

逆問題における、ある分岐の現象について

東大理 鈴木 貴 (Takashi Suzuki)

固有値問題の逆問題は、発展方程式の Identification 問題 (例えば Kitamura-Nakagiri [14]) と深くかかわっており、筆者は最近^後前者についていくつかの結果を得ることができた。(Suzuki [25-28] 及び、その引用文献) ここでは前者、特に逆 Sturm-Liouville 問題について最近得られた結果を報告してみたい。

逆 Sturm-Liouville 問題は、天文学者 V. Ambarzumian の [1] より始まる。それは、Sturm-Liouville 作用素 $A_{p,r,H} (:-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))$ in $L^2(0,1)$ with $(-\frac{d}{dx} + r) \cdot |_{x=0} = (\frac{d}{dx} + H) \cdot |_{x=1} = 0$ をその固有値 $\delta(A_{p,r,H}) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$) によって決定しようという試みである。1946年に発表された Borg [2] は現在から見ても画期的な論文であり、そこで彼は次の三つのことを(主として Dirichlet 問題: $r=H=0$ 及び Neumann 問題: $r=H=\infty$ に対して) 主張しているように思われる:

(I) p は一般に $\delta(A_{p,r,H})$ のおによ、ては決まらないうが、 $\delta(A_{p,r,H})$

- と $\delta(Ap, R, H^*) (H^* + H)$ の両方によつて一意的に決定される。
- (II) 但し, Ap, R, H が「対称」(後述)である場合には, その制限のもとに $\delta(Ap, R, H)$ が P を一意的に決定する。
- (III) Hill 方程式のバンド構造 (例えば Magnus-Winkler [201]) が "0 有限帯" であるポテンシャルは定数である。

1951年にロシア語で発表された Gelfand-Levitan [9] は, Borg [2] が一意性の定理のみであることに不満を持ち, P をスペクトル関数から再構成することを考え, Gelfand-Levitan 方程式と呼ばれる積分方程式を用いてそれに成功した。この論文の影響は大きくそれに研究されて Krein [15] は予測理論に対し, Marchenko [20] は逆散乱問題に対しそれぞれ一つの解決を提示した。特に Faddeev [5, 6]^(等) によつて継承・発展されていった逆散乱理論は, 1967年に Gardner-Greene-Kruskal-Miura [8] によつて KdV 方程式の特殊解 (ソリトン解) を解析的に求めるのに役立つことが発見されると, 1970年代には非線形波動を研究する重要な道具となり, おびただしい成果を生むことになった。(谷内-西原 [31], 戸田 [32], Faddeev [6] にはその後本質的な誤りが発見されて修正された。Chadan-Sabatier [3], Deift-Trubowitz [4] 等を参照。)

一方 1965年に Hochstadt [11] は Borg [2] の主張 (III) の証明を簡略にするとともに更に次のように改良した:

(Ⅲ) "1有限帯ポラニニャル"は一般化KdV方程式の定常解であることと同値。

1976年には Goldberg [10], Flaska [7] 等多くの人々によつて次のように更に改良されることわかった:

(Ⅲ') "N有限帯ポラニニャル"は"N次の一般化KdV方程式"の定常解であることと同値。

このように Hill 方程式のバンド構造の研究は KdV 方程式の研究と結びついて McKean-Moerbeke [22] をはじめとする深い成果を生んだ。(田中-伊達 [20] 参照。)

ここで我々が考察する (I)(II) の逆 Sturm-Liouville 問題は Borg [2] 以後どうか。1949年に Levinson [17] は (I)(II) について [2] の問題を一般の R, H に対して考え、やや [2] よりは弱い主張を簡明な証明で示した。1964年に英訳が出版された Levin [16] によると、V.A. Marchenko は、(I) において p はかりでなく境界での反射係数 R, H, H^* も決定されることを示したらしい。その後 ~~Levin~~ Levin-Gasymov [18] は (I) について (p, R, H, H^*) を $\delta(A_{p, R, H})$ と $\delta(A_{p, R, H^*})$ によつて再構成する試みをした。これは一意性に関しては [2] を含むわけではない。一方 1973年に Hochstadt [12] は (I) & (II) に対して有限個の $\delta(A_{p, R, H})$ が未知の場合 p がどのような自由度をもつて考察した。1978年には Hochstadt-Lieberman [13] が一般の場合に $p(x)$ ($0/2 \leq x \leq 1$), R, H が $\delta(A_{p, R, H})$ によつて $p(x)$ ($0 \leq x \leq 1/2$) が一

意的に決定されることを示した。

最近筆者は発展方程式の Identification の研究において、Gel'fand-Tsvelan [9] に啓発されて筆者自身が開発した方法 (Suzuki-Murayama [29], Suzuki [25-27]) によってこれらの逆 Sturm-Fiouville 問題の一意性に関する結果がすべて見通し良く改良できること (Suzuki [28]) 更により深いこともわかるようになることと知った。この作業はまだ完了したわけではないが、(II) についてはある程度の所まで来たので、ここに紹介してみたい。なお逆 Sturm-Fiouville 問題の安定性に関しては水谷明氏 (学習院大理) の考察がある。 ([23])

§1. Introduction.

Notation 1. $p \in C^1[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$ に対して $A_{p, R, H}$ を Sturm-Fiouville 作用素: $-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$ in $L^2(0, 1)$ with $(-\frac{d}{dx} + R) \cdot |_{x=0} = (\frac{d}{dx} + H) \cdot |_{x=1} = 0$ とする。 □

良く知られているように、 $A_{p, R, H}$ の固有値 $\sigma(A_{p, R, H}) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ はすべて単純である: $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$ 。以下で考えるのは係数 $p \in C^1[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$ が次の条件をみたす時の事である:

Definition 1. $A_{p, R, H}$ が「対称的」(symmetric) であるとは、

(i) $p(1-x) = p(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) (以下このことを $p \in C_s^1[0, 1]$ と書く)

が、

(ii) $R=H$

なることを言う。□

与えられた対称作用素 $A_{p,R,R}$ に対し, $\lambda_n(p,R)$ ($n=0,1,2,\dots$) をその固有値としよう。Borg [2], Levinson [17], Hochstadt [12] は次の事を示した:

Theorem 0. $f \in C_S^1[0,1]$ かつ

$$(1.1) \quad \lambda_n(f,R) = \lambda_n(p,R) \quad (n=1,2,\dots)$$

をみたすとするは,

$$(1.2) \quad f = p$$

である。□

即ち, 「対称作用素」という version においては, 固有値が作用素を一意的に決定するのである。但し (1.1) において, $n=0$ に対しては何も仮定されていないことに注意しよう。

§2. Summary.

対称作用素 $A_{p,R,R}$ と $\Sigma \subset \mathcal{N} \equiv \{0,1,2,\dots\}$ が与えられたとする。

$\{\lambda_n(p,R)\}_{n=0}^{\infty}$ を $A_{p,R,R}$ の固有値として, 集合

$$\hat{Q} = \hat{Q}_{p,R,\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \{(g,f) \in C_S^1[0,1] \times \mathbb{R} \mid \lambda_n(g,f) = \lambda_n(p,R) \ (n \in \mathcal{N} \setminus \Sigma)\}$$

を考えよう。これはその n 番目の固有値が, $n \in \Sigma$ を除いて $A_{p,R,R}$ のそれと一致する対称作用素の全体を表わしている。この時

Theorem A. $\hat{Q}_{p, R, \Sigma} = \{(p, R)\}$ なるための必要十分条件は,

$\Sigma = \emptyset$ である。 \square

この定理は、対称作用素 $A_{p, R, R}$ のその固有値 $\{\lambda_n(p, R)\}_{n=0}^{\infty}$ によって特徴付けられることを示す。§1の Theorem 0 においては、 $\Sigma = \{0\}$ ($\neq \emptyset$) であつたが、かゝりに $j=R$ の仮定されていた。後者の最小固有値に対する条件 $\lambda_0(\theta, j) = \lambda_0(p, R)$ を recover していたわけである。一般の $\Sigma = \{n_1\}$ ($n_1 \in \mathcal{N}$) に対してはどうかであるか。

$$Q = Q_{p, R, n_1} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \theta \in C_2^1[0, 1] \mid \lambda_n(\theta, R) = \lambda_n(p, R) \ (n \neq n_1) \}$$

$$(\equiv \text{Proj}_1 [\hat{Q}_{p, R, \Sigma} \cap \{(\theta, j) \mid j=R\}])$$

とあつた。

Theorem B.

