係を与える式を含むことが多い。非常に速い動的現象としては例えば、

$$\varepsilon_i \frac{dy_i(t)}{dt} = -y_i(t) + C_i x_i(t) + D_i u_i(t) \qquad (6)$$

が考えられる。(ε_iは非常に小さい正数)。もちろん、この現象は諸種の事情によりモデル化するのが困難であったもの

であろうし、またそれが非常に短時間の内に終了するので、サブシステム単独で考える限り無視しても差支えないものである。一方、結合関係のモデル(3)は、前節図1の模式図におけるS_jからS_iへの信号の伝達の様子を表わすものである。ここで、もしS_jとS_iの間が離れていれば、信号の伝達には有限の時間がかかると予想されるから、(3)式を

$$u_i(t) = E_{i1}y_1(t-\varepsilon_{i1}') + \cdots\cdots + E_{in}y_n(t-\varepsilon_{in}') + E_{i0}\tilde{u}(t) \qquad (7)$$

で置き換えなければならないことになる。（ε_{ij}'は非常に小さい正数）。以上を考慮すると、初めに考えた(2)，(3)を連立させた代数方程式というのは、実は(6)，(7)を連立させて出来る非常に速い動的システム（この場合、$x(t)$は定数とみなす）の平衡点を与える式であったということになる。(4a)式でその平衡点が与えられるわけだが、もしそれが不安定平衡点であれば、時間が十分たった後には、$u(t)$は(4a)と全く異なった値になってしまう。[††]したがって、この場合には、(4a)の値を用いている(5)式は、実在のシステムの挙動を記述するものではないという結論に達する。

[††] 線形モデルで考えると$\|u(t)\|\to\infty$となる。実際には線形近似が成り立たない領域に入って、どこか他の平衡点に落ち着くと考えられる。

複合システム・モデルのwell-posednessとしてここで扱おうとしている問題の焦点は、上記のような高速の領域における不安定現象が生じうるか否かを明らかにすることにある。ただし、上記では(6)式として一階の常微分方程式を導入し、(7)式としてむだ時間を含む関係を導入して考えた。これはそれ程根拠のあることではなく、高速現象に関する式の形をどう考えるべきかは、個々の具体的なシステムについて検討すべき問題である。したがって、理論的研究という立場からは最も厳しい（不安定現象を起こしやすい）想定の下でも不安定現象を起こし得ないという十分条件を求めるか、もしくは色々な場合に対して、結果がどう変わるかを調べることが主な興味の対象となる。次に述べる筆者らの研究は前者に類するものである。

3. Well-Posednessの定義

まず記号の説明をしておく。時間については、T_0から始まる半無限区間、

$$S=[T_0,\infty)$$

を考える。定数p、

$$1\leqq p<\infty$$

を固定し、$\underline{z}\in R^q$のノルム$\|\underline{z}\|$はp乗ノルムとする。$q'\times q$

行列Fのノルム$\|F\|$はR^qからR^qへの作用素としてのノルム、

$$\|F\| = \max_{\|\xi\|=1}\|F\xi\|$$

とする。S上で定義されたR^q値をとる関数$\underline{x}(t)$を考え、

$$L_p^q = \left\{\underline{x} \,\middle|\, \int_{T_0}^{\infty}\|\underline{x}(t)\|^p dt < \infty\right\}$$

とする。L_p^qにおけるノルムは、

$$\|\underline{x}\| = \left\{\int_{T_0}^{\infty}\|\underline{x}(t)\|^p dt\right\}^{1/p}$$

とする。$\underline{x}(t)$に対する *truncation operator* P_Tを、

$$(P_T\underline{x})(t) = \begin{cases}\underline{x}(t) & T \geqq t \geqq T_0 \\ 0 & t > T\end{cases}$$

で定義する（$T \in S$）。L_p^qの拡張空間L_{pe}^qを、

$$L_{pe}^q = \left\{\underline{x} \,\middle|\, P_T\underline{x} \in L_p^q,\ \forall T \in S\right\}$$

とする。$x, x' \in L_{pe}^q$の間の等号は、“任意の$T \in S$に対して$P_T\underline{x} = P_T\underline{x}'$（$L_p^q$において）である”ことと定義する。

xに対する遅延作用素D_εを、

$$(D_\varepsilon\underline{x})(t) = \begin{cases}\underline{x}(t-\varepsilon) & t \geqq T_0 + \varepsilon \\ 0 & T_0 + \varepsilon > t \geqq T_0\end{cases}$$

