数理解析研究所講究録
第 487 巻 1983 年 84-111

Periodic maps on compact surfaces II

上智大理工　横山和夫（Kazuo Yokoyama）

問題　compact connected な２次元多様体 M 上の period n の periodic map を分類せよ！

この問題に完全な解決を与える．すなわち

(1) どういう条件のとき periodic map は存在するか？

(2) （同値なものを除いて）いくつあるか？

(3) 与えられた２つの M 上の periodic map が同値であるかどうかを判定する Algorithm を求める。

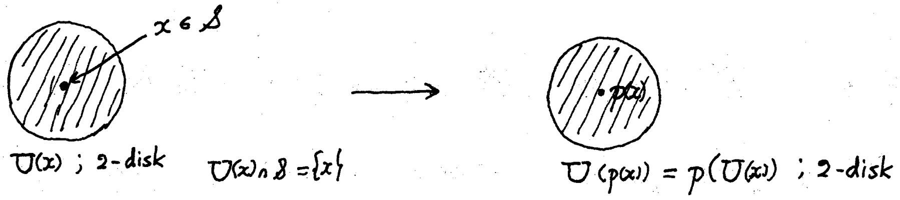
定義１　M, M' を２次元多様体　f を M 上の f' を M' 上の period n の periodic map とするとき，$fh = hf'$ をみたす同相写像 $h : M \longrightarrow M'$ が存在するとき f と f' は（あるいは (f, M) と (f', M') は）同値であるといい，$f \sim f'$（$(f, M) \sim (f', M')$）と表わす。

以下２次元多様体といえばことわらない限り compact で connected であるとする。

今．f が M 上の period n の periodic map のとき，$S_k(f) = \{x \in M\ ;\ f^k(x) = x$ かつ $f^i(x) \neq x\ (1 \le i < k)\}\ (1 \le k < n)$，$S(f) = \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k(f)$ とおく。その時 Whyburn [7] により M の f による orbit space $X = M/f$ は2次元多様体で，canonical map $p: M \longrightarrow X$ は $p(S(f)) = S$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering になっている．そこで $P_n(X, S) = \{f: M \longrightarrow M\ ;$ period n の periodic map $\mid$ (1) $M/f \cong X$ (2) canonical projection $p: M \longrightarrow X$ が branched set S をもつ n-fold cyclic branched covering$\}$ とおき，$\mathcal{P}_n(X, S) = P_n(X, S)/\sim$ と表わす．

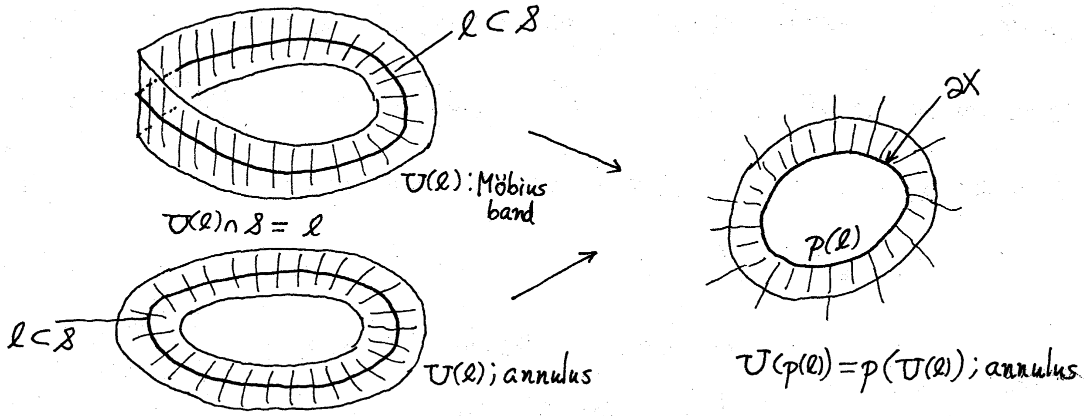
Prop. 1 $S(f)$ はお互いに交わらない (i) $\mathring{M}$ の孤立点 (ii) $\mathring{M}$ の simple loop (iii) simple proper arc からなり，$p: M \longrightarrow X$ によっては近傍も含めて次のようになる．

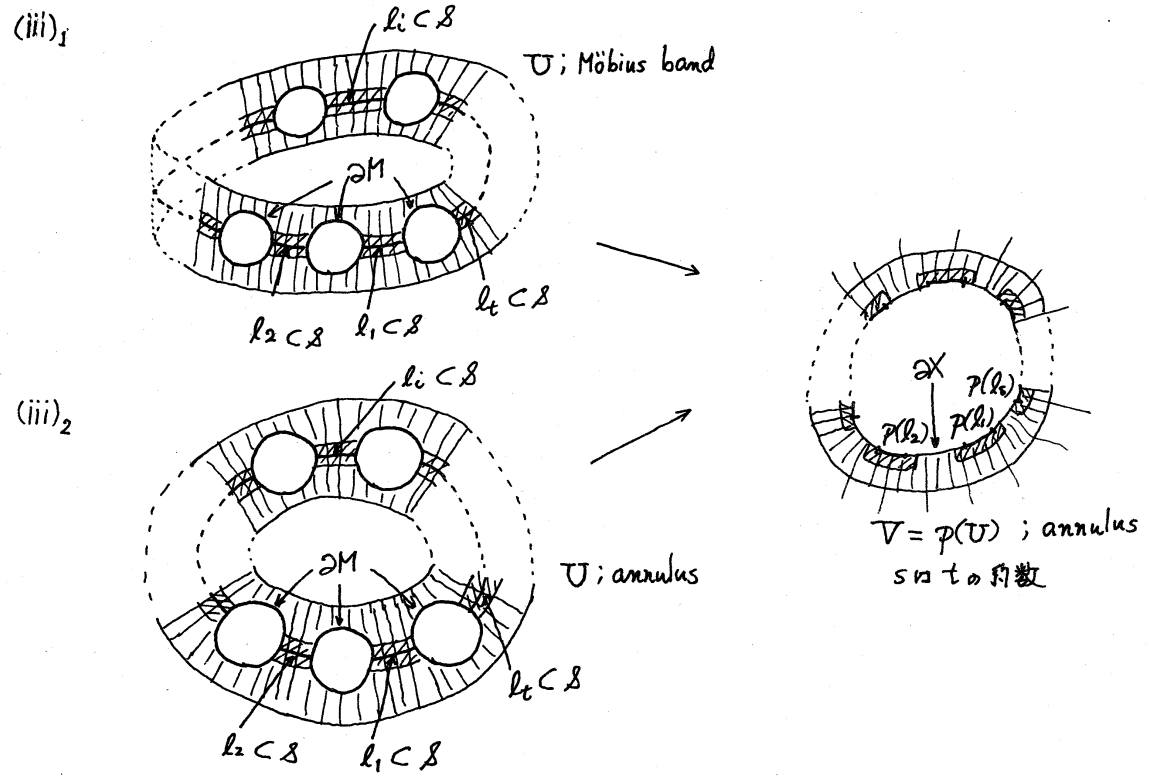
(i)



$(\mathrm{ii})_1$

$(\mathrm{ii})_2$



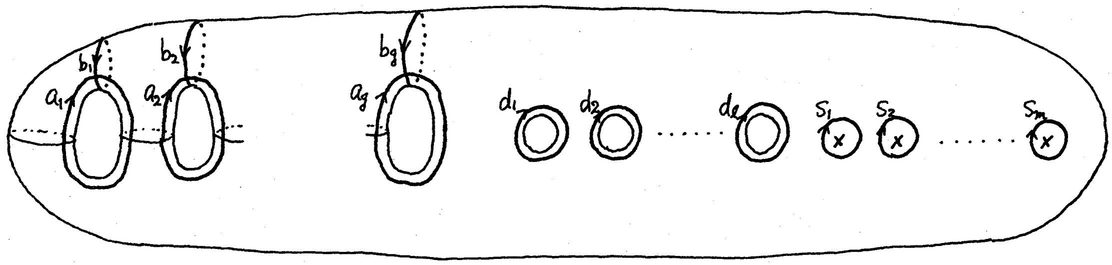


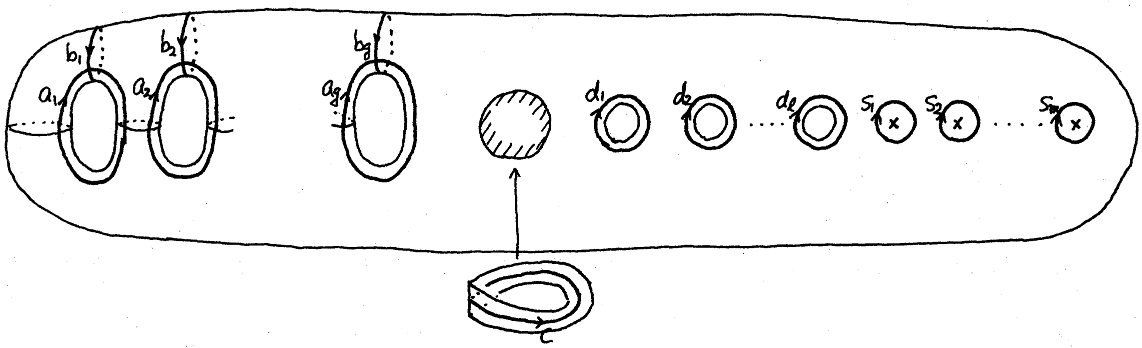
〈記号〉 $\mathcal{S}(f)$ のうち type(i) の点の集合を $\mathcal{S}^0(f)$, type(ii)(iii) の点の集合を $\mathcal{S}^1(f)$ と表わす.