(i) $n_1 = 0$ の時 $Q_{p, R, n_1} = \{p\}$ 。

(ii) $n_1 \geq 1$ の時 $Q_{p, R, n_1} = \{p, p - 2(\frac{W'}{W})'\}$ 。 \square

Theorem B の (i) は Theorem 0 に他ならない。(但し、ここでは [2] [17] [12] とは異なる方法で示す。) (ii) において、' は x に関する微分を表わす。 $W \equiv W(x; p, R, n_1) \neq 0$ は x の関数で、次のようにして定義される:

Notation 2. $p \in C^1[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$\varphi = \varphi(x; p, R, \lambda)$ は $(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))\varphi = \lambda\varphi$ ($0 \leq x \leq 1$), $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = R$ の解と,

$\varphi^* = \varphi^*(x; p, \lambda)$ は $(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))\varphi^* = \lambda\varphi^*$ ($0 \leq x \leq 1$), $\varphi^*(0) = 0$, $\varphi^*(1) = 1$ の解と,

それぞれ表わす。 \square

$\lambda = \lambda_n(p, R)$ ($n \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) に対して $\mathcal{F}(x; p, R, \lambda)$ は $A_{p, R, \lambda}$ の固有関数になる。 $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}^* \rangle$ は方程式 $(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))\mathcal{F} = \lambda \mathcal{F}$ の解の基本系になる。

Notation 3. A_p^* は $-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$ in $L^2(0, 1)$ with $\cdot|_{x=0} = \cdot|_{x=1} = 0$ (Dirichlet 境界条件) を表わす。 A_p^* の固有値 $\delta(A_p^*) = \{\lambda_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ($-\infty < \lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots \rightarrow \infty$) $\in \lambda_n^* = \lambda_n^*(p)$ と書く。 \square

ここで $\lambda_n^*(p)$ の $n=1$ より番号を付けてあることに注意する。

$\lambda = \lambda_n^*(p)$ ($n \geq 1$) に対して $\mathcal{F}^*(x; p, \lambda)$ は A_p^* の固有関数になる。

以上の準備のもとで W は次のように定義される:

Notation 4. $n_1 \geq 1, p \in C_S^1[0, 1], R \in \mathbb{R}$ に対し,

$$W = W(x; p, R, n_1)$$

$$= \mathcal{F}^*(x; p, \lambda_{n_1}^*(p)) \mathcal{F}(x; p, R, \lambda_{n_1}(p, R))$$

$$- \mathcal{F}^*(x; p, \lambda_{n_1}^*(p)) \mathcal{F}'(x; p, R, \lambda_{n_1}(p, R)) \square$$

Remark 1. 固有関数の零点に関する Sturm-Liouville の定理及び比較定理によつて $W \neq 0, (\frac{W'}{W})' \in C_S^1[0, 1]$ がわかる。 \square

Remark 2. もし $\lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(p)$ ならば, W は Wronskian となり, $W' \equiv 0$ である。実は $(\frac{W'}{W})' \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(p)$ が成立する。 \square

一般に, $p \in C_S^1[0, 1]$ の時 $\mathcal{F}^*(1-x; p, \lambda_n^*(p)) = (-1)^{n+1} \mathcal{F}(x; p, \lambda_n^*(p))$ ($0 \leq x \leq 1$) (後述) であるから, これと独立で,

$$(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))S = \lambda_{n_1}^*(p)S, \quad S(1-x; p, n) = (-1)^n S(x; p, n) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $S = S(x; p, n) \neq 0$ が存在することになる。 $S(0) \neq 0$ であり、

$$R_n = R_n(p) \stackrel{\text{def}}{=} S'(0; p, n) / S(0; p, n)$$

とすると、 R_n は S のとりかえに よる $n \geq 1, p \in C_0^1[0, 1]$ によって 確定すること、及び

$$\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(p, R) \Leftrightarrow R = R_{n_1}(p)$$

が示される。特に、

Corollary. $\mathcal{Q}_{p, R, n_1} = \{p\}$ なるための必要十分条件は、

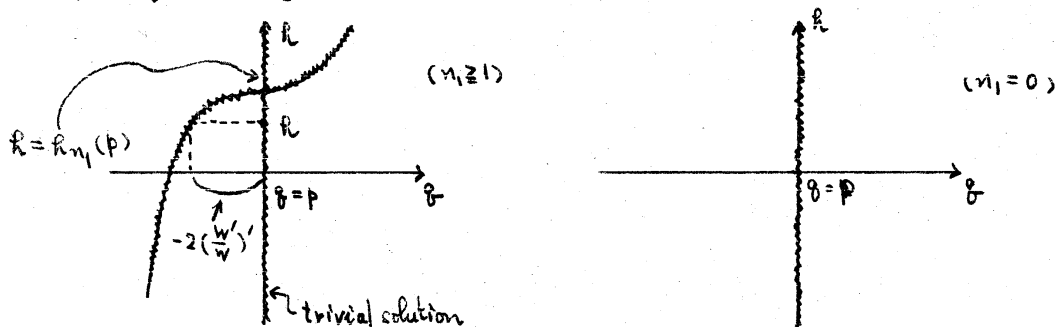
- (i) $n_1 = 0$ 又は (ii) $n_1 \geq 1, R = R_{n_1}(p)$ である。

このように、もとの問題は第3種の境界条件に関するものであるが、その答は Dirichlet 境界値問題と関連して述べられるのである。

Theorem B により、与えられた $p \in C_0^1[0, 1]$ と $n_1 \geq 1$ に対し、

$$\lambda_n(\beta, R) = \lambda_n(p, R) \quad (n \neq n_1)$$

をみたす $(\beta, R) \in C_0^1[0, 1] \times \mathbb{R}$ の集合は下の左図のようになる：



R をパラメータとして見た時、 $n_1 \geq 1$ の時はこの集合が $R = R_{n_1}(p)$ において分岐をなしていることがわかる。皮肉なことに、大域的な一意性が成立つのは分岐点の所だけである。 $n_1 = 0$ の

時は分岐は起こらない。

このような分岐が起こるのは, Identification の立場からは望ましくない。条件 $j=r$ はこの意味では不完全なものであった。別の条件で分岐をひき起こさないものはないであろうか。

Theorem C. A_p, r, ρ, A_q, j, j を対称作用素, $n_1 \in \mathcal{N} \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ とする時,

$$\begin{cases} \lambda_{n_1}(q, j) = \lambda_{n_1}(p, r) & (n_1 \neq n_2) \\ \frac{1}{2} q(\rho) - j^2 = \frac{1}{2} p(\rho) - r^2 \end{cases}$$

ならば, $q=p, j=r$ である。□

$\frac{1}{2} p(\rho) - r^2$ の物理的意味は明確でないが, この量はこのように固有値の条件を完全に1つ肩がかりすることができる。

この論説は6つの節より成る。以下の§3ではこれらの定理の証明において重要な変形公式について述べ, §4, §5でそれぞれ Theorem A, B の証明の概略を説明する。§6では Theorem C の証明とその一般化について述べる。

§3. Preliminaries

直角二等辺三角形 $\triangle ABC$ において $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 斜辺 AB は x 軸又は y 軸に平行であるとして, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ をその内部とする。与えられた $r \in C^1(\bar{\Omega})$ に対し, 双曲型方程式