で定義する。ただし、$\varepsilon > 0$とする。L_{pe}^qからL_{pe}^qへの写像Fについて、

$$P_T F P_T = P_T F$$

が成り立つ時、Fは因果的であるという。以下では、L_{pe}^qか

らL_{pe}^{g}への作用素として、

$$F0 = 0$$

を満たすものだけを考える。作用素Fについて、$T \in S$に対して定まる正数$\gamma_T < \infty$があって、

$$\sup_{P_T\underline{x} \neq P_T\underline{x}'} \frac{\| P_T(F\underline{x} - F\underline{x}') \|}{\| P_T(\underline{x} - \underline{x}') \|} < \gamma_T < \infty$$

となる時、Fは局所的にリプシッツ連続であるという。

さて、上のように定義された作用素をシステムの伝達特性の表現に用いることにすると、前節までに述べた複合系のモデルは次のように書ける。すなわち、サブシステム方程式として、

$$\underline{y}_i = G_{ii}\underline{e}_i \qquad i = 1, \cdots\cdots, n \tag{1}$$

結合関係の方程式として、

$$\underline{e}_i = \underline{u}_i + \sum_{j=1}^{n} H_{ij}\underline{y}_j \qquad i = 1, \cdots\cdots, n \tag{2}$$

が得られる。ただし、

$\underline{e}_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i \in L_{pe}^{g_i}$

G_{ii} : $L_{pe}^{g_i}$からそれ自身への局所的リプシッツ連続な因果的作用素

H_{ij} : $L_{pe}^{g_j}$から$L_{pe}^{g_i}$への局所的リプシッツ連続な因果的作用素

ここで、$\underline{e}$, $\underline{y}$, $\underline{u}$ を、

$$\underline{e}(t) = (\underline{e}_1^T(t), \cdots\cdots, \underline{e}_n^T(t))^T \in L_{pe}^{g}$$

$$\underline{y}(t) = (\underline{y}_1^T(t), \cdots\cdots, \underline{y}_n^T(t))^T \in L_{pe}^q$$

$$\underline{u}(t) = (\underline{u}_1^T(t), \cdots\cdots, \underline{u}_n^T(t))^T \in L_{pe}^q$$

$$q = q_1 + \cdots\cdots + q_n$$

とおくと、(1), (2)式はまとめて、

$$\underline{y} = G\underline{e} \qquad (1')$$

$$\underline{e} = \underline{u} + H\underline{y} \qquad (2')$$

と書ける。連立方程式(1), (2)（または(1′), (2′)）を複合系CSとよぶことにする。

さて、複合系のモデルにおいて前節で述べたような不都合が生じない場合に、その複合系は well-posed であるという。

上の複合系CSについての well-posedness は、例えば次のように定義できよう。

定義1：次の三条件が満たされる時、複合系CSは、well-posed であるという。

(i) 任意の $\underline{u} \in L_{pe}^q$ に対し、(1), (2)が一意解（$\underline{e}, \underline{y}$）を有し、$\underline{u}$ から $\underline{e}$ および $\underline{y}$ への写像としてそれぞれ定義される作用素EおよびYが、共に局所的にリプシッツ連続かつ因果的である。

(ii) (1), (2)式の G_{ii} および H_{ij} をそれぞれ $D_{\varepsilon ii} G_{ii}$ および $D'_{\varepsilon ij} H_{ij}$ で置き換えて得られる複合系を CS_ε とする時、CS_ε も(i)の性質を満たす。

(iii) CS の解を $(\underline{e}, \underline{y})$, CS_ε の解を $(\underline{e}^\varepsilon, \underline{y}^\varepsilon)$ とし、

$$\varepsilon_0 = \max(\varepsilon_{ii}, \varepsilon'_{ij})$$

とおく。この時、任意の $\tau \in S$ に対して、

$$\lim_{\varepsilon_0 \to 0} P_\tau \underline{e}^\varepsilon = P_\tau \underline{e} \quad , \quad \lim_{\varepsilon_0 \to 0} P_\tau \underline{y}^\varepsilon = P_\tau \underline{y}$$

