数理解析研究所講究録
第487巻 1983年 65-78

穴あきレンズ空間のR^4への埋蔵について

神戸大理　細川藤次 (Fujitsugu Hosokawa)
神戸大理　鈴木晋一 (Shin'ichi Suzuki)

3次元多様体であるレンズ空間が4次元ユークリッド空間R^4に埋蔵できないことはすでに良く知られている。[3], [6] また，穴あきレンズ空間$L(2n, q)_0$はR^4に埋蔵できないが[1]，穴あきレンズ空間$L(2n+1, q)_0$はR^4に埋蔵することができることもすでに知られている[9]。ここで，穴あきレンズ空間$L(p, q)_0$は、レンズ空間$L(p, q)$から1点の近傍を除いたものである。

Vを solid torus とし，kを∂V上の(p, q)型結び目とする。すなわち，p, qは整数で，mを∂V上の meridean，lを longitude とすると，kは∂V上で$pl+qm$にホモローグな単純閉曲線である。kを attaching 1-sphere とするVの 2-handle を$h^2(p, q)$とすると，穴あきレンズ空間$L(p, q)_0$は Heegaard 分解$V \cup h^2(p, q)$で表される。[7]

また，$L(p, q)_0$と$L(p', q')_0$とが同相になるのは，$p=p'$で

$$q \equiv \pm q' \pmod p \quad \text{または} \quad qq' \equiv \pm 1 \pmod p$$

が成立することであることも良く知られている。

この論文では、R^4に埋蔵された穴あきレンズ空間が，R^4の中でどんな位置にあるかを調べることを目的とする。

ϕを$L(p,q)_0 \equiv V \cup h^2(p,q)$ からR^4への同相写像とする。$\phi(V)$はR^4の中の solid torus であるが，これはR^4における ambient isotopy $\{\eta_u\}_{u\in I}$ によって、超平面$R^3[0]$の中の平凡な solid torus $V_0 = \eta_1(\phi(V))$ に移すことができる。

ここで，R^4を$R^3\times[-\infty,\infty]$ と考え，$R^3\times(t)$を$R^3[t]$で表すことにする。

m_0を∂V_0の meridean，l_0を∂V_0の prefered longitude とする。つまり，m_0はV_0の中で円板の境界となり，l_0は$R^3[0]-\mathrm{Int}\,V$で円板の境界となっているとする。

このとき，$\eta_1\phi(m) = m_0$ ，$\eta_1\phi(l) = l_0 + \alpha m_0$ （α：整数）が一般に成り立つ。

このとき，2-handle $\eta_1\phi h^2(p,q)$ のV_0への attaching 1-sphere をk_0とすると，k_0は∂V_0上の$(p,q+\alpha p)$型結び目となる。

すなわち，$\eta_1\phi L(p,q)_0$ は，m_0, l_0に関して Heegaard 分解 $V_0 \cup h^2(p,q+\alpha p)$ を持つことがわかる。

$h^2(p,q+\alpha p)$を$D^2\times[-1,1]$ と考えると，attaching 1-sphere k_0 は$D^2\times 0$ の境界で，$D^2\times 0$ は$R^4-\mathrm{Int}\,V_0$ に proper に埋蔵

している円板となっている。

$\gamma, \phi L(p,q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p, q+\alpha p)$ が R^4 の中でどんな位置にあるかを調べるためには、2-handle $h^2(p, q+\alpha p)$ が、すなわち、$D^2 \times 0$ が R^4 の中でどんな位置にあるかを調べればよいことがわかる。

定理1. 穴あきレンズ空間 $L(p,q)_0$ が R^4 に埋蔵されているとすると、埋蔵写像 ϕ は次の条件をみたすようにすることができる。

(1) $\phi L(p,q)_0$ は Heegaard 分解 $V_0 \cup h^2(p, q+\alpha p)$ を持つ。V_0 は $R^3[0]$ の平凡な solid torus で、2-handle $h^2(p, q+\alpha p)$ の attaching 1-sphere k_0 は ∂V_0 上の $pl_0 + (q+\alpha p)m_0$ にホモローグな単純閉曲線である。