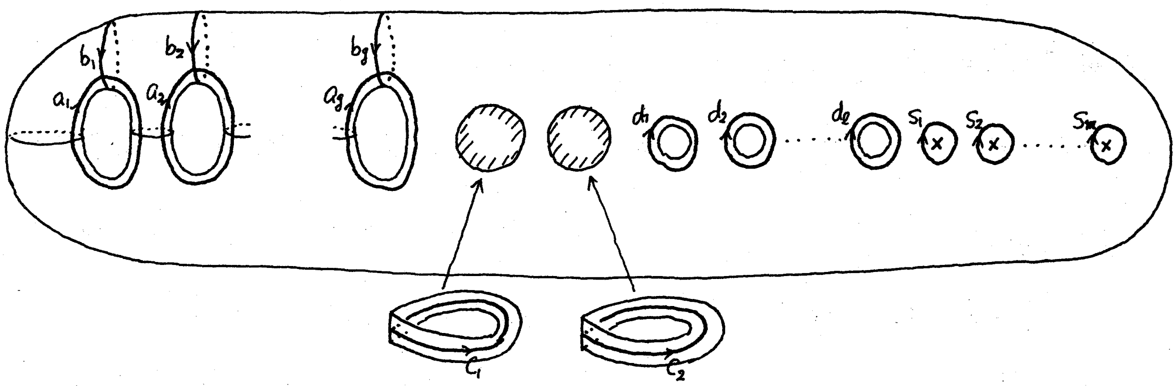
§ 1. $\mathcal{S}^1(f)=\phi$ の時, $P_n(X,S)$ の同値類の完全代表系の決定

X を genus g の orientable surface (genus $2g+1$ の non-orientable surface) < genus $2g+2$ の non-orientable surface > で boundary component の数を l, $S^0=p(\mathcal{S}^0(f))$ の点の個数を m として, X 上に図のように closed curve $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g$, (c) $\langle c_1, c_2\rangle$, $d_1, d_2, \cdots, d_l$, $s_1, s_2, \cdots, s_m$ をとるとき

$$H_1(X-S;\mathbb{Z})=\left\langle \begin{matrix} a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g, (c)\langle c_1, c_2\rangle \\ d_1, d_2, \cdots, d_l, s_1, s_2, \cdots, s_m \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} (2c+)\langle 2c_1+2c_2+\rangle \\ d_1+d_2+\cdots+d_l+s_1 \\ +s_2+\cdots+s_m=0 \end{matrix} \right\rangle$$







さて $[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ を $H_1(X-S)$ から $\mathbb{Z}_n$ の上への準同型写像 ω で $\omega(s_k)\neq 0$ をみたすものの集合とするとき，Smith [5] と branched covering の性質によって

Prop. 2　$\mathcal{P}_n(X,S)$ と $[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$-同値類は一対一の対応する。

定義 2　$\omega_1, \omega_2 \in [H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ に対して，同相写像 $h: (X,S) \longrightarrow (X,S)$ が存在して $h_* = (h|_{X-S})_*$ とおくとき，

$\omega_2 h_* = \omega_1$ をみたすとき ω_1 と ω_2 は <u>$\mathcal{A}$ー同値</u> という.

$\omega \in [H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ が与えられた時, $\omega(a_i) = \alpha_i$, $\omega(b_i) = \beta_i$ $(\omega(c) = \gamma)$ $\langle \omega(c_1) = \gamma_1, \omega(c_2) = \gamma_2 \rangle$, $\omega(d_j) = \delta_j$, $\omega(S_k) = \theta_k$ となる時, ω を $\mathbb{Z}_n$ の元の組 (下の条件をみたす)

$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, (\gamma) \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_j, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$

で表わすことにする。(逆にこの $\mathbb{Z}_n$ の元の組が与えられれば ω は一意に決まる。)

☆ $(2\gamma +) \langle 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \rangle \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod n$

☆ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g, (\gamma) \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ の最大公約数は mod n で 1 である。

その時 [2][3][6] によって ([8][9][11] 参照)

<u>Prop 3</u> X が orientable の時 (X, S) の Homeotopy group の generator は ρ, ρ_{12}, τ_1, μ_1, θ_{12}, η, ∂_j, σ_k, ∂_a, σ_a, である。

<u>Prop. 4</u> X が genus $2g+1$ の non-orientable surface の時 (X, S) の Homeotopy group の generator は ρ, ρ_{12}, τ_1, μ_1, θ_{12}, $\mathcal{Y}_1$, ∂_j, σ_k, ∂_a, σ_a, ∂_γ, σ_γ である。

<u>Prop. 5</u> X が genus $2g+2$ の non-orientable surface の時 (X, S) の Homeotopy group の generator は ρ, ρ_{12}, τ_1, μ_1, θ_{12}, $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ∂_j, σ_k, ∂_a, σ_a, ∂_{γ_1}, ∂_{γ_2}, σ_{γ_1}, σ_{γ_2} である。

これらの結果を使うと $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$-同値類の完全代表系は次のようになる。([8][9][11] 参照)

<u>定理 1</u>　X が compact orientable surface of genus g の時

(i) $\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \quad 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_l < n, \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m < n \quad \text{—㋑} \\ \quad \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod n \quad \text{—㋺} \end{array} \right\} \Big/ \underset{\eta}{\sim}$

if $g \geqq 1$;

(ii) $\left\{ \begin{array}{l} (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \quad ㋑ \quad ㋺ \\ \quad g.c.d.\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \equiv 1 \pmod n \end{array} \right\} \Big/ \underset{\eta}{\sim}$

if $g = 0$.

<u>定義 3</u>　(i) $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \underset{\eta}{\sim} (\delta_1', \delta_2', \cdots, \delta_l', \theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_m')$

$\Longleftrightarrow$ ・ $\delta_j = \delta_j'$ かつ $\theta_k = \theta_k'$ $(1 \leq j \leq l,\ 1 \leq k \leq m)$

or ・ $\left(\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{l_0} = 0 < \delta_{l_0+1} \leq \delta_{l_0+2} \leq \cdots \leq \delta_l < n \\ \delta_1' = \delta_2' = \cdots = \delta_{l_0'}' = 0 < \delta_{l_0'+1}' \leq \delta_{l_0'+2}' \leq \cdots \leq \delta_l' < n \end{array} \right.$

の時 $l_0 = l_0'$ で $n - \delta_j = \delta'_{l-j+l_0+1}$ $(l_0 + 1 \leq j \leq l)$

かつ

・ $n - \theta_k = \theta'_{m-k+1}$ $(1 \leq k \leq m)$

(ii) $(1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \underset{\eta}{\sim} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \delta_1', \delta_2', \cdots, \delta_l', \theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_m')$

$\Longleftrightarrow$ $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \underset{\eta}{\sim} (\delta_1', \delta_2', \cdots, \delta_l', \theta_1', \theta_2', \cdots, \theta_m')$

<u>定理 2</u>　X が compact non-orientable surface of genus $2g+1$ の時

(I) n : odd の時 $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$ − 同値類の完全代表系は

(i) $\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \quad 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_l < \frac{n}{2}, \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m < \frac{n}{2} \quad \text{—①} \end{array} \right.$

$$\left(2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{——} ② \right)$$

if $g \geqq 1$;

(ii) $$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \ ; \\ \qquad ① \qquad ② \\ g.c.d. \{\gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\}$$

if $g = 0$.

(II) n : even の時 $[H_1(X-S) ; \mathbb{Z}_n]^*$ の A − 同値類の完全代表系は 次の集合の disjoint union

(i)

$$Z_n(2g+1 ; l, m)_1^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \ ; \\ \qquad ① \qquad ② \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+1 ; l, m)_1^{*} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \ ; \\ \delta_l = \frac{n}{2} \text{ or } \theta_m = \frac{n}{2} \ , \quad 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} \quad \text{——} ③ \\ 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_l \leq \frac{n}{2} \ , \ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} \ \text{——} ①' \\ \qquad ② \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+1 ; l, m)_2^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \ ; \\ \gamma \ ; \text{odd} \ , \quad \delta_j \ ; \text{even} \ , \ \theta_k \ ; \text{even} \quad \text{——} ④ \\ \qquad ① \ , \ ② \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+1 ; l, m)_2^{*} = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \ ; \\ \quad ①' \quad ② \quad ③ \quad ④ \end{array} \right\}$$

if $g \geqq 1$;

(ii)

$$\mathbb{Z}_n(1\,;\,l,m)^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \qquad ① \quad ② \\ g.c.d.\{\gamma, \delta_1, \delta_2 \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2 \cdots, \theta_m\} \equiv 1 \pmod n \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(1\,;\,l,m)^{*} = \left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \delta_1, \delta_2 \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2 \cdots, \theta_m)\ ; \\ \quad ③ \quad ①' \quad ② \\ g.c.d.\{\gamma, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2 \cdots, \theta_m\} \equiv 1 \pmod n \end{array} \right\}$$

<u>定理3</u>　X が compact non-orientable surface of genus $2g+2$, $g \geq 1$

(I) n: odd の時　$[H_1(X-S)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ の A- 同値類の完全代表系は

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \underline{0}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \qquad\qquad ① \quad ② \end{array} \right\}$$

(II) n: even の時　$[H_1(X-S)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ の A- 同値類の完全代表系は次の集合の disjoint union