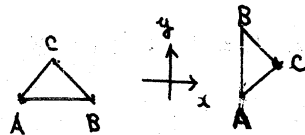
$$(3.1) \quad K_{xx} - K_{yy} * = r(x, y) K \quad (\bar{\Omega} \text{上})$$

に関して次の命題が成立: 但し ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルとする:

Proposition 1. 任意の $f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^2(\overline{BC})$; $f|_C = g|_C$ に対し, (3.1) から

$$(3.2) \quad K|_{AC} = f, \quad K|_{BC} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■



Proposition 2. 任意の $f \in C^2(\overline{AB})$, $g \in C^1(\overline{AB})$ に対し, (3.1)

から

$$(3.3) \quad K|_{AB} = f, \quad \frac{\partial K}{\partial \nu}|_{AB} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■

Proposition 3. 任意の $f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^2(\overline{AB})$, $f|_A = g|_A$ に対し, (3.1) から

から

$$(3.4) \quad K|_{AC} = f, \quad K|_{AB} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■

Proposition 4. 任意の $f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^1(\overline{AB})$, $R \in \mathbb{R}$ に対し,

(3.1) から

$$(3.5) \quad K|_{AC} = f, \quad \frac{\partial K}{\partial \nu} + R K|_{AB} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■

Proposition 1, 2, 3 の証明は Picard [24] にある。Proposition 4 も同様である。実際, 与えられた境界条件をみたし,

$$(3.1') \quad K_{xx} - K_{yy} = 0 \quad (\overline{\Omega} \pm)$$

なる $K_0 = K_0(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$ は, f, g の積分を用いて具体的に書き表わすことができる。一方与えられた $F \in C^0(\bar{\Omega})$ に対し, 与えられた境界条件を $f = g = 0$ に対しておとし,

$$(3.1'') \quad K_{xx} - K_{yy} = F(x, y) \quad (\bar{\Omega} \setminus \Gamma)$$

なる $K = K(x, y)$ も具体的に書き表わすことができる。このことから, これらの問題が Volterra 型の積分方程式に帰着され, 反復法によって解くことができる。(最初: 「反復法」を導入してその有用性を示したのは Picard 自身である。) Proposition 2 は双曲型方程式の Cauchy 問題として知られている。

次に, §2 Notation 2 で与えた $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x; p, r, \lambda)$ を思い起こそう。 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$ とする。

Lemma 1. 与えられた $p, g \in C^1[0, 1]$, $r, j \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(3.6.1) \quad K_{xx} - K_{yy} + p(y)K = g(x)K \quad (\bar{D} \setminus \Gamma)$$

$$(3.6.2) \quad K(x, x) = (j - r) + \frac{1}{2} \int_0^x (g(s) - p(s)) ds \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(3.6.3) \quad K_y(x, 0) = rK(x, 0) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $K = K(x, y) = K(x, y; g, j; p, r) \in C^2(\bar{D})$ が唯一存在する。□

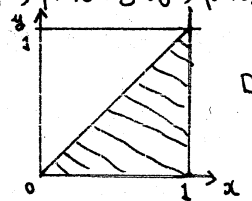
Lemma 2. (第1変形公式)

$$(3.7) \quad \mathcal{F}(x; g, j, \lambda) = \mathcal{F}(x; p, r, \lambda) + \int_0^x K(x, y; g, j; p, r) \mathcal{F}(y; p, r, \lambda) dy$$

が成立する。□

Lemma 1 の存在証明は次のようになされる。

まず $g \in C^1[0, 1]$ を適当に $\hat{g} \in C^1[0, 2]$ に拡張し, $\hat{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$

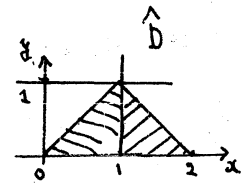


$0 < y < x < 2-y$ とおく。 Proposition 3 より,

(3.6.1') $\hat{K}_{xx} - \hat{K}_{yy} + p(y)\hat{K} = \hat{g}(x)\hat{K} \quad (\bar{D} \text{上})$

(3.6.2') $\hat{K}(x, x) = (j-l) + \frac{1}{2} \int_0^x (g(s) - p(s)) ds \quad (0 \leq x \leq 1)$

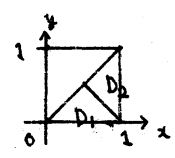
(3.6.3') $\hat{K}_y(x, 0) = l \hat{K}(x, 0) \quad (0 \leq x \leq 2)$



なる $\hat{K} \in C^2(\bar{D})$ が存在する。 $K = \hat{K}|_{\bar{D}}$ とおけばよい。一意性を

示すためには, $D \ni D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1-y\} \subset D_2 = D \setminus \bar{D}_1$ に

分ける。(3.6.1),



(3.6.2'') $K(x, x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$

から (3.6.3) なる $K \in C^2(\bar{D})$ が $K \equiv 0$ であることを言う。また

Proposition 3 より \bar{D}_1 上 $K = 0$, 次いで Proposition 1 より \bar{D}_2 上 $K = 0$ が導かれる。一方 Lemma 2 の証明は初等的である。(3.6)の右辺 $\gamma(x)$ が

(3.8) $(-\frac{d^2}{dx^2} + g(x))\gamma = \lambda\gamma \quad (0 \leq x \leq 1), \quad \gamma(0) = 1, \gamma'(0) = j$

を満たすことを言いたえればよい。詳しい計算は Suzuki [26, 27] にある。//

上の Lemma の要点は K が λ に依存しないことである。そのために固有値に対する条件を K に対する条件に集約することが可能になるのである。

この節の最後に, 対称作用素 $A_{p,l,l}$ の固有関数 $\varphi(x; p, l, \lambda_n(p, l))$ に関する次の事実を注意しておく。簡単のため, $l = j < \varphi_n(x) = \varphi(x; p, l, \lambda_n(p, l)) \quad (n \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\})$ とおく。

Lemma 3. $g_n(1-x) = (-1)^n g_n(x)$ ($n \in \mathcal{N}$, $x \in [0, 1]$) が成り立つ。□

実際 A_p, R, R が対称であるので $\chi_n(x) = g_n(1-x)$ も $\lambda = \lambda_n(p, R)$ に対応する A_p, R, R の固有関数となり、

$$(3.9) \quad \chi_n(x) = c_n g_n(x) (= g_n(1-x))$$

なる $c_n \in \mathbb{R}$ が存在する。 $c_n \neq 1$ ならば $g_n(\frac{1}{2}) = 0$, $c_n \neq -1$ ならば $g_n'(\frac{1}{2}) = 0$ であるが、 $g_n(\frac{1}{2}) = g_n'(\frac{1}{2}) = 0$ ならば $g_n \equiv 0$ となり g_n の定義に反する。従って $g_n(\frac{1}{2}) \neq 0$ か $g_n'(\frac{1}{2}) \neq 0$ のどちらか一方に成り立ち、上のことから $c_n = \pm 1$ となる。Sturm-Flourville の定理より、 g_n は $[0, 1]$ に J 度 n 個の零点を持つので $c_n = (-1)^n$ がわかる。□

Lemma 4. $\{g_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$, $\{g_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ はそれぞれ $L^2(0, \frac{1}{2})$ の完全直交系をなす。□

実際 Lemma 3 より $\varphi = g_{2m}$ は

$$(3.10) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\right)\varphi = \lambda\varphi \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \quad \varphi'(0) - R\varphi(0) = \varphi'(\frac{1}{2}) = 0$$

を $\lambda = \lambda_{2m}(p, R)$ に対して見たとき、 $[0, \frac{1}{2}]$ に J 度 m 個の零点を持つ。よって Sturm-Flourville の定理より、 $\{g_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$ は固有値問題 (3.10) の固有関数全体に一致し、完全直交系をなす。 $\{g_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ も同様である。//