ここで、l_0, m_0 は ∂V_0 上の、それぞれ prefered longitude, meridean である。

(2) 2-handle $h^2(p, q+\alpha p)$ を $D^2 \times [-1, 1]$ とすると、$k_0 = \partial D^2 \times 0$ で、$D^2 \times 0$ は $R^4 - \mathrm{Int}\, V$ の中の locally flat な円板で、次の条件をみたしている。

- maximal bands $\subset R^3[2]$
- minimal bands $\subset R^3[-1] \cup R^3[1]$
- saddle bands $\subset R^3 \times (1, 2)$
- $(D^2 \times 0) \cap R^3[0] = k_0 \cup O_1 \cup \cdots \cup O_\mu$

ここで，O_i ($i=1,2,\cdots,\mu$) は *meridean* m_0 を V_0 の外へ少しずらした単純閉曲線で，$O_1\cup\cdots\cup O_\mu$ は平凡なからみ目になっている。図(1)

(3) $\left(D^2\times[-1,1]\right)\cap R^3[t]=\left(\left(D^2\times 0\right)\cap R^3[t]\right)\times[-1,1]$, $(-\infty<t<\infty)$

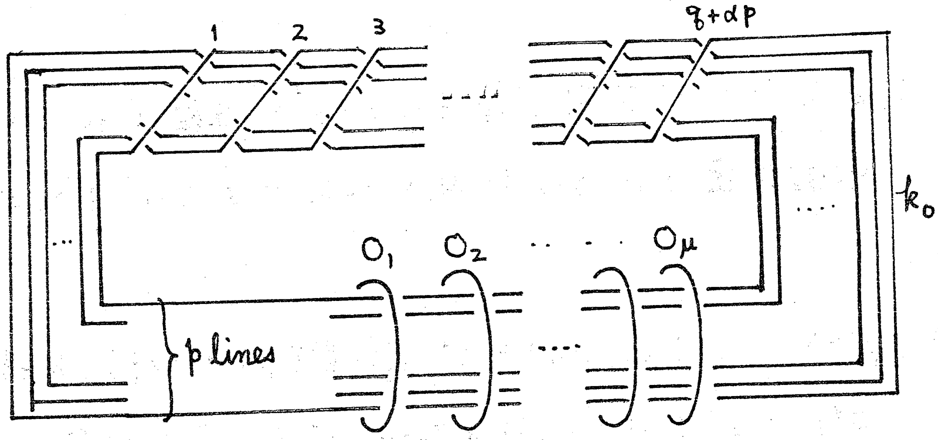


図 1　からみ目 $l(p,q+\alpha p,\mu)$

定理 1 の証明は省略する。

R^4 の中に埋蔵されている穴あきレンズ空間 $L(p,q+\alpha p)_0$ が定理 1 の条件をみたしているとき，$L(p,q+\alpha p)_0\equiv V_0\cup h^2(p,q+\alpha p)$ は R^4 中の標準的位置にある，ということにする。また，定理 1 に出てくるからみ目 $k_0\cup O_1\cup\cdots\cup O_\mu$ を $l(p,q+\alpha p;\mu)$ で表し，$L(p,q+\alpha p)_0$ のからみ目，ということにする。

$l(p,q+\alpha p;\mu)$ は $R^3\times[0,\infty)$ で *locally flat* な穴あき円板 $(D^2\times 0)\cap R^3\times[0,\infty)$ の境界となっている。つまり，*a slice link in the weak sense* [2] になっている。