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\,l,m)_1^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \underline{0}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \qquad\qquad ① \quad ② \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\,l,m)_1^{*} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \underline{0}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \qquad\quad ①' \quad ② \quad ③ \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\,l,m)_2^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \underline{1}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \qquad\quad ① \quad ④ \\ 2 + 2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod n \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\,l,m)_2^{*} = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, \underline{1}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\ ; \\ \qquad\quad ①' \quad ③ \quad ④ \\ 2 + 2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod n \end{array} \right\}$$

定理４　X が compact non-orientable surface of genus 2 (Klein bottle)

(I) n : odd の時 $[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$－同値類の完全代表系は

$$\left\{\begin{array}{l}(\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \text{①}\\ 0\le\gamma_1\le\gamma_2<n,\quad \gamma_1+\gamma_2\le n,\quad 0\le\gamma_1\le\left[\frac{\alpha}{2}\right] \text{ —— ⑤}\\ 2\gamma_1+2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_l+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)\text{ —⑥}\\ g.c.d.\{\gamma_1,\gamma_2,\delta\}=1 \text{ ——— ⑦}\end{array}\right\}$$

(II) n : even の時 $[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$－同値類の完全代表系は

次の集合の disjoint union

$$\mathbb{Z}_n(2;l,m)^\circ=\left\{\begin{array}{l}(\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \text{①}\quad\text{⑤}\quad\text{⑥}\quad\text{⑦}\end{array}\right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2;l,m)^*=\left\{\begin{array}{l}(\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \delta_l=\frac{n}{2}\ \text{or}\ \theta_m=\frac{n}{2},\quad 0\le\gamma_1\le\gamma_2<\frac{n}{2},\ \gamma_1+\gamma_2\le\frac{n}{2},\ 0\le\gamma_1\le\left[\frac{\alpha}{2}\right]\\ \text{①}'\quad\text{⑥}\quad\text{⑦}\end{array}\right\}$$

但し　$\delta=g.c.d.\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,n\}$

$\alpha=g.c.d.\{\delta,\gamma_1+\gamma_2\}$

$[x]$ は Gauss 記号

《Notation》

$P_n=\{(f,M)$; M ; compact surface, f ; M 上の period n の periodic map, $\mathcal{S}^1(f)=\phi\}$.

$P_n^+=\{(f,M)\in P_n$: M ; orientable, f ; orientation preserving$\}$

$P_n^- = \{ (f, M)\ ;\quad M ; \text{orientable}\qquad f\ ; \text{orientation reversing} \}$

$P_n^\circ = \{ (f, M)\ ;\quad M\ ; \text{non-orientable} \}$

<u>Prop. 6</u> 各々に対応する $P_n(X,S)$ の元 (f,M) は右の集合に属する.

(定理1) に対応する $P_n(X,S)$ の元 (f,M) $\longrightarrow$ P_n^+

(定理2) (I) n ; odd $\longrightarrow$ P_n°

(II) n ; even (i) $g \geq 1$ $\quad Z_n(2g+1; l, m)_1^\circ,\ Z_n(2g+1; l, m)_1^*$ $\longrightarrow$ P_n°

$Z_n(2g+1; l, m)_2^\circ,\ Z_n(2g+1; l, m)_2^*$ $\longrightarrow$ P_n^-

(ii) $g = 0$ $\quad \delta$; odd $\longrightarrow$ P_n°

δ ; even $\longrightarrow$ P_n^-

(定理3) (I) n ; odd $\longrightarrow$ P_n°

(II) n ; even $\quad Z_n(2g+2; l, m)_1^\circ,\ Z_n(2g+2; l, m)_1^*$ $\longrightarrow$ P_n°

$Z_n(\qquad)_2^\circ\quad Z_n(\qquad)_2^*$ $\longrightarrow$ P_n^-

(定理4) (I) n ; odd $\longrightarrow$ P_n°

(II) n ; even $\quad \delta$; odd or δ ; even かつ $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; odd $\longrightarrow$ P_n°

δ ; even かつ γ ; even $\longrightarrow$ P_n^-

但し $\delta = \text{g.c.d.}\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m, n\}$. ([9]参照)

§2 $\mathcal{S}^1(f) = \phi$ の時の periodic map の分類

この節では§1の結果を使って P_n の分類を行なう. まず <u>$P_n^\varepsilon(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}})$</u> を次の条件をみたす P_n^ε の元 (f, M) の集合とする。(但し $\varepsilon = +, -$ or 0, $\tilde{\mathfrak{l}} = (\tilde{l}_a)_{a|n}$ $\tilde{\mathfrak{m}} = (\tilde{m}_a)_{\substack{a|n \\ a \neq n}}$: ベクトル)

(イ) M は genus $\tilde{g}$ で boundary components は $D_1, D_2, \cdots, D_{\tilde{\ell}}$ からなる.

(ロ) $\mathcal{S}(f)$ は $\mathring{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点 $S_1, S_2, \cdots, S_{\tilde{m}}$ からなる.

(ハ) $\tilde{\ell}_a$ は $\{ D_j \ ; \ f^a(D_j) = D_j$ かつ $f^b(D_j) \neq D_j \ (1 \le b < a) \}$ の元の個数

$\tilde{m}_a$ は $\mathcal{S}_a^o(f)$ に属する点の個数.

さて $(f, M) \in \mathcal{P}_n^{\varepsilon}(\tilde{g}, \tilde{\ell}, \tilde{m}, \tilde{\mathfrak{t}}, \tilde{\mathfrak{m}})$ をとるとき，明らかに

(1) $\tilde{\ell} = \sum_{a|n} \tilde{\ell}_a$, $\tilde{m} = \sum_{\substack{a|n \\ a\neq n}} \tilde{m}_a$

(2) $\tilde{\ell}_a, \tilde{m}_a$ は a の倍数 (そこで $\ell_a = \frac{\tilde{\ell}_a}{a}$, $m_a = \frac{\tilde{m}_a}{a}$ とおく)

$X = M/f$ とすれば genusは $\varepsilon = +$ のとき $g = \frac{1}{2n}\{2\tilde{g} - 2 + \sum_{a|n}(1-\frac{n}{a})(\tilde{\ell}_a + \tilde{m}_a)\} + 1$

$\varepsilon = -$ のとき $g = \frac{1}{n}\{2\tilde{g} - 2 + \sum_{a|n}(1-\frac{n}{a})(\tilde{\ell}_a + \tilde{m}_a)\} + 2$

$\varepsilon = 0$ のとき $g = \frac{1}{n}\{\tilde{g} - 2 + \sum_{a|n}(1-\frac{n}{a})(\tilde{\ell}_a + \tilde{m}_a)\} + 2$

∂X の components の数は $\ell = \sum_{a|n} \ell_a$.

$p(\mathcal{S}(f)) = S$ の点の数は $m = \sum_{\substack{a|n \\ a\neq n}} m_a$.

$\mathcal{P}^{\varepsilon}(\tilde{g}, \tilde{\ell}, \tilde{m}, \tilde{\mathfrak{t}}, \tilde{\mathfrak{m}}) \neq \phi$ であるためには $(f, M) \in \mathcal{P}_n(X, S)$ $(\exists X, S)$ より

Prop. 7 $\mathcal{P}^{\varepsilon}(\tilde{g}, \tilde{\ell}, \tilde{m}, \tilde{\mathfrak{t}}, \tilde{\mathfrak{m}}) \neq \phi$ ならば (1), (2) と

(3) g が負でない整数 $(\varepsilon = +)$, g が正の整数 $(\varepsilon = -$ or $0)$ が成立

先ず $\varepsilon = +$ の時を扱おう. この時定理1 の完全代表系に条件⊗ $\ell_a = \{ \delta_j \ ; \ g.c.d. \{\delta_j, n\} = a \}$ の元の個数, $m_a = \{ \theta_k \ ; \ g.c.d. \{\theta_k, n\} = a \}$ の元の個数 をつけ加えたものの数を求めればよい. したがって ([8] 参照)

定理 5 Prop. 7 の条件のもと $\mathcal{P}_n^{+}(\tilde{g}, \tilde{\ell}, \tilde{m}, \tilde{\mathfrak{t}}, \tilde{\mathfrak{m}})$ の元の個数は

(i) $\frac{1}{2} C(n ; \mathfrak{t}, \mathfrak{m}) + \frac{1}{2} Q(n ; \mathfrak{t}, \mathfrak{m}) = C^*(n ; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if $g > 0$

(ii) $\sum_{g|n} \mu(g)\, C^*(\frac{n}{g}\,;\, \mathbb{l}^{(g)}, \mathbb{m}^{(g)})$ if $g=0$. (但し $\mu(g)$ は Möbius 関数, $\mathbb{l}^{(g)} = (l_{a'}^{(g)})_{a'|n'}$, $\mathbb{m}^{(g)} = (m_{a'}^{(g)})_{\substack{a'|n' \\ a'\neq n'}}$; ベクトルで ($g\nmid a$ のとき $l_a=0$, $m_a=0$) $g|a$ のとき $l_{a'}^{(g)} = l_a$, $m_{a'}^{(g)} = m_a$ $a'=\frac{a}{g}$, $n'=\frac{n}{g}$ である.) ($C(n\,;\,\mathbb{l},\mathbb{m})$ $Q(n:\mathbb{l},\mathbb{m})$ は下記)

$$D(n:\mathbb{l},\mathbb{m}) = \left\{ \begin{array}{l} (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)\,; \\ \text{定理1の①}\quad \text{⑫}\ ,\ \text{条件⊗} \end{array} \right\}$$