が成立する。

前節では、高速現象の記述として(2-6)式で微少な正数を係数とする微分方程式を、(2-7)式では微少なむだ時間を、それぞれ考えた。上の定義では、このように二種類の要因を考える代わりに、すべての経路にむだ時間が存在しうるものとしている。これは、一つには、取り扱いを容易にするためである。ただし、このようにすべての経路にむだ時間を挿入した場合が一番不安定現象を起こしやすいであろうことは、Nyquistの安定条件や、線形系の well-posedness に関する、Maeda-Kodamaの研究[2]から予想できるところである。すなわち、上の定義の意味での well-posedness が保証されれば、実際上生じうるほとんどあらゆる状況下において、前節で述べたような不都合な事態は生じないものと予想される。

4. Well-Posedness の十分条件 [1]

前節で定義した well-posedness を保証する十分条件を一つ挙げておこう。まず、作用素 F の一様瞬時利得を次のよう

に定義しておく。

<u>定義2</u>：F を L_{pe}^{q} から $L_{pe}^{q'}$ への局所的リプシッツ連続な因果的作用素とする。$T \in S$，$\Delta T > 0$ とすると、次式を満たすような正数 $M_{T,\Delta T}$ および $K_{T,\Delta T}$ が存在する。

$$
\begin{aligned}
&\|(P_{T+\Delta T} - P_{T-\Delta T})(F\underline{x} - F\underline{x}')\| \\
&\quad \leqq M_{T,\Delta T}\|(P_{T+\Delta T} - P_{T-\Delta T})(\underline{x} - \underline{x}')\| \\
&\qquad\qquad + K_{T,\Delta T}\|P_{T-\Delta T}(\underline{x} - \underline{x}')\| \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$\forall \underline{x}, \underline{x}' \in L_{pe}^{q}$$

上式を満たす $(M_{T,\Delta T}\,,\ K_{T,\Delta T})$ の集合を $\mathcal{S}$ とし、$\mathcal{S}$ の中での $M_{T,\Delta T}$ の下限 $M^*_{T,\Delta T}$ を区間 $[T-\Delta T, T+\Delta T]$ における<u>一様利得</u>とよぶ。さらに、

$$M^*_T = \lim_{\Delta T \to 0} M^*_{T,\Delta T} \qquad (2)$$

を T における<u>一様瞬時利得</u>とよぶ。

上の定義中、(1)式を満たす $(M_{T,\Delta T}\,,\ K_{T,\Delta T})$ の存在は、局所的リプシッツ連続性と、時間軸での分解に関する三角不等式から保証できる。(2)の極限の存在は、$M^*_{T,\Delta T}$ の ΔT に関する単調性により保証できる。上で定義した一様瞬時利得は、システムの直達分の大きさを評価するものであり、線形システムおよび記憶のない非線形システムについては次のように求められる。

<u>定理1</u>　L_{pe}^{q} から $L_{pe}^{q'}$ への作用素 F を、

$$(F\underline{x})(t) = \int_0^t \tilde{F}(t,\tau)\underline{x}(\tau)d\tau + F_0(t)\underline{x}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\underline{x}(t-\varepsilon_k) \qquad (4\text{-}3)$$

で定めるものとすると、Fの一様瞬時利得M_T^*について

$$M_T^* \leqq \| F_0(T) \| \qquad (4\text{-}4)$$

が成り立つ。ただし、$\tilde{F}(t,\tau)$は微分可能、$F_k(t)$は連続かつ、$\sum_{k=1}^{\infty} \| F_k \| < \infty$ を満足するものとし、

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots\cdots < \varepsilon_k < \cdots\cdots \qquad (4\text{-}5)$$

とする。

<u>定理2</u>　L_{pe}^{ℓ} からL_{pe}^{ℓ} への作用素Fを、

$$(F\underline{x})(t) = \varphi(\underline{x}(t), t) \qquad (4\text{-}6)$$

で定めるものとする。関数$\varphi(\cdot,\cdot)$が、

$$\| \varphi(\underline{x}(t), t) - \varphi(\underline{x}'(t), t) \| \leqq \beta(t) \| \underline{x}(t) - \underline{x}'(t) \| \qquad (4\text{-}7)$$