さて，$L(p,q)_0$ を R^4 で標準的位置にある穴あきレンズ空間で，Heegaard分解 $V_0 \cup h^2(p,q)$ を持ち，$h^2(p,q)$ を $D^2\times[-1,1]$ ，$L(p,q)_0$ のからみ目 $l(p,q;\mu)=k_0\cup O_1\cup\cdots\cup O_\mu$ $=\partial((D^2\times 0)\cap R^3\times[0,\infty))$ とする。

$$l^+(p,q;\mu)=k_0^+\cup O_1^+\cup\cdots\cup O_\mu^+=\partial((D^2\times 1)\cap R^3[0,\infty))$$

$$l^-(p,q;\mu)=k_0^-\cup O_1^-\cup\cdots\cup O_\mu^-=\partial((D^2\times -1)\cap R^3[0,\infty))$$

とすると，これらは $R^3[0]$ 内のからみ目であり，

$$\mathrm{link}(l^+(p,q;\mu),\ l^-(p,q;\mu))=0$$

が成立している。また，$O^+=O_1^+\cup\cdots\cup O_\mu^+$，$O^-=O_1^-\cup\cdots\cup O_\mu^-$ はそれぞれ，$R^3(-\infty,0]$ 内で，μ この円板の境界で，たがいに交っていないから，

$$\mathrm{link}(O^+,\ O^-)=0$$

また，k_0^+，k_0^- は，それぞれ (p,q) 型の torus 結び目で，O_i^+，O_i^- は図1の O_i と同じ位置にあるから，

$$\mathrm{link}(k_0^+,k_0^-)=\varepsilon pq \quad (|\varepsilon|=1)$$

$$\mathrm{link}(k_0^+,O_i^-)=\mathrm{link}(O_i^+,k_0^-)=\varepsilon_i p \quad (|\varepsilon_i|=1,\ i=1,\cdots,\mu)$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}&\mathrm{link}(l^+(p,q;\mu),\ l^-(p,q;\mu))\\&=\mathrm{link}(k_0^+,k_0^-)+\sum_{i=1}^{\mu}\left(\mathrm{link}(k_0^+,O_i^-)+\mathrm{link}(O_i^+,k_0^-)\right)+\mathrm{link}(O^+,O^-)\\&=\varepsilon pq+2p\sum_{i=1}^{\mu}\varepsilon_i=p\left(\varepsilon q+2\sum_{i=1}^{\mu}\varepsilon_i\right)=0\end{aligned}$$

となる。このことから次の定理が成立する。

定理2　$L(p,q)_0 = V_0 \cup h^2(p,q)$ が R^4 で標準的位置にある穴あきレンズ空間で, $L(p,q)_0$ のからみ目が $l(p,q;\mu) = k_0 \cup O_1 \cup \cdots \cup O_\mu$ のとき, 次の(1), (2)が成立する。

(1)　q は偶数である。

(2)　$q = 2m$ とすると $\mu = |m| + 2d$, $(d \geq 0)$ で

$$\mathrm{link}(k_0, O_i) = -p \quad (i = 1, \cdots, |m| + d)$$

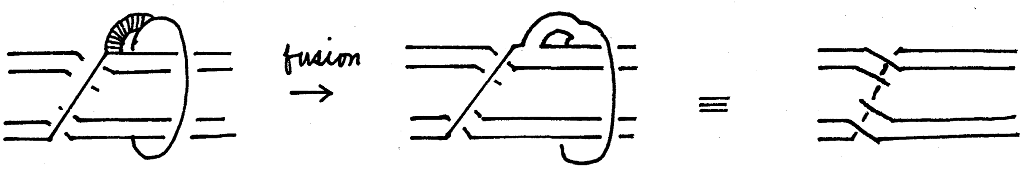
$$\mathrm{link}(k_0, O_i) = p \quad (i = |m| + d + 1, \cdots, \mu)$$

この定理から, 次の系を得る。

系　穴あきレンズ空間 $L(2n,q)_0$ は R^4 に埋蔵することはできない。

今迄の考察から, $L(p,q)_0$ が R^4 に標準的位置に埋蔵されていることと, からみ目 $l(p,q;\mu)$ が *a slice link in the weak sense* になることと同値になることがわかる。