の元の個数が $C(n:\mathbb{l},\mathbb{m})$ であるが, これは n の素因数分解を $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$, n の約数 a を $a = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_s^{f_s}$ ($0 \le f_1 < e_1$, $0 \le f_2 < e_2, \cdots, 0 \le f_v < e_v$, $f_{v+1} = e_{v+1}, \cdots, f_s = e_s$) とするとき,

$$g_a(x, y_a, z_a) = g_a(x,y,z) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{a}-1} (1 + y x^{ja} + y^2 x^{2ja} + \cdots)(1 + z x^{ja} + z^2 x^{2ja} + \cdots)$$

$$f_a(x, y_a, z_a) = f_a(x,y,z) = g_a(x,y,z) \prod_{i=1}^{v} g_{p_i a}^{-1}(x,y,z) \prod_{1\le i<j\le v} g_{p_i p_j a}(x,y,z)$$

$$\cdots\cdots \prod_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_t\le v} g_{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_t} a}^{(-1)^t}(x,y,z) \cdots\cdots g_{p_1 p_2 \cdots p_v a}^{(-1)^v}(x,y,z)$$

とおき $\mathbb{Y} = (y_a)_{\substack{a|n \\ a\neq n}}$ $\mathbb{Z} = (z_a)_{\substack{a|n \\ a\neq n}}$ なるベクトルに対して $F(x, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}) = \prod_{\substack{a|n \\ a\neq n}} f_a(x, y_a, z_a)$ とおけば, これが母関数である. すなわちこの関数の $x^{in} \cdot \prod_{\substack{a|n \\ a\neq n}} y_a^{l_a} z_a^{m_a}$ の係数 $K(i)$ の和が $C(n:\mathbb{l},\mathbb{m})$ だから $\zeta_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$, $\zeta_i = \zeta_1^i$ として $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(\zeta_i, \mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ の $\prod_{\substack{a|n \\ a\neq n}} y_a^{l_a} z_a^{m_a}$ の係数が $C(n:\mathbb{l},\mathbb{m})$ である. また

$$Q(n\,;\,\mathbb{l},\mathbb{m}) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{a|n \\ 0<a<\frac{n}{2}}} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + \frac{l_a}{2} - 1}{\frac{l_a}{2}} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + \frac{m_a}{2} - 1}{\frac{m_a}{2}} & \text{if } l_a, m_a : \text{even} \ (0 < {}^\forall a < \frac{n}{2}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である.

この定理によって $\mathcal{P}_n^+(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{M}})$ の個数が 0 の時 $=\phi$ 正の時 $\neq\phi$ である. 簡単な時,例えば n が素数のときに述べておくと.

<u>系 1</u>　n : odd prime の時 $P_n^+(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{M}}) \neq \phi$ である必要十分条件は • $\tilde{\mathfrak{l}} - \tilde{\mathfrak{l}}_1 \equiv 0 \pmod{n}$ • $\tilde{\mathfrak{l}}_1 + \tilde{\mathfrak{m}} \neq 1$ • $\tilde{\mathfrak{g}} + n \times \min\{\tilde{\mathfrak{l}}_1 + \tilde{\mathfrak{m}}, 1\} + \frac{1-n}{2}(\tilde{\mathfrak{l}}_1 + \tilde{\mathfrak{m}}) - 1$ が ≥ 0 かつ $\equiv 0 \pmod{n}$ であって, その時 $\mathcal{P}_n^+(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{M}})$ の(元の)個数は

$$\frac{1}{2}C(n\,;\,l_1\ m) + \frac{1}{2}Q(n\,;\,l_1, m)$$

である。但し

$$C(n;l_1,m) = \begin{cases} \frac{1}{n}\left\{\binom{l_1+n-2}{n-2}\binom{m+n-2}{n-2} + n - 1\right\} & l_1 \equiv 0,\ m \equiv 0 \pmod{n} \text{ or } l_1 \equiv 1,\ m \equiv 1 \pmod{n} \\ \frac{1}{n}\left\{\binom{l_1+n-2}{n-2}\binom{m+n-2}{n-2} - n + 1\right\} & l_1 \equiv 0,\ m \equiv 1 \pmod{n} \text{ or } l_1 \equiv 1,\ m \equiv 0 \pmod{n} \\ \frac{1}{n}\binom{l_1+n-2}{n-2}\binom{m+n-2}{n-2} & \text{その他} \end{cases}$$

$$Q(n;l_1,m) = \begin{cases} \dbinom{\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{l_1}{2} - 1}{\frac{l_1}{2}}\dbinom{\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{m}{2} - 1}{\frac{m}{2}} & l_1, m : \text{even} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

<u>系 2</u>　$n=2$ の時 $P_2^+(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{M}}) \neq \phi$ である必要十分条件は • $\tilde{\mathfrak{l}} - \tilde{\mathfrak{l}}_1$; even • $\tilde{\mathfrak{l}}_1 + \tilde{\mathfrak{m}}$; even • $\tilde{\mathfrak{g}} + 2 \times \min\{\tilde{\mathfrak{l}}_1 + \tilde{\mathfrak{m}}, 1\} - \frac{\tilde{\mathfrak{l}}_1 + \tilde{\mathfrak{m}}}{2} \geq 1$ で odd であって, その時 $\mathcal{P}_2^+(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{M}})$ の(元の) 個数は 1 つである.

次に $\varepsilon = -$ の時であるが, このときは ([9]参照)

<u>定理6</u>　Prop. 7 の条件のもと $P_n^-(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{M}}) \neq \phi$ である必要十分条件は n : even であってかつ

(A) g ; odd $\geqq 3$ のとき

(4) (i) $\frac{n}{2}$; odd のとき $\forall a|n$ (a ; odd) に対して $l_a=0$ かつ $m_a=0$.

(ii) $\frac{n}{2}$; even のとき $\forall a|n$ (a ; odd) に対して $l_a=0$ かつ $m_a=0$.

かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a:\text{even} \\ a/2\,;\,\text{odd}}} (l_a + m_a)$ が odd.

(B) $g=1$ のとき (4)

かつ $(6)'$ $\frac{1}{2} \times$ g.c.d.$\{a$; $l_a \neq 0$ または $m_a \neq 0\} = 1$

(C) g ; even のとき (i) $\frac{n}{2}$; odd のとき $\forall a|n$ (a ; odd) に対して $l_a=0$ かつ $m_a=0$.

(ii) $\frac{n}{2}$; even のとき $\forall a|n$ (a ; odd) に対して $l_a=0$ かつ $m_a=0$.

かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a:\text{even} \\ a/2\,;\,\text{odd}}} (l_a + m_a)$ が even

そしてこの時 $\mathcal{O}_n^-(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{\mathfrak{t}}, \tilde{\mathfrak{m}})$ の個数は

☆ $g \neq 2$ の時

$$\begin{cases} C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m}) & \text{if (i) } \frac{n}{2}\text{; odd または (ii) } \frac{n}{2}\text{; even かつ } l_{n/2}+m_{n/2} \neq 0 \\ 2 \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m}) & \text{if (ii) } \frac{n}{2}\text{; even かつ } l_{n/2}=m_{n/2}=0 \end{cases}$$

☆ $g=2$ の時

$\left\{\frac{\varphi(d)}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if (i) $\frac{n}{2}$; odd または (ii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \not\equiv 0 \pmod 4$ かつ $l_{n/2}+m_{n/2} \neq 0$
または (iii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \equiv 0 \pmod 4$ かつ $\frac{n}{d}$; even かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a/d\,;\,\text{odd}}} (l_a+m_a)$; even
かつ $l_{n/2}+m_{n/2} \neq 0$

$2 \times \left\{\frac{\varphi(d)}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if (ii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \not\equiv 0 \pmod 4$ かつ $l_{n/2}=m_{n/2}=0$
または (iii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \equiv 0 \pmod 4$ かつ $\frac{n}{d}$; even かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a/d\,:\,\text{odd}}} (l_a+m_a)$; even
かつ $l_{n/2}=m_{n/2}=0$

$\left\{\frac{\varphi(d)+\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if $\frac{n}{2}$; even かつ $\frac{n}{d}$; odd

$\left\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if $\frac{n}{2}$; even かつ $d \equiv 0 \pmod 4$ かつ $\frac{n}{d}$; even かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a/d\,;\,\text{odd}}} (l_a+m_a)$: odd で
$l_{n/2}+m_{n/2} \neq$

$2 \times \left\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if 〃 で $l_{n/2}=m_{n/2}=$

但し $d = g.c.d.\{a\,;\, l_a \neq 0 \text{ or } m_a \neq 0\}$ ，$\{x\}$ は x 以上の整数の最小数，$C^{-}(n;\mathfrak{l},\mathfrak{m}) = \prod_{\substack{a|n \\ a\neq n \\ a \neq n/2}} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2}+l_a-1}{l_a} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2}+m_a-1}{m_a}$.

次に $\varepsilon = 0$ のときは （［9］参照）

<u>定理7</u>　Prop. 7 の条件のもと $P_n^{\circ}(g,\hat{\mathfrak{l}},\hat{\mathfrak{m}},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}}) \neq \phi$ である必要十分条件は.

(A)　$g \geqq 3$ のとき (5) (i) n : odd であるか.