を満たせば、Fの一様瞬時利得は、

$$M_T^* \leqq \beta(T) \qquad (4\text{-}8)$$

を満足する。ただし、$\beta(t)$は連続関数とする。

一様瞬時利得を使うと、複合系CSのwell-posednessが次の形で保証できる。

<u>定理3</u>　G_{ii}およびH_{ij}の一様瞬時利得をそれぞれ$a_{ii}(T)$および$b_{ij}(T)$とし、<u>利得積行列</u> $\Theta(T) = (\theta_{ij}(T))$を、

$$\Theta(T) = B(T)A(T)$$

で定義する。ただし、

$$A(T) = diag\,(a_{11}(T), \cdots\cdots, a_{nn}(T))$$

$$B(T) = (b_{ij}(T)) \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n$$

I－Θ(T) が任意のTでM行列であれば、複合系CSは、well-posedである。

上の定理におけるM行列とは、非対角要素が0または正、主座行列式が正である実正方行列のことである。

5. あとがき

前節の定理によって、(4-3)で与えられるような線形システムおよび(4-6)で与えられるような記憶なしの非線形システムからなる複合系については、定義1の意味での well-posedness が保証できることになった。3節でも述べたように、当稿で用いた well-posedness の定義は、かなり強い要求を課している。したがって、定理3の条件が満足されれば、そのモデルについて2節で述べたような不都合な事情が生じることはまずないものと信じてよい。しかし、逆の立場からみると、要求が厳しすぎることにもなるわけで、例えばアナログ計算機の Adder でループを作った回路などを考えてみると、必ずしも定義1の条件を満たしていなくても、実際の現象を十分記述しうる場合があることがわかる。この点を考慮すると、もう少し“ゆるい” well-posedness の定義を与え、それが結論

できるような条件を求めておくことも必要と考えられる。“ゆるい”条件としては、微分方程式（一種の慣性を表わす）とむだ時間とが混在したようなものが望ましいように思われる。線形定常システムに限れば、この種の問題はすでに文献[2]で解かれているわけだが、これをもう少し一般的なシステムにまで拡張しておくことが望ましい。それには、特異摂動法と当報告のような手法を併用する必要があろう。

当稿の well-posedness の定義は Willems [3] に従ったものである。4節の定理等の証明は[1]を参照されたい。なお、3節(1), (2)のモデルには、結合関係が線形的である（e_i が $H_{ij}y_j$ の和で表わされる）という制約がついている。この制約の除去は容易である。[1]では、ここで述べた“サブシステム”と“結合関係”を区別せずに、少し一般的な方程式の形で扱っているが、定理3の形の結果を考える限り、この差は本質的でない。

さて、上に述べた理論の構成を模式化してみると、

1° サブシステムおよび結合関係を特徴づける量を抽出する。

2° 抽出された量の相互関係から結論を導く。

という形でながめることができる。安定条件等に関する理論（例えば[4]参照）も上の形にあてはめることができる。これ

は丁度、部品の外部仕様を与え、それに基づいて電子回路を組み立てていく過程に似ており、複合系の理論の本質を表わすものと考える。ただ、従来の理論では、1°の段階で抽出されるのが、サブシステム当たり1個ないし数個スカラー量に限られていたわけで、これをもう少し複雑なものとし、サブシステムの特徴をもう少し詳しく取り入れられるようにするのが今後の課題の1つであろう。

上記とは別の発展方向としては、ディジタル機構と連続時間的対象とが連結したシステムに関するモデルについての問題が考えられる。この方向におけるwell-posednessの研究を行うとすれば、おそらくディジタル回路におけるracing条件に、連続時間系の遅れの特徴を加味したものとなろう。

以上、well-posednessに関する結果をもとに、複合系の理論の発展方向を考えてみた。

参考文献

〔1〕 M. Araki & M. Saeki, "Quantitative Condition for the Well-Posedness of Interconnected Dynamical Systems," IEEE Trans.
Automatic Control, Vol. AC-28 (1983)

〔2〕 H. Maeda & S. Kodama, " Parasitic Elements and

System Dynamics," 計測自動制御学会 第6回制御理論シンポジウム, pp 209 - 214 (1977)

[3] J. C. Willems, The Analysis of Feedback Systems, MIT Press, Cambridge, MA, 1971

[4] M. Araki, "Stability of Large-Scale Nonlinear Systems — Quadratic Order Theory of Composite-Systems Method Using M-Matrices," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-23 pp 129 - 142 (1978)