§4. Outline of the Proof of Theorem A

$p \in C^1_s [0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $\Sigma \subset \mathcal{N}$ に対し、

$$(4.1) \quad \mathcal{Q}_{p, R, \Sigma} = \{(\varphi, j) \in C^1_s [0, 1] \times \mathbb{R} \mid \lambda_n(\varphi, j) = \lambda_n(p, R) (n \in \mathcal{N} \setminus \Sigma)\}$$

である。

Theorem 1. $\hat{Q}_{p, R, \rho} = \{ (p, R) \}$ \square

又

Theorem 2. $\hat{Q}_{p, R, \{m_i\}} \neq \{ (p, R) \}$ ($m_i \in \mathcal{A}$) \square

を示す。

今 $(\rho, j) \in \hat{Q}_{p, R, \{m_i\}}$ とすると,

$$(4.2) \quad \rho'(1; \rho, R, \lambda) + R \rho(1; \rho, R, \lambda) = 0 \quad (\lambda = \lambda_n(p, R), n \neq m_1)$$

が成立する。簡単のために以下 $\rho_n = \rho(\cdot; p, R, \lambda_n(p, R))$ とおくと,

第1変形公式 (3.7) により (4.2) は $K = K(x, y) = K(x, y; \rho, j; p, R)$ に対し

する関係式

$$(4.3) \quad (j - R + K(1, 1)) \rho_n(1) + \int_0^1 \{ K_x(1, y) + j K(1, y) \} \rho_n(y) dy = 0 \quad (n \neq m_1)$$

と同値である。 $K \in C^2(\bar{D})$ 故,

$$a_n = \int_0^1 \{ K_x(1, y) + j K(1, y) \} \rho_n(y) dy, \quad \rho_n = \int_0^1 \rho_n(x)^2 dx$$

とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\rho_n} < \infty$ 特には $a_n / \sqrt{\rho_n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる。漸近挙

動

$$(4.4) \quad \rho_n = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が知られている (例えは Levtchenko-Sargsjan [19]) の τ , $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow$

∞) を得る。 - 5

$$(4.5) \quad \rho_n(x) = \cos n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (x \in [0, 1]; n \rightarrow \infty)$$

([19]) であるから, (4.3) は

$$(4.6.1) \quad j = R - K(1, 1),$$

$$(4.6.2) \quad \int_0^1 \{K_x(1, y) + f K(1, y)\} g_n(y) dy = 0 \quad (n \neq n_1)$$

を得る。次に Lemma 3 より

$$(4.7) \quad \begin{cases} g'(\frac{1}{2}; p, R, \lambda) = g'(\frac{1}{2}; f, \lambda) = 0 & (\lambda = \lambda_n(p, R); n: \text{even}, n \neq n_1) \\ g(\frac{1}{2}; p, R, \lambda) = g(\frac{1}{2}; f, \lambda) = 0 & (\lambda = \lambda_n(p, R); n: \text{odd}, n \neq n_1) \end{cases}$$

であるから同様に (4.5) を用いて

$$(4.8) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} K(\frac{1}{2}, y) g_n(y) dy = 0 \quad (n: \text{odd}, n \neq n_1)$$

$$(4.9) \quad K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} K_x(\frac{1}{2}, y) g_n(y) dy = 0 \quad (n: \text{even}, n \neq n_1)$$

を得る。(4.8), (4.9), Lemma 4 より

(イ) $n_1: \text{even}$ の時

$$(4.10.e) \quad K(\frac{1}{2}, y) = 0, \quad K_x(\frac{1}{2}, y) = c g_{n_1}(y) \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2})$$

(ロ) $n_1: \text{odd}$ の時

$$(4.10.o) \quad K(\frac{1}{2}, y) = c g_{n_1}(y), \quad K_x(\frac{1}{2}, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2})$$

なる $c \in \mathbb{R}$ が存在する。(ロ) の場合には $g_{n_1}(\frac{1}{2}) = 0$ であるのでいづれの場合も (4.9) の $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ は自動的に満たされている。

以上によつて次の補題の \Rightarrow が示された:

Lemma 5. $f \in C_0^1[0, 1], g \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(f, g) \in \hat{Q}_{p, R, i, n_1} \Leftrightarrow (3.6) (4.6) (4.10) \text{ を満たす } K \in C^2(\bar{D}), c \in \mathbb{R} \text{ が存在する。} \quad \square$$

\Leftarrow の成立を示そう。

(3.6) より $K = K(\cdot, \cdot; f, g; p, R)$ であり, (3.7) が成立。一方 (4.6) より (4.2) が成立。従つて各 $n \neq n_1$ に対し $n(n) \in \mathcal{N}$ が存

在して

$$(4.11) \quad \lambda_n(p, k) = \lambda_{m(n)}(g, j) \quad (n \neq n_1)$$

である。 $m(n) = n(n \neq n_1)$ を示すには (4.10), (3.7), Lemma 4

より,

$$f(\frac{1}{2}; g, j, \lambda_n(p, k)) = 0 \quad (n: \text{odd}, n \neq n_1)$$

$$f'(\frac{1}{2}; g, j, \lambda_n(p, k)) = 0 \quad (n: \text{even}, n \neq n_1)$$

が成立するので, Lemma 3 より (4.11) において

$$(4.12) \quad m(n) \equiv n \pmod{2} \quad (n \neq n_1)$$

であることがわかる。一方漸近挙動

$$(4.13) \quad \lambda_n(p, k)^{\frac{1}{2}} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad \lambda_m(g, j)^{\frac{1}{2}} = m\pi + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad (m \rightarrow \infty)$$

([19]) より, (4.11) から

$$(4.14) \quad m(n) = n \quad (n \geq n_0)$$

なる $n_0 \in \mathcal{N}$ が存在することもわかる。更に

(4.15) 写像 $\mathcal{N} \setminus \{n_1\} \ni n \mapsto m(n) \in \mathcal{N}$ は順序を保存する。

(4.12) (4.14) (4.15) より $m(n) = n (n \neq n_1)$ が導かれる。 //

Proof of Theorem 1: $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, k, \phi}$ とすると, (4.2) に加えて

更に

$$f'(1; g, j, \lambda) + j f(1; g, j, \lambda) = 0 \quad (\lambda = \lambda_{n_1}(p, k))$$

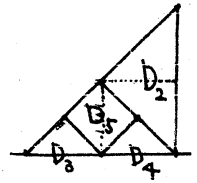
が成立する。Lemma 5 の \Rightarrow の証明をたどると, この時 $C=0$ になる:

る:

$$(4.16) \quad K(\frac{1}{2}, y) = K_x(\frac{1}{2}, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2}) .$$

更に (4.6.2) において

$$(4.17) \quad K_x(\alpha, y) + fK(\alpha, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq 1)$$



も成立す。§3 Lemma 1 の証明において D を D_1 と D_2 に分けた。

更に D_1 と $D_3 = \{(\alpha, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \alpha < \frac{1}{2} - y\}$, $D_4 = \{(\alpha, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \alpha - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - y\}$, $D_5 = D_4 \setminus (\overline{D_3} \cup \overline{D_4})$ に分ける。(3.6.1), (4.16), Proposition 2 によ

り $\overline{D_5}$ 上 $K=0$, 従って (3.6.1), (3.6.3), Proposition 4 によつて $\overline{D_3} \cup \overline{D_4}$ 上 $K=0$, 従つて更に (3.6.1), (4.17), Proposition 4 によつて $\overline{D_2}$ 上 $K=0$ と

なり, $K \equiv 0$ を得る。特に (3.6.2) より $g \equiv p$, $f = h$ である。//

次に,

Lemma 6. 与えられた $p, g \in C^1[0, 1]$, $h, f, c \in \mathbb{R}$ に対し, (3.6.1), (3.6.3), (4.6.2), (4.10) を満たす $K = K(\alpha, y) \in C^2(\overline{D})$ は一意に存在し, 変数分離形

$$(4.18) \quad K(\alpha, y) = g(\alpha) \varphi_{n_1}(y)$$

によつて与えられる。ここで $g = g(\alpha) \in C^2[0, 1]$ は $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, h)$ に対し,