(ii) n : even のとき $\sum_{\substack{a|n \\ a;\text{odd}}} (l_a + m_a)$ が even

(B)　$g = 1$ のとき (5)

かつ (6) $g.c.d.\{a\,;\, l_a \neq 0$ または $m_a \neq 0\} = 1$

(C)　$g = 2$ のとき (i) n : odd である

または (ii) n : even かつ d ; odd のとき $\sum_{\substack{a|n \\ a;\text{odd}}} (l_a + m_a)$ が even

または (iii) n ; even かつ d ; even のとき $\frac{n}{2}$; odd

または (iv) n ; even かつ d ; even かつ $\frac{n}{2}$; even のとき $\frac{d}{2}$; odd かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a:\text{even} \\ a/2;\text{odd}}} (l_a + m_a)$ が odd

そしてこの時 $P_n^{\circ}(g,\hat{\mathfrak{l}},\hat{\mathfrak{m}},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}})$ の個数は

☆　$g \neq 2$ の時

$$\begin{cases} C^{-}(n;\mathfrak{l},\mathfrak{m}) & \text{if (i) } n:\text{odd} \text{ または (ii) } n:\text{even かつ } l_{n/2}+m_{n/2} \neq 0 \\ 2 \times C^{-}(n;\mathfrak{l},\mathfrak{m}) & \text{if (ii) } n:\text{even かつ } l_{n/2} = m_{n/2} = 0. \end{cases}$$

☆　$g = 2$ の時

$\left\{\frac{\varphi(d)}{2}\right\} \times C^{-}(n;\mathfrak{l},\mathfrak{m})$　if (i) n ; odd または (ii) n : even かつ d ; odd かつ $l_{n/2} + m_{n/2} \neq 0$

$$\begin{cases} 2\times\left\{\frac{\varphi(d)}{2}\right\}\times C^{-}(n;\ell,m) & \text{if } n\text{:even かつ } d\text{;odd かつ } \ell_{n/2}=m_{n/2}=0 \\ \left\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\}\times C^{-}(n;\ell,m) & \text{if (i) } n\text{;even かつ } d\text{;even かつ } \frac{n}{2}\text{;odd} \\ & \quad\text{(ii) } n\text{;even かつ } d\text{;even かつ } \frac{n}{2}\text{;even かつ } \ell_{n/2}+m_{n/2}\neq 0. \\ 2\times\left\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\}\times C^{-}(n;\ell,m) & \text{if } n\text{:even かつ } d\text{:even かつ } \frac{n}{2}\text{;even かつ } \ell_{n/2}=m_{n/2}=0. \end{cases}$$

【$(f,M)\sim(f',M')$ の判定】 $(f,M),(f',M')\in \mathcal{P}_n^{\varepsilon}$ のとき同値かどうかを判定するには，まず同じ $\mathcal{P}_n^{\varepsilon}(\mathfrak{g},\tilde{\ell},\hat{m},\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{m})$ に属することで，その時は同じ $\mathcal{P}_n(X,S)$ に属するので，それぞれに対して定理1～4の完全代表系の元として等しいかどうかをみればよい。（[8][9]参照）

§3. $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$ の時

さて $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$ のときは Prop. 1 を使うと

<u>Prop. 8</u> f を compact surface M 上の period n の periodic map で $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$ ならば

(1) n は even

(2) $x\in\mathcal{S}^1(f) \longrightarrow x\in\mathcal{S}_{n/2}(f)$

(3) 特に M が orientable のとき f は orientation reversing であって，$\frac{n}{2}$ は odd である.

≪Notation≫

$$\mathbb{P}_n=\{(f,M)\,;\ M\text{;compact surface},\ f\text{;M上の period } n \text{ の periodic map},\ \mathcal{S}^1(f)\neq\phi\}$$

$\mathbb{P}_n^2 = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n \ ; \ M - \mathcal{S}^1(f)$ は不連結 $\}$

$\hat{\mathbb{P}}_n = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n \ ; \ M - \mathcal{S}^1(f)$ は連結 $\}$

$\mathcal{P}_n^2 = \{ (g, M_0, \mathcal{S}_*) \ ; \ (g, M_0) \in \mathcal{P}_{n/2}$, $\mathcal{S}_*$; ∂M_0 上の simple loop と simple arc からなる set
$g(\mathcal{S}_*) = \mathcal{S}_* \}$

$\hat{\mathcal{P}}_n = \{ (\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*) \ ; \ (\hat{f}, \hat{M}) \in \mathcal{P}_n$, $\mathcal{S}_*$; $\partial\hat{M}$ 上の simple loop と simple arc からなる set , $\hat{f}(\mathcal{S}_*) = \mathcal{S}_* \}$

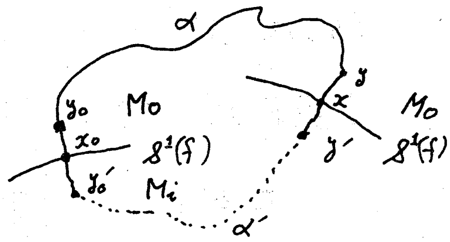
<u>定義 4</u> (1) $\hat{\mathcal{P}}_n$ の 2 つの元 $(\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*)$, $(\hat{f}', \hat{M}', \mathcal{S}_*')$ に対して $\hat{f}h = h\hat{f}'$ をみたす同相写像 $h : (\hat{M}, \mathcal{S}_*) \longrightarrow (\hat{M}', \mathcal{S}_*')$ が存在するとき $(\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*) \underset{*}{\sim} (\hat{f}', \hat{M}', \mathcal{S}_*')$ とする．

(2) $\mathcal{P}_n^2$ の 2 つの元 $(g, M_0, \mathcal{S}_*)$, $(g', M_0', \mathcal{S}_*')$ に対して $gh = hg'$ をみたす同相写像 $h : (M_0, \mathcal{S}_*) \longrightarrow (M_0', \mathcal{S}_*')$ が存在するとき $(g, M_0, \mathcal{S}_*) \underset{*}{\sim} (g', M_0', \mathcal{S}_*')$ とする．

<u>$M - \mathcal{S}^1(f)$ が連結でない $(\mathbb{P}_n^2)$</u> のとき

<u>Lemma. 1</u> $(f, M) \in \mathbb{P}_n^2$ のとき，$M - \mathcal{S}^1(f)$ の連結成分は 2 つで，それらの閉包を M_0, M_1 とすると $f(M_0) = M_1$ で $g = f^2|_{M_0}$ とおけば g は M_0 上の period $\frac{n}{2}$ の periodic map で $\mathcal{S}^1(g) = \phi$ かつ $\mathcal{S}^0_k(g) = \mathcal{S}^0_{2k}(f) \cap \mathring{M}_0$ をみたす．そしてこの時 $\frac{n}{2}$ は odd である．

(略証) M_0 を $M - \mathcal{S}^1(f)$ の 1 つの連結成分の閉包とする．$M - \mathcal{S}^1(f)$ が連結でないので $\exists M_i$; $M - \mathcal{S}^1(f)$ の M_0 と異なる連結成分の閉包で $\phi \neq M_0 \cap M_i \subset \mathcal{S}^1(f)$ とする．そこで $x_0 \in M_0 \cap M_i$ をとり y_0 を x_0 の十分近くの M_0 の点とする．このとき $M_0 \cap \mathcal{S}^1(f) = M_i \cap \mathcal{S}^1(f)$ である．なぜ



ならば $\forall x \in M_0 \cap \mathcal{S}^1(f)$，$y$ を x の十分近くの M_0 の点とすれば，M_0 は連結より y と y_0 を結ぶ $\mathring{M}_0$ の arc α が存在する．$\alpha' = f^{\frac{n}{2}}(\alpha)$ とすれば α' は $f^{\frac{n}{2}}(y_0) = y_0'$ と $f^{\frac{n}{2}}(y) = y'$ を結ぶ arc で $\alpha' \cap \mathcal{S}^1(f) = \phi$，ところが $y_0' \in M_i$ だから $y' \in M_i$．故に $x \in M_0 \cap M_i$．したがって $x \in M_i \cap \mathcal{S}^1(f)$．逆も同様に示されるので $M_0 \cap \mathcal{S}^1(f) = M_i \cap \mathcal{S}^1(f)$．このことより $M - \mathcal{S}^1(f)$ の連結成分は M_0 と M_i の2つしかない．あとは実際に試してみれば分かる．($M_i = M_1$ とおく)．

<u>Lemma. 2</u>　また逆に2次元多様体 M_0 と ∂M_0 上の simple loop と simple arc からなる集合 $\mathcal{S}_*$ が与えられ，g を period $\frac{n}{2}$ (odd) $= m$ の M_0 上の periodic map で $\mathcal{S}^1(g) = \phi$ かつ $g(\mathcal{S}_*) = \mathcal{S}_*$ なるものとするとき，M_0 の copy M_1 をとり $i : M_0 \longrightarrow M_1$ を位相同型写像，$j = i|_{\mathcal{S}_*}$ とし $M = M_0 \underset{j}{\cup} M_1$ とおく．そして $f : M \longrightarrow M$ を $x \in M_0$ のとき $f(x) = i g^{\frac{m+1}{2}}(x)$，$x \in M_1$ のとき $f(x) = g^{\frac{m+1}{2}} i^{-1}(x)$ とすれば f は M 上の period n の periodic map になり，$\mathcal{S}^1(f) = \mathcal{S}_*$，$M - \mathcal{S}^1(f)$ は不連結をみたす。そこで Lemma 1 により M_0'，$g_0' : M_0' \longrightarrow M_0'$ を作れば $(g_0', M_0') = (g_0, M_0)$ となる．

すなわち　$\boxed{\mathbb{P}_n^2} \ni (f, M) \xleftrightarrow[\text{1対1の対応}]{} (g, M_0, \mathcal{S}_*) \in \boxed{\mathbb{P}_n^2}$

また同値関係については．

<u>Lemma 3</u>　$(f, M), (f', M') \in \mathbb{P}_n^2$ に対して $(g, M_0, \mathcal{S}_*)$, $(g', M_0', \mathcal{S}_*') \in \mathcal{P}_n^2$ を作れば $(f, M) \sim (f', M')$ である必要十分条件は $(g, M_0, \mathcal{S}_*) \underset{*}{\sim} (g', M_0', \mathcal{S}_*')$ である。

したがって　$\boxed{\mathbb{P}_n^2/\sim} \underset{1対1の対応}{\longleftrightarrow} \boxed{\mathcal{P}_n^2/\underset{*}{\sim}}$.