さて, 図2のような *fusion* により, 上を通る線を下を通る線にすることができる, という操作を考えると, $l(p,q;\mu)$ が *a slice link in the weak sense* ということと, $l(p,q+2p;\mu+p)$ がそうなることと同値であることが容易にわかる。



図(2)

このことから、次の定理を得る。

定理3　$L(p,q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p,q)$ が R^4 で標準的位置にあるならば、$L(p,q\pm 2p)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p,q\pm 2p)$ も標準的位置に実現することが可能である。

定理4，$2n+1$, $2m$ がたがいに素な整数のとき，

(1) $L(2n+1,2m)_0 \equiv V_0 \cup h^2(2n+1,2m)$ は R^4 の標準的位置に実現することができる。

(2) からみ目 $l(2n+1,2m;|m|+2d)$ が a slice link in the weak sense となる整数 $d \geqq 0$ が存在する。

そこで，次の問題が出てくる。

問題　どんな整数 d に対して $l(2n+1,2m;|m|+2d)$ が a slice link in the weak sense となるか？

この問題がわかると、穴あきレンズ空間の境界となる2次元結び目のクラスがわかることになる。

しかし，一般的な解答は相当難しいようであるが，$d=0$ のときにある程度その本質があるように思われる。

ここでは、$d=0$ のとき、ある条件付きで解けることがわかることを示す。定理の証明は論文［10］を参照してもらうことにして，例で考え方の大筋を示すことにする。

$l(2n+1, 2m; |m|)$ が a slice link in the weak sense ならば、
$l(2n+1, 2m+2\alpha(2n+1); |m|+|\alpha(2n+1)|)$ もまたそうなることから、