(i) n_1 : even の時

$$(4.19.e) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + g(x)\right) \varphi = \lambda_{n_1} \varphi \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \quad \varphi(\frac{1}{2}) = 0, \quad \varphi'(\frac{1}{2}) = c$$

(ii) n_1 : odd の時

$$(4.19.o) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + g(x)\right) \varphi = \lambda_{n_1} \varphi \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \quad \varphi(\frac{1}{2}) = c, \quad \varphi'(\frac{1}{2}) = 0$$

の一意解である。□

Proof of Lemma 6: $\varphi_{n_1}(\alpha) = \varphi(\alpha; p, h, \lambda_{n_1}(p, h))$ である。

(4.18) なる $K \in C^2(\bar{D})$ が (3.6.1) (3.6.3) (4.6.2) (4.10) をみたすことは容易に確かめられる。そのような $K \in C^2(\bar{D})$ が一意であることと断言す。そのためには $c=0$ として (3.6.1), (3.6.3), (4.6.2), (4.10) をみたす $K \in C^2(\bar{D})$ が $K \equiv 0$ であることを示せばよい。ところか Theorem 1 の証明によつてこの時 \bar{D}_1 上 $K=0$ であることがわかる。一方 (4.6.2) より

$$K_x(1, y) + jK(1, y) = \alpha \varphi_{n_1}(y) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

なる $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在するが、 $K=0$ (\bar{D}_1 上) より $K_x(1, 0) = K(1, 0) = 0$ であるから $\alpha=0$ かつ (4.17) が成立す。これより Theorem 1 の証明によつて \bar{D}_2 上 $K=0$ も導びかれる。 //

Lemma 5, 6 によつて $g \in C_0^1[0, 1]$, $j \in \mathbb{R}$ に対し, $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, m}$

と (4.19) 及び

$$(4.20.1) \quad g(x) \varphi_{n_1}(x) = (j - R) + \frac{1}{2} \int_0^x (g(s) - p(s)) ds$$

$$(4.20.2) \quad g(1) \varphi_{n_1}(1) = R - j$$

なる $g \in C^2[0, 1]$, $c \in \mathbb{R}$ が存在することとは同値である。(4.19)

と (4.20.1) により, g, j を消去すると $g \in C^2[0, 1]$ は

$$(4.21) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g \varphi_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

をみたすこと及び g, j は g を用いて

$$(4.22) \quad j = p + 2 \frac{d}{dx} (g \varphi_{n_1}), \quad j = R + g(0)$$

と与えられることがわかる。 $\varphi_{n_1}(1-x) = (-1)^{m_1} \varphi_{n_1}(x)$ であるから,

(4.19) における g の $\alpha = \frac{1}{2}$ の条件を用いると, (4.21) の $\alpha = \frac{1}{2}$ で

の Cauchy 問題の解の一意性より,

$$(4.23) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が従わう。特に $(g \varphi_{n_1})(1-x) = -(g \varphi_{n_1})(x)$ であるから, (4.20.2) は (4.22) より自動的に導びかれ, 更に (4.22) なる g は $g(1-x) = g(x)$ を満たす。以上によつて次の定理の前半が示された:

Theorem 3. $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$, $\varphi_{n_1} = \varphi(\cdot; p, R, \lambda_{n_1}(p, R))$ とおく。

$(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$ なるための必要十分条件は, (4.21) (4.23) なる $g \in C^2[0, 1]$ が存在して (g, j) が (4.22) のように与えられることである。 $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$ と (4.21) (4.23) なる $g \in C^2[0, 1]$ のこの対応は 1 対 1 で, 特に $g \neq 0$ なるものは $(g, j) \neq (p, R)$ である。■

Theorem 3 の後半を証明しよう。実際 $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$ に対し, (4.21), (4.23) なる $g_1, g_2 \in C^2[0, 1]$ が存在して

$$g = p + 2 \frac{d}{dx} (g_2 \varphi_{n_1}), \quad j = R + g_2(0) \quad (l=1, 2)$$

が成立, たとえば $K_l(x, y) = g_l(x) \varphi_{n_1}(y) \in C^2(\bar{D})$ は (3.6) を与えられた (g, j) に対してみたす。(3.6) の解の一意性から, $K_1 \equiv K_2$ (\bar{D} 上) であり, $g_1(x) = g_2(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) が従わう。//

Proof of Theorem 2: 与えられた $p \in C^1_5[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ に対し, $c \in \mathbb{R}$ を十分小にとれば n_1 が even の時は $g(\frac{1}{2}) = 0$, $g'(\frac{1}{2}) = c$, n_1 が odd の時は $g(\frac{1}{2}) = c$, $g'(\frac{1}{2}) = 0$ を満たす (4.21) の解 $g \neq 0$, $g \in C^2[0, 1]$ が存在する。その時 g は (4.23) を満たし, (4.22) によつて (g, j) を定めれば Theorem 3 より $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$, $(g, j) \neq (p, R)$ が成立

> . //

Hochstadt [12] は $j = n$ の時 $(p, R) \in \hat{Q}_{p, R, n_1}$ (即ち $p \in Q_{p, R, n_1}$) であるとするとき, (4.21)なる $g \in C^2[0, 1]$ の存在して f が (4.22) 第一式のように与えられなくてはならないことを示している。けれども, (4.23) と (4.22) 第二式には条件っていない。彼の方法は境界値問題の Green 関数の構成法に基づくもので, 変形公式を用いた我々の方法とは異なる。彼はなお一般の有限集合 Σ に対して $(p, R) \in \hat{Q}_{p, R, \Sigma}$ ($j = n$) であるための必要条件を述べているが, 変形公式を用いればこれを必要十分条件に改良することも可能である。

§5. Outline of the proof of Theorem B

$\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$, $\mathcal{P}_{n_1} = \mathcal{P}(\cdot; p, R, \lambda_{n_1}(p, R))$ とおいて

$$(5.1) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g \mathcal{P}_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.2) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を考えよう。Theorem 3 によつ

$$(5.3) \quad Q_{p, R, n_1} \equiv \{ g \in C_0^1[0, 1] \mid \lambda_n(g, \mathcal{P}_{n_1}) = \lambda_n(p, R) \ (n \neq n_1) \}$$

$$= \{ p + 2 \frac{d}{dx} (g \mathcal{P}_{n_1}) \mid g \in C^2[0, 1]; (5.1), (5.2) \text{ 及び } \underbrace{g(0) = 0} \}$$

が成立し, Theorem B の証明は非線型方程式 (5.1) の研究に帰着される。

最初に

Theorem 4 $n_1=0$ ならば $\Omega_{p, R, n_1} = \{p\}$ □

を示す。

Lemma 7 (5.1) の解 $g \in C^2[0,1]$ は

$$(5.4) \quad g_{n_1} g' - g_{n_1}' g = (g_{n_1} g)^2 + \delta \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を示す。ここで $\delta \in \mathbb{R}$ は定数である。

Proof of Lemma 7:

$$(5.5) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\right) g_{n_1} = \lambda_{n_1} g_{n_1} \quad (0 \leq x \leq 1), \quad g_{n_1}(0)=1, \quad g_{n_1}'(0)=h$$

を思い起こすと, (5.1) より

$$(g_{n_1} g' - g_{n_1}' g)' = g_{n_1} g'' - g_{n_1}'' g = 2(g g_{n_1})' g_{n_1} = (2g g_{n_1})^2$$

を得る。//

Proof of Theorem 4: $n_1=0$ 故, $[0,1]$ 上 $g_{n_1} > 0$ である。 $g(0)=0$, (5.1), (5.2) なる $g \in C^2[0,1]$ が $g \equiv 0$ 以外に存在しないことを言

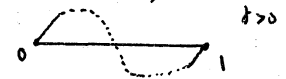
う。 $g \neq 0$ とする。 (5.4) において $\delta=0$ ならば $g(0)=g'(0)=0$ とな