そして $p: M \longrightarrow M/f = X$ は $p(\mathcal{S}(f)) = S$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering（但し covering $p|_{M-\mathcal{S}(f)} : M - \mathcal{S}(f) \longrightarrow X - S$ において $M - \mathcal{S}(f)$ は連結でない），$p_0 : M_0 \longrightarrow M_0/g = X$ は $p_0(\mathcal{S}(g)) = S^0$ を branched set とする $\frac{n}{2}$-fold cyclic branched covering になっている．そこで 2次元多様体 X と ∂X 上の simple loop と simple arc からなる集合 S^1 と $\mathring{X}$ 内の孤立点の集合 S^0 をとり $S = S^1 \cup S^0$ とおき $\mathcal{P}_n^2(X, S) = \{ (g, M_0, \mathcal{S}_*) \in \mathcal{P}_n^2$; $M_0/g = X$, $p_0 : M_0 \longrightarrow X$ が $\frac{n}{2}$-fold cyclic branched covering with branched set $p(\mathcal{S}(g)) = S^0$, $p_0(\mathcal{S}_*) = S^1 \}$ とおき $\mathcal{O}_n^2(X, S) = \mathcal{P}_n^2(X, S)/\underset{*}{\sim}$ として §1 と同様にして $[H_1(X - S^0); \mathbb{Z}_{n/2}]^*$ の A-同値類を求めればよい．(但し ∂X の component を $d_j \cap S^1 = \phi$ なるもの，$d_u^0 \subset S^1$ のもの，$d_w^{(v)} \cap S^1$ が v 本の arc からなるもの，と分けておかねばならない）

すると 定理 1 ～ 4 の (I) ($n \longrightarrow \frac{n}{2}$ で) $\frac{n}{2}$: odd と同様な定理がえられる。すなわち $\omega \in [H_1(X - S^0) ; \mathbb{Z}_{n/2}]^*$ が与えられた時 $\omega(a_i) = \alpha_i$, $\omega(b_i) = \beta_i$ $(\omega(c) = \gamma)$ $\langle \omega(c_1) = \gamma_1, \omega(c_2) = \gamma_2 \rangle$

$\omega(d_j)=\delta_j$, $\omega(d_u^0)=\eta_u$, $\omega(d_w^{(v)})=\lambda_w^{(v)}$, $\omega(S_k)=\theta_k$ となる時 ω を $\mathbb{Z}_{n/2}$ の元の組 $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,(\gamma),\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle,$ $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{\hat{g}},\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots$ $\cdots\ \lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ で表わすとき，定理1～4の（I）の形に $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_{n/2}]^*$ の A－同値類の完全代表系は与えられる。すなわち $\mathbb{P}_n^2$ の同値類の完全代表系が求められる。

$\mathbb{P}_n^2$ の分類をするには，まず

$\mathbb{P}_n^{2+}=\{(f,M)\in\mathbb{P}_n^2$; M; orientable $(f$; orientation reversing$)\}$

$P_n^{2+}=\{(g,M_0,\delta_*)\in P_n^2$; M_0; orientable $(g$; orientation preserving$)\}$

$\mathbb{P}_n^{2\,0}=\{(f,M)\in\mathbb{P}_n^2$; M; non-orientable $\}$

$P_n^{2\,0}=\{(g,M_0,\delta_*)\in P_n^2$; M_0; non-orientable $\}$

として $\underline{\mathbb{P}_n^{2\varepsilon}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\hat{g},\tilde{t}\,;\,\tilde{\ell}\ \tilde{m}\ \tilde{g}\ \tilde{t})}$ を次の条件をみたす $\mathbb{P}_n^{2\varepsilon}$ の元 (f,M) の集合とする．（但し $\varepsilon=+$ or 0 ，$\boldsymbol{\ell}=(\tilde{\ell}_a)_{a|n}$, $\boldsymbol{m}=(\tilde{m}_a)_{\substack{a|n\\ a\neq n}}$ $\boldsymbol{g}=(\hat{g}_a)_{a|n}$, $\boldsymbol{t}=(\tilde{t}_a(v))_{\substack{a|n\\ v\in N}}$ はベクトル）.

（イ） M は genus $\tilde{g}$ で，$D_1,D_2,\cdots,D_{\tilde{\ell}}$ を $D_j\cap\delta^1(f)=\phi$ なる M の boundary component ，$\tilde{r}$ を $D_j^*\cap\delta^1(f)\neq\phi$ なる M の boundary component の数．

（ロ） $\delta^0(f)$ は $\mathring{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点 $S_1,S_2,\cdots,S_{\tilde{m}}$ からなる．

（ハ） $\delta^1(f)$ の loop の数 $\hat{g}$ ，（arc の数は $\tilde{r}$），type (iii) の集合 Φ_w の数 $\tilde{t}$ ．（$D_1^0,D_2^0,\cdots,D_{\hat{g}}^0$ を $\delta^1(f)$ の loop とおく）

(二) $\hat{l}_a$ は $\{D_j\ ;\ f^a(D_j)=D_j$ かつ $f^b(D_j)\neq D_j\ (1\leq {}^\forall b<a)\}$ の元の個数

$\hat{m}_a$ は $\mathcal{S}_a^0(f)$ に属する点の個数

$\hat{g}_a$ は $\{D_u^0\ ;\ f^a(D_u^0)=D_u^0$ かつ $f^b(D_u^0)\neq D_u^0\ (1\leq {}^\forall b<a)\}$ の元の個数

$\hat{t}_a(v)$ は $\{\Phi_w\ ;\ f^a(\Phi_w)=\Phi_w$ かつ $f^b(\Phi_w)\neq\Phi_w\ (1\leq{}^\forall b<a)$ かつ

Φ_w に属する arc の数 $\frac{n}{2a}v\}$ の元の個数

そして $\mathbb{P}_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\hat{l},\hat{m},\hat{g},\hat{t}\ ;\ \hat{\mathfrak{l}},\hat{\mathfrak{m}},\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{t}})$ に対応させて，さらに §2 と同様にして $l_a,\ m_a,\ g_a,\ t_a(v)$ を求めて $X=M/f=M_0/g$，$p(\mathcal{S}^1(f))=S^1$，$p(\mathcal{S}^0(f))=S^0$，$S=S^1\cup S^0$ とおいて，X の genus g，∂X のうち $d_j\cap S^1=\phi$ なるものの数 l，$d_u^0\subset S^1$ なるものの数 g，$d_w^{(v)}\cap S^1$ が v 本の arc からなるものの数 $t(v)$，S^0 の点の数 m として $[H_1(X-S^0)\ ;\ \mathbb{Z}_{n/2}]^*$ の $\mathcal{A}$－同値類の完全代表系に §2 の条件⊗と同様な条件をつけたものを求めれば §2 の定理 5，7 と同様な定理がえられる。（詳細は省略）

	M	M_0	X	
$\mathbb{P}_n^{2+}$	orientable	orientable	orientable	n;even $\frac{n}{2}$;odd
$\mathbb{P}_n^{2\,0}$	non-orientable	non-orientable	non-orientable	n:even $\frac{n}{2}$;odd

$M-\mathcal{S}^1(f)$ が連結 $(\hat{\mathbb{P}}_n)$ のとき

Prop. 9　$(f,M)\in\hat{\mathbb{P}}_n$，$M$ が orientable のとき $X=M/f$ は non-orientable である．（$\frac{n}{2}$ は odd）．

<u>Lemma 4</u>　$(f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n$ のとき $\hat{M}$ を $M - S^1(f)$ (連結) の natural compactification (completion) とし, $S_* = \hat{M} - (M - S^1(f))$ (すなわち $S^1(f)$ の $\hat{M}$ における2つの copy) とおく. $\hat{f} : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}$ を $x \in \hat{M} - S_*$ のとき $\hat{f}(x) = f(x)$, $x \in S_*$ のとき $\lim x_i = x$ なる $\hat{M} - S_*$ の点列 $\{x_i\}$ をとり $\hat{f}(x) = \lim f(x_i)$ とすれば ($\{x_i\}$ のとり方によらない.) $\hat{f}$ は $\hat{M}$ 上の period n の periodic map となり, $S^1(\hat{f}) = \phi$ かつ $S^0_k(\hat{f}) = S^0_k(f)$ をみたす。

<u>Lemma 5</u>　逆に2次元多様体 $\hat{M}$ と $\partial\hat{M}$ 上の simple loop と simple arc からなる集合 S_* が与えられ, $\hat{f}$ を period n (even) の $\hat{M}$ 上の periodic map で $S^1(\hat{f}) = \phi$ かつ $\hat{f}(S_*) = S_*$ なるものとするとき, $M = \hat{M}/\sim$ (ここに $\hat{x} \sim \hat{y} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\hat{x}, \hat{y} \in S_*$ のとき $\hat{x} = \hat{y}$ または $\hat{y} = \hat{f}^{\frac{n}{2}}(\hat{x})$, (ii) その他の時は $\hat{x} = \hat{y}$) とし $g : \hat{M} \longrightarrow M$ を natural quotient map とする. このとき $f : M \longrightarrow M$ を $x \in M$ に対して $g(y) = x$ なる y をとり $f(x) = g\hat{f}(y)$ と定めると f は well-defined で M 上の period n の periodic map になり, $S^1(f) = g(S_*)$, $M - S^1(f)$ は連結をみたす. そこで Lemma 4 により $\hat{M}'$, $\hat{f}' : \hat{M}' \longrightarrow \hat{M}'$ を作れば $(\hat{f}, \hat{M}) = (\hat{f}', \hat{M}')$ となる.