$$-|2n+1| < 2m < |2n+1|$$

としてよく、また、torus結び目の性質より

$$0 < 2m < |2n+1|$$

のときを考えれば十分である。そこで、

$$2n+1 = 2am \pm r \quad , a>0,\ 0<r<m\ , r と 2m は素$$

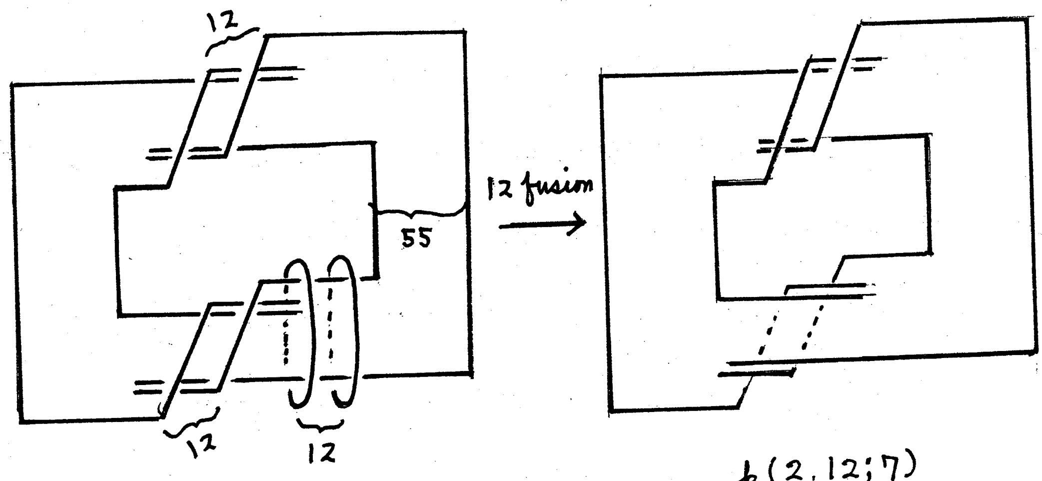
となる a, m, r を考えるとき、次の定理が成り立つ。

定理5. $m' \equiv m \pmod{r}$ かつ $r < m' < 2r$ とするとき、

$$m' - r \equiv \pm 1 \pmod{2r - m'}$$

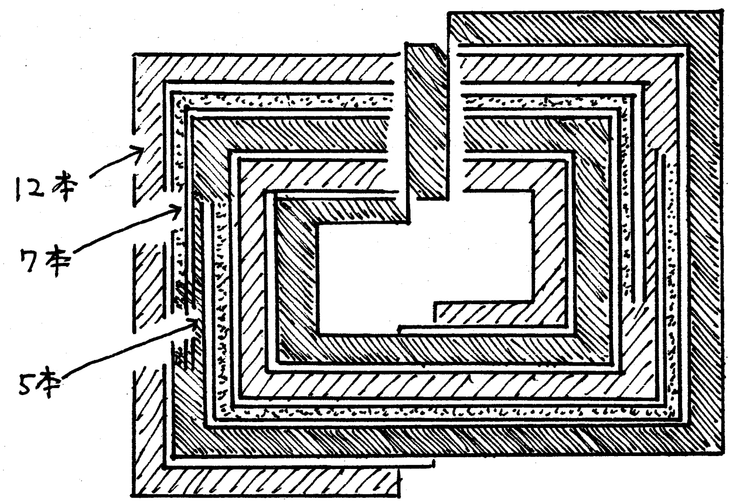
が成立するならば、$l(2am \pm r, 2m; m)$ は a slice link in the weak sense である。

例. $a=2$. $m=12$. $r=7$ で $2n+1 = 2am+r$ の場合: $l(55.24;12)$

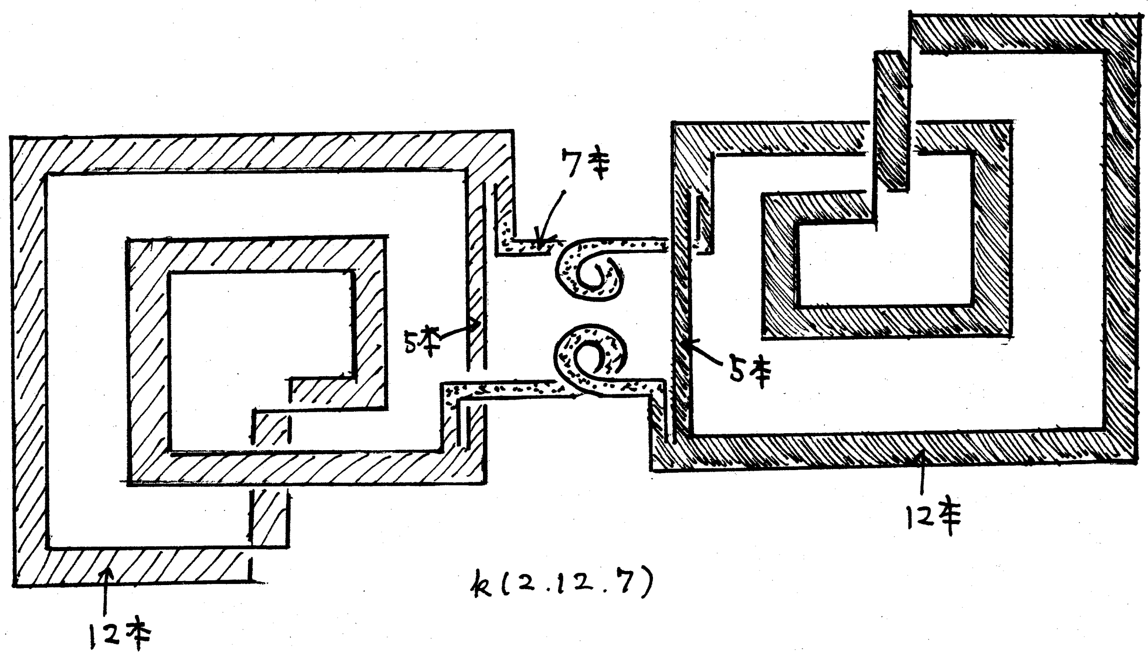


$l(55, 24; 12)$ 図3 $k(2.12;7)$

$l(55, 24; 12)$ に図2と同じ fusion を12回ほどこして図3の右の結び目 $k(2, 12, 7)$ にする。$k(2, 12, 7)$ を図4の上のように上を通る線と下を通る線に分けて，図4の下のようにずらし，ねじれを調節して図5のようにする。