り (5.1) の Cauchy 問題の一意性より $g \equiv 0$ となる。 $\delta \neq 0$ とすると

$g(x_0)=0$ なる $x_0 \in [0,1]$ に対し $\operatorname{sgn} g'(x_0) = \operatorname{sgn} \delta$ (一定) となるが,

これは $g(0)=0$ 及び (5.2) より導かれる $g'(0)=0$ に反す。 //

次に Theorem B の (ii) の証明にはいる。その前



に第3種境界値問題に対する Theorem 12 と同様にして, Dirichlet 問題に対する次の定理が成立することに注意しよう。 §2 の notation

に留意して,

Theorem 1* $g, p \in C_0^1[0,1]$ に対し, $\lambda_n^*(g) = \lambda_n^*(p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\{1, 2, \dots\}$ な i は $f \equiv p$ である。 \square

Theorem 2*. $p \in C^1_S [0, 1]$, $n_1 \in \mathcal{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ に対し,

$$(5.6) \quad Q_{p, n_1}^* = \{f \in C^1_S [0, 1] \mid \lambda_n^*(f) = \lambda_{n_1}^*(p) \ (n \in \mathcal{N}^* \setminus \{n_1\})\}$$

$\alpha' < \alpha$, $Q_{p, n_1}^* \neq \{p\}$ である。 \square

Theorem 3*. $\lambda_{n_1}^* = \lambda_{n_1}^*(p)$, $g_{n_1}^* = g^*(\cdot; p, \lambda_{n_1}^*(p))$ $\alpha' < \alpha$ 時, $f \in$

Q_{p, n_1}^* なるための必要十分条件は

$$(5.7) \quad \frac{d^2}{dx^2} f = (2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*) + p - \lambda_{n_1}^*) f \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.8) \quad f(1-x) = (-1)^{n_1} f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $f \in C^2 [0, 1]$ が存在して

$$(5.9) \quad f = p + 2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*)$$

が成立することである。 $f \in Q_{p, n_1}^*$ と $f \in C^2 [0, 1]$ のこの対応は 1対1
で、特に $f \neq 0$ なるものは $f \neq p$ である。 \square

これらの定理は Lemma 1~4 に対応する次の補題により証明される:

Lemma 1* 与えられた $p, f \in C^1 [0, 1]$ に対し

$$(5.10.1) \quad F_{xx} - F_{yy} + p(y)F = f(x)F \quad (\bar{D})$$

$$(5.10.2) \quad F(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (f(s) - p(s)) ds \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.10.3) \quad F(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $F = F(x, y) = F(x, y; f; p) \in C^2(\bar{D})$ が唯一存在する。 \square

Lemma 2* (第3変形公式). §2 Notation 2 の $g^*(x; p, \lambda)$ に関して,

$$(5.11) \quad g^*(x; f, \lambda) = g^*(x; p, \lambda) + \int_0^x F(x, y; f; p) g^*(y; p, \lambda) dy$$

が成り立つ。□

Lemma 3*. 簡単のため $g_n^*(x) = g^*(x; p, \lambda_n^*(p))$ ($n \in \mathcal{N}^*$) とおくと,
 $g_n^*(1-x) = (-1)^{n+1} g_n^*(x)$ ($n \in \mathcal{N}^*$, $x \in [0, 1]$) が成り立つ。□

Lemma 4*. $\{g_{2m}^*\}_{m=1}^{\infty}$, $\{g_{2m+1}^*\}_{m=0}^{\infty}$ は $L^2(0, \frac{1}{2})$ の完全直交系をなす。□

Theorem 1 \sim 3* は Theorem 1 \sim 3 と比べると似て異なるものがある。Theorem 1 \sim 3 においては境界条件は第3種であるがその反射係数 $k \in \mathbb{R}$ は固定せずに自由に動かして考えていた。それに対して Theorem 1 \sim 3* においては境界条件は Dirichlet に固定されている。それにもかかわるが Theorem 1 \sim 3* の結論は Theorem 1 \sim 3 の結論と全く対応している。その理由は Lemma 1* にある。適合性の条件によって (5.10.3) かつ $F(0,0) = 0$ であり, (5.10.2) における $F(0,0)$ を (3.6.2) のように自由に動かす余地がなくなっているのである。

順番から行くと, (5.11) を第2変形公式と呼ぶのが適当であるが, 筆者はすでにそれを別の意味で使ってしまった。[28] には第2変形公式を用いた針金の丸い輪における熱方程式などに対する筆者の Identification の研究が引用されている。

さて実は $\delta(A_{p,k,k}) = \{\lambda_n(p,k)\}_{n=0}^{\infty}$ と $\delta(A_p^*) = \{\lambda_n^*(p)\}_{n=1}^{\infty}$ には次のような関係があるのである:

Theorem 5. $p, \beta \in C_3^1[0,1]$ と $n_1 \in \mathcal{N}^* \equiv \{1, 2, \dots\}$ に対し,
 (5.12) $\lambda_n^*(p) = \lambda_n^*(\beta)$ ($n \in \mathcal{N}^* \setminus \{n_1\}$)

が成立すること、 $R \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(5.13) \quad \lambda_n(p, R) = \lambda_n(\beta, R) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \{n_1\})$$

が成立することとは同値である。更にこの時 $\beta \neq p$ であれば

$$(5.14) \quad \lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(\beta, R), \quad \lambda_{n_1}^*(\beta) = \lambda_{n_1}(p, R)$$

が成立する。□

この定理において、 $n_1=0$ の時は (5.12) を $\lambda_n^*(p) = \lambda_n^*(\beta)$ ($n \in \mathcal{N}^*$) と見なすことによると Theorem 1* によつてこれは $p \equiv \beta$ を導く。一方 Theorem 4 即ち Theorem B の (i) によつて (5.13) ($n_1=0$) から $p \equiv \beta$ を得る。このように解釈すると Theorem 5 の前半は $n_1=0$ に対しても成立する。

この奇妙な定理はそれ自身興味深いものであるばかりでなく、Theorem B の (ii) の証明に本質的な役割を果たす重要なものである。もはや紙数もホバーし当初の予定を変更して証明を省略しなればならぬのは残念であるが、現在準備中の筆者の論文を参照して下さるようお願いいたします。

Theorem 5 をもとにして Theorem B の (ii) の証明を考えてみよう。まず §2 の Corollary の (ii)、即ち

$$\text{Theorem 6. } n_1 \geq 1, \lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(p, R) \text{ ならば } \mathcal{Q}_{p, R, n_1} = \{p\} \quad \square$$

を示そう。実際この時 $\beta \in \mathcal{Q}_{p, R, n_1}$ は (5.13) をみたす。 $\beta \neq p$ であると Theorem 5 より (5.14) が成立するが、仮定 $\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(p, R)$ より $\lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(\beta, R)$ である。即ち、

$$\lambda_n(g, R) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathbb{N})$$

となり, Theorem 1 の $\beta \equiv p$ となり, べき値である。 //

次に,

Theorem 7. \mathbb{Q}_{p, R, n_1} の元 β と異なるものは高々 1 つ。 \square
を示そう。 実際 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}_{p, R, n_1}$, $\beta_l \neq p$ ($l=1, 2$) とすると Theorem 5

$$\lambda_n^*(\beta_1) = \lambda_n^*(p) = \lambda_n^*(\beta_2) \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{n_1\})$$

$$\lambda_n^*(\beta_1) = \lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(\beta_2)$$

であるから $\lambda_n^*(\beta_1) = \lambda_n^*(\beta_2)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) となり Theorem 1* より $\beta_1 \equiv \beta_2$ を得る。 //

以上 Theorem 6, 7 と Remark 1, 2 により, 結局 Theorem B の (ii) を示すには,

$$\text{Theorem 8. } n_1 \geq 1 \text{ ならば } p - 2\left(\frac{W'}{W}\right)' \in \mathbb{Q}_{p, R, n_1} \quad \square$$