すなわち　$\boxed{\hat{\mathbb{P}}_n} \ni (f, M) \xleftrightarrow[\text{1対1の対応}]{} (\hat{f}, \hat{M}, S_*) \in \boxed{\hat{P}_n}$

また同値関係については

<u>Lemma 6</u>　$(f, M), (f', M') \in \hat{\mathbb{P}}_n$ に対して $(\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*)$, $(\hat{f}', \hat{M}', \mathcal{S}'_*) \in \hat{P}_n$ を作れば $(f, M) \sim (f', M')$ である必要十分条件は $(\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*) \underset{*}{\sim} (\hat{f}', \hat{M}', \mathcal{S}'_*)$ である.

したがって　$\boxed{\hat{\mathbb{P}}_n/\sim} \xleftrightarrow[\text{1対1の対応}]{} \boxed{\hat{P}_n/\underset{*}{\sim}}$

そして $p : M \longrightarrow M/f = X$ は $p(\mathcal{S}(f)) = S$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering, $\hat{p} : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}/\hat{f} = X$ は $\hat{p}(\mathcal{S}(\hat{f})) = S^0$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering になっている. そこで2次元多様体 X と ∂X 上の simple loop と simple arc からなる集合 S^1 と $\mathring{X}$ 内の孤立点の集合 S^0 をとり $S = S^1 \cup S^0$ とおき,

$$
\begin{tikzcd}
\hat{M} \arrow[r, "\hat{p}"] \arrow[d, "\delta"'] & X \\
M \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\hat{P}_n(X, S) = \{(\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*) \in \hat{P}_n \ ; \ \hat{M}/\hat{f} = X, \ \hat{p} : \hat{M} \longrightarrow X$ が n-fold cyclic branched covering with branched set $p(\mathcal{S}(\hat{f})) = S^0, \ \hat{p}(\mathcal{S}_*) = S^1\}$ とおき $\hat{\mathcal{P}}_n(X, S) = \hat{P}_n(X, S)/\underset{*}{\sim}$ として §1 と同様にして $[H_1(X - S^0) ; \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$ − 同値類を求めればよい. (不連結のときと同様に ∂X の component を $d_j \cap S' = \phi$ なるもの, $d_u \subset S^1$ のもの, $d_w^{(v)} \cap S^1$ が v 本の arc からなるものと分けておく.) すると定理 1 〜 4 の (II) n : even と同様な定理がえられる。すなわち $\omega \in$

$[H_1(X-S^0)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ が与えられた時 $\omega(a_i)=\alpha_i$, $\omega(b_i)=\beta_i$, $(\omega(c)=\gamma)$ $\langle \omega(c_1)=\gamma_1,\ \omega(c_2)=\gamma_2\rangle$, $\omega(d_j)=\delta_j$, $\omega(d_u^0)=\eta_u$ $\omega(d_w^{(v)})=\lambda_w^{(v)}$, $\omega(s_k)=\theta_k$ となる時, ω を $\mathbb{Z}_n$ の元の組 $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,\ (\gamma)\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle,\ \delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\ \eta_1,\eta_2,\cdots,$ $\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\ \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\ \cdots\ \lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)}$ $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ で表わすとき, 定理1～4の(II)の形に $[H_1(X-S^0)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ の A-同値類の完全代表系は与えられる. すなわち $\hat{\mathbb{P}}_n$ の同値類の完全代表系が求められる.

そして X から $\hat{M}$ を作り M を作ればよいが, それは次のようになる. ($\hat{\mathbb{P}}_n$, $\hat{P}_n$ において)

X ; orientable $\longrightarrow$ $\hat{M}$; orientable $\xrightarrow{\text{(Prop.9より)}}$ M ; non-orientable (i)

X ; non-orientable $\longrightarrow$ $\hat{M}$; orientable $\longrightarrow$ M ; orientable ($\frac{n}{2}$; odd) (ii)

$\hat{M}$; orientable $\longrightarrow$ M ; non-orientable ($\frac{n}{2}$; even) (iii)

X ; non-orientable $\longrightarrow$ $\hat{M}$; non-orientable $\longrightarrow$ M ; non-orientable (iv)

そこで $\hat{\mathbb{P}}_n$ の分類をするには, まず (n : even)

$\hat{\mathbb{P}}_n^{+-}=\{(f,M)\in\hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ \text{(i) のとき}\}$

$\hat{\mathbb{P}}_n^{-+}=\{(f,M)\in\hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ \text{(ii) のとき}\}$ ($\frac{n}{2}$: odd)

$\mathbb{P}_n^{--}=\{(f,M)\in\hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ \text{(iii) のとき}\}$ ($\frac{n}{2}$: even)

$\mathbb{P}_n^{\circ\circ}=\{(f,M)\in\hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ \text{(iv) のとき}\}$

$\hat{P}_n^{+-}=\{(\hat{f},\hat{M},s_*)\in\hat{P}_n\ ;\ \text{(i) のとき}\}$

$\hat{P}_n^{-+}=\{(\hat{f},\hat{M},s_*)\in\hat{P}_n\ ;\ \text{(ii) のとき}\}$ ($\frac{n}{2}$: odd)

$\hat{P}_n^{--} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*) \in \hat{P}_n$; ⅲ のとき $\}$ $(\frac{n}{2}$: even$)$

$\hat{P}_n^{\circ\circ} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*) \in \hat{P}_n$; ⅳ のとき $\}$

として $\hat{\mathbb{P}}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{r}, \tilde{m}, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-, \tilde{t}^+, \tilde{t}^- ; \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{g}}^+, \tilde{\mathfrak{g}}^-, \tilde{\mathfrak{t}}^+, \tilde{\mathfrak{t}}^-)$ を次の条件をみたす $\hat{\mathbb{P}}_n^{\varepsilon\varepsilon'}$ の元 (f, M) の集合とする．（但し $\varepsilon = +, -$ or $\circ$ ， $\varepsilon' = +, -$ or $\circ$ ， $\tilde{\mathfrak{l}} = (\tilde{l}_a)_{a|n}$ $\tilde{\mathfrak{m}} = (\tilde{m}_a)_{a|n, a \neq n}$, $\tilde{\mathfrak{g}}^+ = (\tilde{g}_a^+)_{a|\frac{n}{2}}$ $\tilde{\mathfrak{g}}^- = (\tilde{g}_a^-)_{a|\frac{n}{2}}$ $\tilde{\mathfrak{t}}^+ = (\tilde{t}_a^+(v))_{a|\frac{n}{2}, v \in N}$ $\tilde{\mathfrak{t}}^- = (\tilde{t}_a^-(v))_{a|\frac{n}{2}, v \in N}$ はベクトル，但し $\hat{\mathbb{P}}_n^{-+}$ のとき $\tilde{g}^-$ $\tilde{\mathfrak{g}}^-$ $\tilde{t}^-$ $\tilde{\mathfrak{t}}^-$ はなし）．

(イ) M は genus $\tilde{g}$ で $D_1, D_2, \cdots, D_{\tilde{l}}$ を $D_j \cap \mathcal{S}^1(f) = \phi$ なる M の boundary component， $\tilde{r}$ を $D_j^* \cap \mathcal{S}^1(f) \neq \phi$ なる M の boundary component の数．

(ロ) $\mathcal{S}^0(f)$ は $\mathring{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点からなる．

(ハ) $\mathcal{S}^1(f)$ の loop のうち 2-sided なものを $D_1^{\circ+}, D_2^{\circ+}, \cdots, D_{\tilde{g}^+}^{\circ+}$，1-sided なものを $D_1^{\circ-}, D_2^{\circ-}, \cdots, D_{\tilde{g}^-}^{\circ-}$ とし（arc の数は $\tilde{r}$），type (iii)$_2$ の集合 Φ_w^+ の数 $\tilde{t}^+$，type (iii)$_1$ の集合 Φ_w^- の数 $\tilde{t}^-$．

(ニ) $\tilde{l}_a$ は $\{ D_j ; f^a(D_j) = D_j, f^b(D_j) \neq D_j \ (1 \leq {}^\forall b < a) \}$ の元の個数

$\tilde{m}_a$ は $\mathcal{S}_a^0(f)$ に属する点の個数

$\tilde{g}_a^+ = \{ D_u^{\circ+} ; f^a(D_u^{\circ+}) = D_u^{\circ+}, f^b(D_u^{\circ+}) \neq D_u^{\circ+} \ (1 \leq {}^\forall b < a) \}$ の元の個数