$k(2.12.7)$



$k(2.12.7)$

図 4

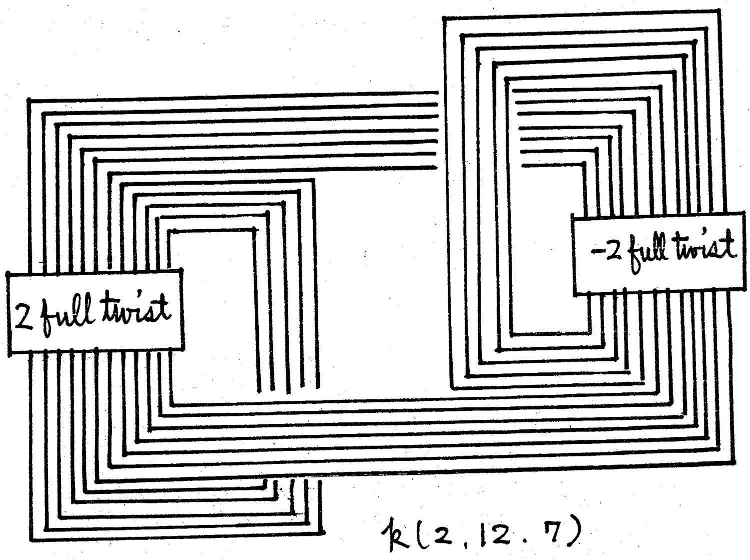


図 5

図5の真中に縦に通る左右5本ずつの線を ~~fusion~~ fission band でつなぎ，~~fusion~~ fission をすることにより，左右の twist を解消するようにする。そこで，fission band のつなぎ方が問題となる。この場合は図6のようにつなぎ，fission する。