を証明しさえすればよいことがわかる。ここではこの定理を証明するにあたり, $p - 2\left(\frac{W'}{W}\right)'$ が出て来た計算過程を述べてそれを替えたかと思う。証明の方向は, 以下の考察で自ずか明らかになるものと思われ。

以下では, $n_1 \geq 1$, $g \in \mathbb{Q}_{p, R, n_1}$, $g \neq p$ と仮定して, g のようなものでなければならぬかを見たい。 $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$, $g_{n_1} = g$ (すなわち $p, R, \lambda_{n_1}(p, R)$) とおくとこの時 Theorem 3 により,

$$(5.34) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.35) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $g \in C^2[0,1]$, $g \neq 0$ が存在して

$$(5.36) \quad g - p = 2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1})$$

となる。 - \exists Theorem 5 と \forall Theorem 3* に δ , $(\lambda_{n_1}^* = \lambda_{n_1}^*(p), g_{n_1}^* = g_{n_1}^*(\cdot; p, \lambda_{n_1}^*(p)))$ に対し,

$p, \lambda_{n_1}^*(p)$ に対し,

$$(5.37) \quad \frac{d^2}{dx^2} f = (2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*) + p - \lambda_{n_1}^*) f \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.38) \quad f(1-x) = (-1)^{n_1} f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $f \in C^2[0,1]$, $f \neq 0$ が存在して,

$$(5.39) \quad g - p = 2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*)$$

が成立する。 \therefore Theorem 5 の証明が実は

$$(5.40) \quad \lambda_{n_1}^*(g) = \lambda_{n_1}(p, R) (= \lambda_{n_1}), \quad g = \text{constant} \times g^*(\cdot; g, \lambda_{n_1}^*(g))$$

$$(5.41) \quad \lambda_{n_1}(g, R) = \lambda_{n_1}^*(p) (= \lambda_{n_1}^*), \quad f = \text{constant} \times f^*(\cdot; g, R, \lambda_{n_1}(g, R))$$

が成立する。

簡単のため以下 $\lambda_{n_1} (= \lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(g)) = \lambda$, $\lambda_{n_1}^* (= \lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(g, R)) = \lambda^*$, $g_{n_1} (= g(\cdot; p, R, \lambda_{n_1}(p, R)) = g$, $g_{n_1}^* (= g^*(\cdot; p, \lambda_{n_1}^*(p))) = g^*$, $f(\cdot; g, R, \lambda_{n_1}(g, R)) = f$, $f^*(\cdot; g, \lambda_{n_1}^*(g)) = f^*$ と書く。 $f = \text{constant} \times f^*$
 $g = \text{constant} \times g^*$ である。 (5.36), (5.39) より

$$(f g^*)' = \text{constant} \times (f^* g)'$$

であるが、 $x=0$ に $x=1$ と (左辺) $= R \times 0 + 1 \times 1 = 1$, $(f^* g)'(0) = 1 \times 1 + 0 \times R = 1$ であるので、

$$f g^* = f^* g + \text{constant}$$

となる。 $\forall x=0$ とおき、

$$(5.42) \quad \chi \varphi^* = \chi^* \varphi$$

を得る。比較定理によって φ^* と φ の一方の零点は他方の相隣
る零点の間に1つづつあることがわかり、

$$(5.43) \quad \chi^* = c \varphi^*, \quad \chi = c \varphi$$

ある $c \in C^2[0,1]$ が存在することばかり。

$$(5.44) \quad \alpha = \lambda - \lambda^*$$

に対し、 $\chi^* \chi - \chi^* \chi'' = -\alpha \chi^* \chi$ が成立する。これを (5.43) を代入
すると、

$$\begin{aligned} (c'' \varphi^* + 2c' \varphi^{*'} + c \varphi^{*''}) c \varphi - c \varphi^* (c'' \varphi + 2c' \varphi' + c \varphi'') \\ = -\alpha c^2 \varphi^* \varphi \end{aligned}$$

となるので、 $\varphi^{*''} \varphi - \varphi^* \varphi'' = \alpha \varphi^* \varphi$, $c \neq 0$ より

$$c'(\varphi^{*'} \varphi - \varphi^* \varphi') = -\alpha c \varphi^* \varphi$$

を得る。 $W = \varphi^{*'} \varphi - \varphi^* \varphi'$ とおくと、 $W' = \alpha \varphi^* \varphi$ より、

$$c'W = -cW' \quad \text{即ち} \quad (cW)' = 0$$

となる。 $\varphi(0) = \varphi^*(0) = 1$ とあるから、(5.43) より $c(0) = 1$, 又 $W(0) =$

$1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$ とあるから $cW = 1$, 即ち

$$(5.43') \quad \chi^* = \varphi^*/W, \quad \chi = \varphi/W$$

が成立する。

これを利用して、 $\varphi = \lambda^* + \frac{\chi''}{\chi}$ ($\because \lambda(\varphi, \varphi) = \lambda^*$) とおくと、
 $\varphi = \lambda - 2 \left(\frac{W'}{W} \right)'$ が出て来る。実際 (5.43') より

$$\frac{\chi''}{\chi} = \frac{\varphi''}{\varphi} + (-2 \varphi' W W' + 2 \varphi W'^2 - \varphi W W'') / W^2 \varphi$$

$$= p - \lambda + (-2g'w w' + 2g w'^2 - g w w'') / w^2 g$$

となり,

$$g = p - \lambda - \frac{2g'w'}{wg} + 2 \frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}$$

を得る。ここで $w' = d g * g$ を用いると, 簡単な計算から

$$g - p = 2 \left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} \right) = -2 \left(\frac{w'}{w} \right)'$$

が得られる。//

§6. Outline of the proof of Theorem C.

ここで §2 の Theorem C, RP 5

Theorem 9. $p, g \in C^1[0, 1], R, j \in \mathbb{R}, n_1 \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し

$$(6.1) \quad \lambda_n(g, j) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \{n_1\})$$

が

$$(6.2) \quad \frac{1}{2} g(0) - j^2 = \frac{1}{2} p(0) - R^2$$

であるならば

$$(6.3) \quad g \equiv p, \quad j = R$$

である。□

を示し, 更にその一般化について言及したい。

Proof of Theorem 9: §2 Notation 2 の $\mathcal{P}(\alpha; p, R, \lambda)$ を用い

出し, $p \in C^1[0, 1], R \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$(6.4) \quad \mathcal{P}(\alpha; p, R, \lambda) = \mathcal{P}'(1; p, R, \lambda) + R \mathcal{P}(1; p, R, \lambda)$$

とみると, 第1変形公式 (3.7) によつて

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda; \mathcal{B}, j) &= \mathcal{P}'(1; \mathcal{B}, j, \lambda) + j \mathcal{P}(1; \mathcal{B}, j, \lambda) \\ &= (\mathcal{P}'(1; p, R, \lambda) + K(1, 1; \mathcal{B}, j; p, R)) \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) + j \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) \\ &\quad + \int_0^1 \{K_x(1, y; \mathcal{B}, j; p, R) + j K(1, y; \mathcal{B}, j; p, R)\} \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) dy \end{aligned}$$

を得る。 $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$, $\mathcal{P}_{n_1} = \mathcal{P}_{n_1}(p, R)$ と書くと, \mathcal{P} の Theorem 3 の証明によつて, 仮定 (6.1) の ε と ε' は K は

$$(6.5) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g \mathcal{P}_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(6.6) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $g \in C^2[0, 1]$ を用いて,

$$(6.7) \quad K(x, y; \mathcal{B}, j; p, R) = g(x) \mathcal{P}_{n_1}(y)$$

と表わさねておくと, (4.6.1) によつて $K(1, 1; \mathcal{B}, j; p, R) = R - j$ であるので,

$$(6.8) \quad \mathcal{P}(\lambda; \mathcal{B}, j) = \mathcal{P}(\lambda; p, R) + (g'(1) + j g(1)) \int_0^1 \mathcal{P}_{n_1}(y) \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) dy$$

となる。一般に

$$\begin{aligned} &(\lambda - \mu) \int_0^1 \mathcal{P}(y; p, R, \mu) \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) dy \\ &= [\mathcal{P}(y; p, R, \mu) \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) - \mathcal{P}(y; p, R, \mu) \mathcal{P}'(y; p, R, \lambda)]_{y=0}^{y=1} \\ &= \mathcal{P}'(1; p, R, \mu) \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) - \mathcal{P}(1; p, R, \mu) \mathcal{P}'(1; p, R, \lambda) \end{aligned}$$

であるから, $a = g'(1) + j g(1) < a' < \infty$ 時,

$$\begin{aligned} (6.9) \quad (\lambda - \lambda_{n_1}) \mathcal{P}(\lambda; \mathcal{B}, j) &= (\lambda - \lambda_{n_1}) \mathcal{P}(\lambda; p, R) + a \{ \mathcal{P}'_{n_1}(1) \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) \\ &\quad - \mathcal{P}_{n_1}(1) \mathcal{P}'(1; p, R, \lambda) \} \\ &= (\lambda - \lambda_{n_1} - a \mathcal{P}_{n_1}(1)) \mathcal{P}(\lambda; p, R) \quad (\because \mathcal{P}'_{n_1}(1) = -R \mathcal{P}_{n_1}(1)) \end{aligned}$$

が成立する。従つて $\lambda \in L$

$$(6.10) \quad a \equiv g'(1) + jg(1) = 0$$

であるならば

$$(6.11) \quad \rho(\lambda; g, j) = \rho(\lambda; p, R)$$

となる。 $\rho(\cdot; p, R) = 0$ の零点全体は $\{\lambda_n(p, R)\}_{n=0}^{\infty}$ であり、いまだ単純 (192) であるので、

$$(6.12) \quad \lambda_n(g, R) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathcal{N})$$

となり、Theorem 1 により、(6.3) が成立す。

さて a を計算してみよう。Theorem 3 により

$$(6.13) \quad \beta - p = 2 \frac{d}{dx} (g \varphi_{n_1}), \quad j - R = g(0) (= (g \varphi_{n_1})(0))$$

であるので、

$$\begin{aligned} a &= g'(1) + jg(1) = \pm (g'(0) - jg(0)) \quad (\dots (6.6)) \\ &= \pm (g'(0) - jg(0)) \varphi_{n_1}(0) = \pm \{ (g \varphi_{n_1})'(0) - g(0) \varphi_{n_1}'(0) - jg(0) \varphi_{n_1}(0) \} \\ &= \pm \{ (g \varphi_{n_1})'(0) - (j+R)(g \varphi_{n_1})(0) \} \\ &= \pm \left\{ \frac{1}{2} (\beta(0) - p(0)) - (j+R)(j-R) \right\} \end{aligned}$$

となり、(6.2) の時確かに $a=0$ であることがわかる。 //

Theorem 9 (即ち Theorem C) は次のように一般化できることがわかる。その前に次の事実がある：

Theorem 10 $\Sigma = \{n_\ell \mid 1 \leq \ell \leq N\} \subset \mathcal{N}$ を有限集合、 $p, g \in C_S^1[0,1]$,

$R, j \in \mathbb{R}$ とする時、

$$(6.14) \quad \lambda_n(g, j) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \Sigma)$$

であるならば、

$$(6.15) \quad r \equiv \varphi - p \in C^2[0, 1]$$

である。□

これに留意して、

Theorem 11. $p, \varphi \in C_0^1[0, 1]$, $R, j \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$, $n_1 \neq n_2$ とする時、

$$(6.16) \quad \lambda_n(\varphi, j) = \lambda_n(p, R) \quad (n \neq n_1, n_2)$$

$$(6.17) \quad \frac{1}{2} r(0) = (j-R)(j+R) \quad (\Leftrightarrow (6.2))$$

$$(6.18) \quad \frac{1}{2} r''(0) = \frac{1}{2} (j-R)(p'(0) + \varphi'(0)) + (j+R)r'(0) - (j-R)(j+R)(j^2 + jR + R^2)$$

なるが、(6.3) が成立する。□

(6.16) を更にゆするめの時、それを recover するよじな (6.17)

(6.18) のよじな条件があるものと期待されるが未だ求め得ていない。但し、その時は p, φ の境界点 $x=0$ における微分可能性をもっと高く仮定する必要があるように思われる。

References

- [1] Ambarzumian, V., Z. Phys., 53 (1929) 690-695.
- [2] Borg, G., Acta Math., 78 (1946) 1-96.
- [3] Chadan, K., Sabatier, P.C., Inverse problems in quantum scattering theory, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1977.
- [4] Deift, P., Trubowitz, E., Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979) 121-251.
- [5] Faddeev, L.D., Uspehi Mat. Nauk. 14 (1959) no.4 (88) 57-119; English transl., J. Math. Phys., 4 (1963) 72-104.
- [6] —. Trudy Mat. Inst. Steklov 73 (1964) 314-336; English transl., A.M.S. Transl. ser. 2., 65 (1967) 139-166.

- [7] Flashka, H., Arch. Rat. Mech. Anal., 59 (1975) 293-304.
- [8] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., Pys. Rev. Lett., 19 (1967) 1095-1097.
- [9] Gel'fand, I.M., Levitan, B.M., Izvest. Akad. Nauk. SSSR 15 (1951) 309-360; English transl., A.M.S. Transl. ser. 2., 1 (1955) 253-304.
- [10] Goldberg, W., J. Math. Anal. Appl., 55 (1976) 549-554.
- [11] Hochstadt, H., Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965) 353-362.
- [12] —, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973) 715-729.
- [13] —, Lieberman, B., SIAM J. Appl. Math., 34 (1978) 676-680.
- [14] Kitamura, S., Nakagiri, S., SIAM J. Control & Optimization, 15 (1977) 785-802.
- [15] Krein, M.G., Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 87 (1952) 881-884.
- [16] Levin, B.Y., Distributions of zeros of entire functions,; English transl., A.M.S. Providence, Rhode Island, 1964.
- [17] Levinson, N., Mat. Tidsskr, B., (1949) 25-30.
- [18] Levitan, B.M., Gasymov, M.G., ; English transl., Russian Math. Surveys, 19 (1964) 1-63.
- [19] Levitan, B.M., Sargsjan, Introduction to spectral thory,; English transl., A.M.S. Providence, Rhode Island, 1975.
- [20] Magnus, W., Winkler, S., Hill's equation, Dover, New York, 1979.
- [21] Marchenko, V.A., Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 104 (1955) 695-698.
- [22] Mckean, H.P., Morebeke, P., Inv. Math., 30 (1975) 217-274.
- [23] Mizutani, A., to appear.
- [24] Picard, E., Leçons sur quelques types simples d'équation aux dérivées partielles, Paris-Imprimerie Gauthier-Villars, Paris, 1950. (山口昌哉・田村祐三訳, 偏微分方程式論, 現代数学社, 1977).
- [25] Suzuki, T., 熱方程式の逆問題, C&A セミナー会報 16, 13-20; 17, 10-11 (1981).
- [26] —, 熱方程式の逆問題, 数学 34 (1982) 55-64.
- [27] —, IN Glowinski, R., Lions, J.L. (eds.). Computing Me-

thods in Applied Sciences and Engineering, V., 659-668, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[28] —, to appear in "U.S.-Japan seminar on nonlinear partial differential equations in applied sciences!"

[29] —, Murayama, R., Proc. Japan Akad., 56 (1980) 259-263.

[30] 田中俊一・伊達悦朗, KdV 方程式, 紀伊國屋書店, 1979.

[31] 谷内俊政・西原功修, 非線形波動, 岩波書店, 1977.

[32] 戸田益和, 非線形格子力学, 岩波書店, 1978.