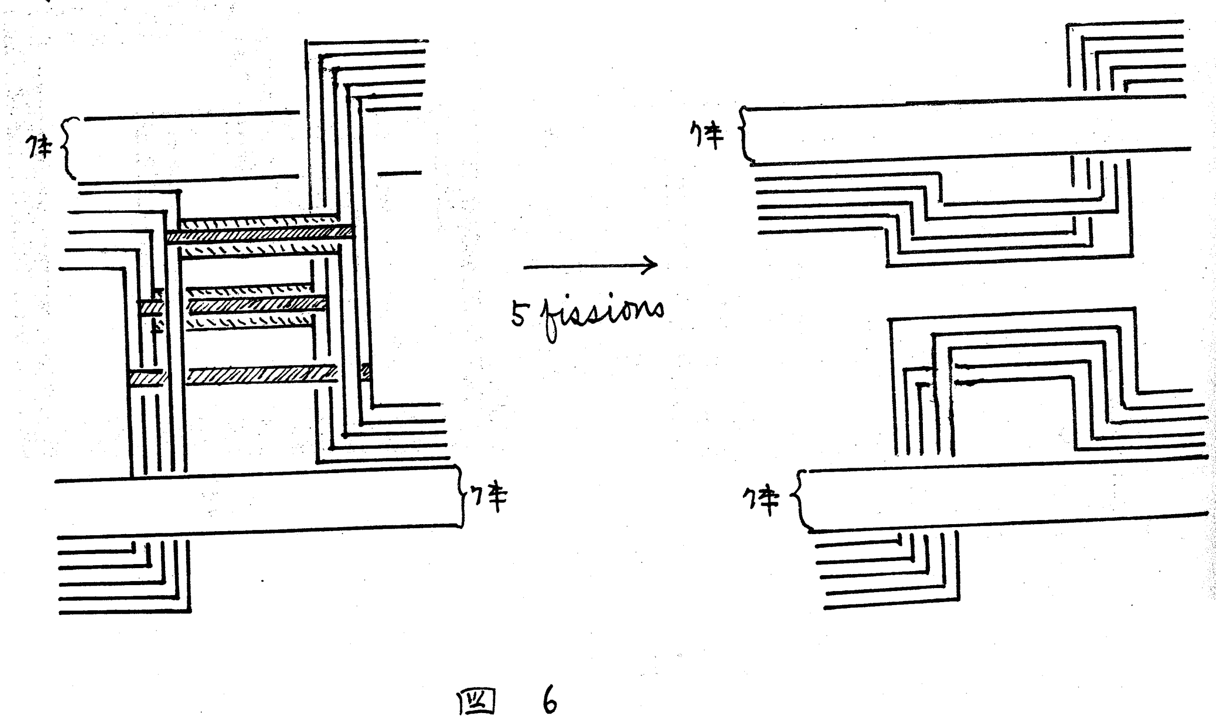


図 6

この5回の fission で components が6のからみ目になるが，そのうち4つの components は容易に分離し，図7の下のからみ目が残る。

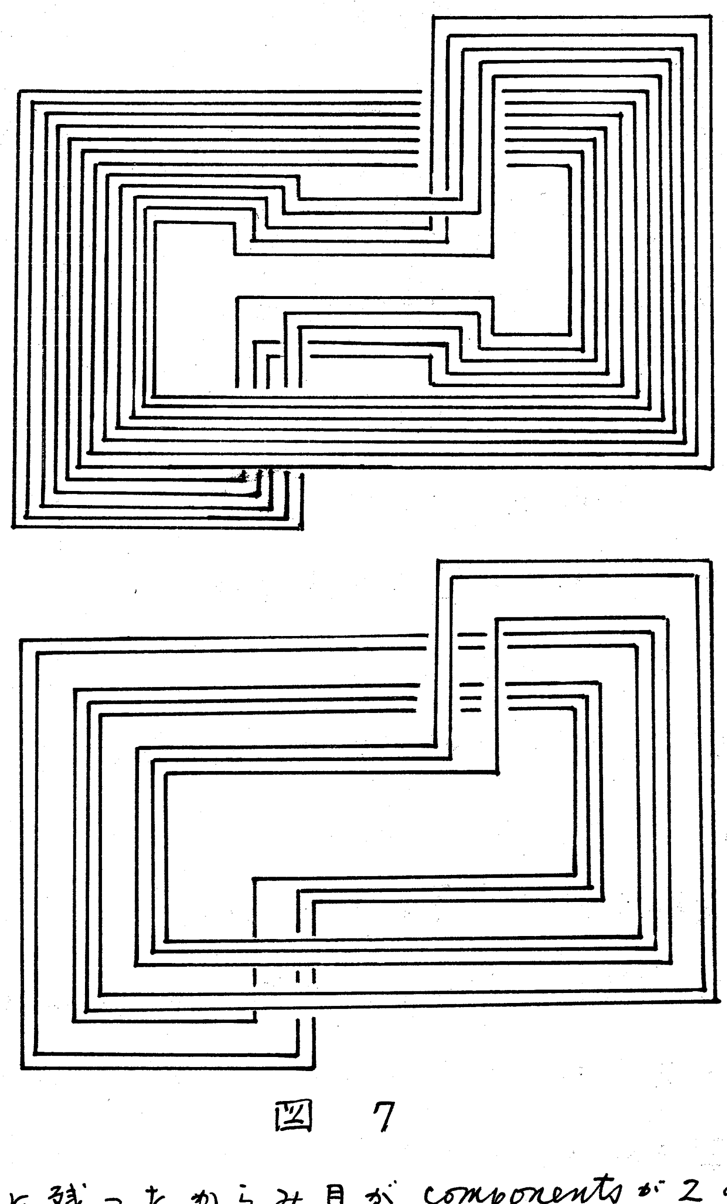
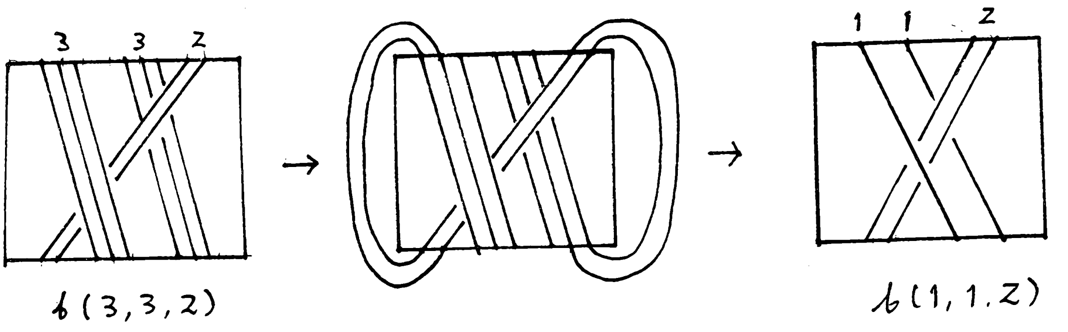


図　7

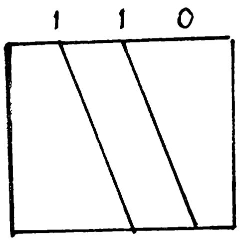
図7の下に残ったからみ目が components が2の平凡なからみ目になることがわかれば，$k(2, 12, 7)$ が a slice knot になることがわかり，最初の $l(55, 24; 12)$ が a slice link in the weak sense であることが示されたことになる。

図7の下のからみ目は、一般には複雑になるが、これをbraidになおしてみると、図8の(ア)となる。このbraid b(3,3,2)で表すことにする。b(3,3,2)は一部を上下つなぐ操作でb(1,1,2)に変形される。



(ア)

図 8



b(1,1,2)は最後はb(1,1,0)と右図のようになり、平凡なからみ目であることがわかる。

k(2,12,7)は上の証明ではribbon knotになっていることもわかる。

一般的に困難な点は、最初のfusionをどのようにしたらよいか？、という点と、次に図6で示したfission bandをどのようにつけたらよいか？という点がある。そのため、定理5のような条件がつけられた。

最初のfusionを同じようにした場合、fission bandをどのようにつけてもうまくいかない例もあるので、問題の解決は、更に工夫が必要である。

定理の証明など省略したものが多いが、詳細は[10]を参照されたい。

References

[1] D.B.A. Epstein : Embedding punctured manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 175~176.

[2] R.H. Fox : Some problems in knot theory, Topology of 3-Manifolds and Related Topics (M.K. Fort, Jr. (ed.)), Prentice Hall, N.J., (1962), 168~176

[3] W. Hantzsche : Einlagerung von Manigfaltigkeiten in Euklidische Räume, Math. Z., 43 (1938), 38~58.

[4] F. Hosokawa and A. Kawauchi : Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, Osaka J. Math., 16 (1979), 233-248.

[5] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki : Descriptions on surfaces in four-space I, Normal forms, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982), 75~125.

[6] H. Schubert : Knoten mit zwei Brücken, Math. Z., 65 (1956), 133~170.

[7] H. Seifert und W. Threlfall : Lehrebuch der Topologie, Teubner, Leipzig-Berlin, (1934)

[8] S. Suzuki : Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 4 (1976), 241-371

[9] E. C. Zeeman : On twisting spun knot, Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965), 471~495.

[10] F. Hosokawa and S. Suzuki : On Punctured Lens Spaces in 4-Space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982) 323-344.