$\tilde{g}_a^- = \{ D_u^{\circ-} ; f^a(D_u^{\circ-}) = D_u^{\circ-}, f^b(D_u^{\circ-}) \neq D_u^{\circ-} \ (1 \leq {}^\forall b < a) \}$ の元の個数

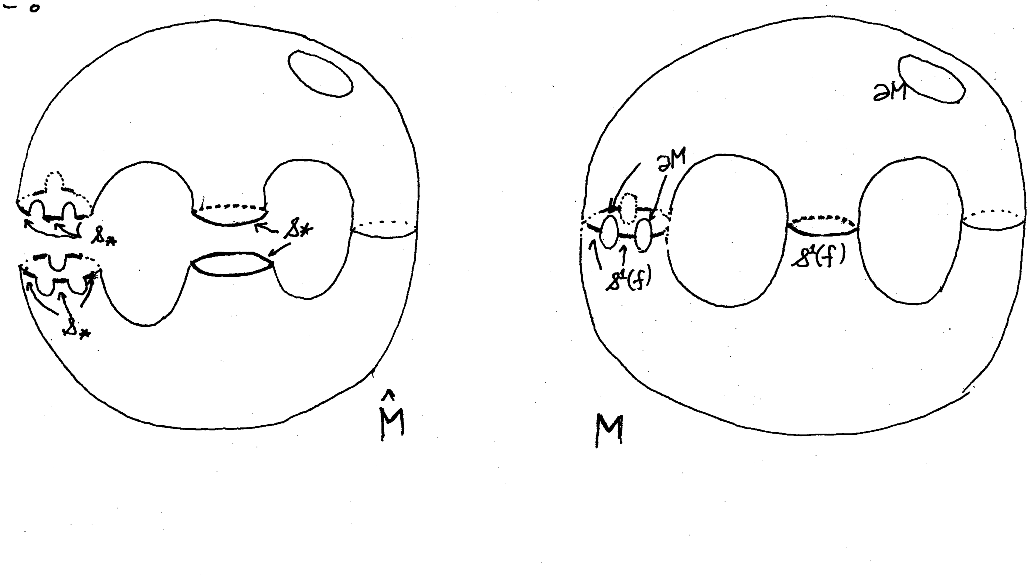
$\tilde{t}_a^+(v) = \{ \Phi_w^+ ; f^a(\Phi_w^+) = \Phi_w^+, f^b(\Phi_w^+) \neq \Phi_w^+ \ (1 \leq {}^\forall b < a)$，

かつ Φ_w^+ に属する arc の数 $\frac{n}{2a} v \}$ の元の個数

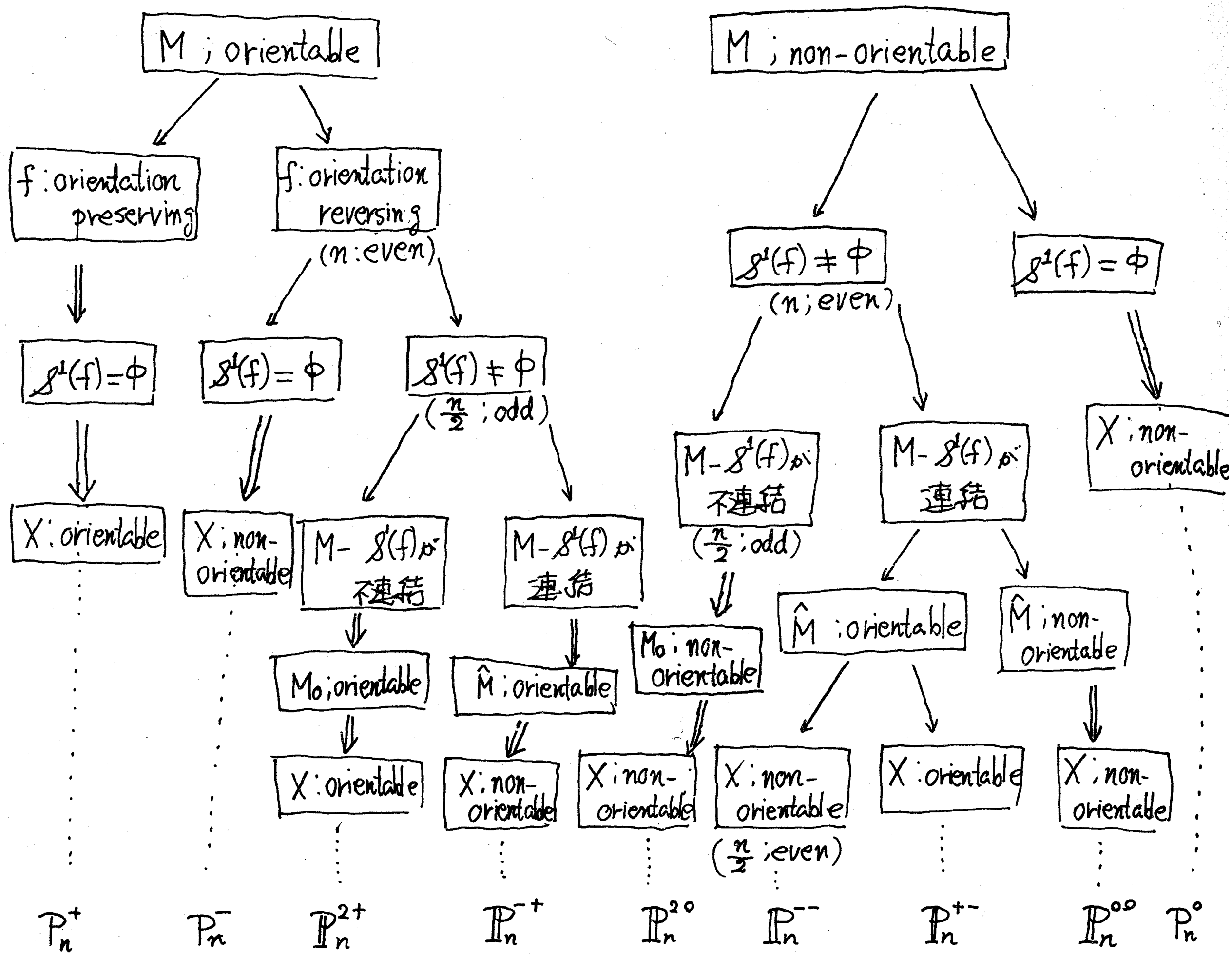
$\tilde{t}_a^-(v) = \{ \Phi_w^- ; f^a(\Phi_w^-) = \Phi_w^-, f^b(\Phi_w^-) \neq \Phi_w^- \ (1 \leq {}^\forall b < a)$，

かつ Ξ^-_w に属するarcの数 $\frac{n}{2a}v\}$ の元の個数

として $P_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g}, \hat{l}, \hat{m}, \hat{q}, \hat{q}^-, \hat{t}^+, \hat{t}^-; \hat{\mathfrak{l}}, \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{q}}^+, \hat{\mathfrak{q}}^-, \hat{\mathfrak{t}}^+, \hat{\mathfrak{t}}^-)$ に対応させて，（このとき $\hat{q}^+_{2a} = 2\cdot\tilde{q}^+_a$，$\hat{q}^-_a = \tilde{q}^-_a$，$\hat{t}^+_{2a}(v) = 2\cdot\tilde{t}^+_a(v)$ $\hat{t}^-_a(v) = \tilde{t}^-_a(v)$ （但し $\hat{t}^-_a(v)$ のarcの数は $\frac{n}{a}v$ 本）となり），その次は§2と同様にして $l_a, m_a, q^+_{2a}, q^-_a, t^+_{2a}(v), t^-_a(v)$ を求めて（$q^+_{2a}, t^+_{2a}(v)$ で $\neq 0$ なのはevenで $2a \nmid \frac{n}{2}$，$q^-_a, t^-_a(v)$ で $\neq 0$ なのは $a \mid \frac{n}{2}$）$X = M/f = \hat{M}/\hat{f}$，$p(\delta^1(f)) = S^1$，$p(\delta^0(f)) = S^0$，$S = S^1 \cup S^0$ とおいて X の genus g，∂X のうち $d_j \cap S^1 = \phi$ なるものの数 l，$d_u^0 \subset S^1$ なるものの数 $q\ (= q^+ + q^-)$，$d_w^{(v)} \cap S^1$ が v 本のarcからなるものの数 $t(v)\ (= t^+(v) + t^-(v))$，$S^0$ の点の数 m として $[H_1(X - S^0); \mathbb{Z}_n]^*$ の A－同値類の完全代表系に§2の条件⊗と同様な条件をつけたものを求めれば§2の定理5.6.7と同様な定理がえられる。（詳細省略）　長くなってしまったので§3は定理が，また全てにわたって証明はつけられませんでした。



<まとめ>



参 考 文 献

[1] Tohl Asoh " Classification of free involutions on surfaces " Hiroshima Math.Jour., 6 (1976), 171-181.

[2] D.R.J. Chillingworth " A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface " Proc.Camb. Phil.Soc., 65 (1969), 409-430.

[3] W.R.B. Lickorish " Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds " Proc.Camb.Phil.Soc., 59(1963), 307-317.

[4] W.R.B. Lickorish " A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold " Proc.Camb.Phil.Soc., 60 (1964), 769-778. Corrigendum; 62 (1966), 679-681.

[5] P.A. Smith " Abelian actions on 2-manifolds " Michigan Math.Jour., 14(1967), 257-275.

[6] Shin'ichi Suzuki " On homeomorphisms of 3-dimensional handlebody " Can.Jour.Math., 29 (1977), 111-124.

[7] G.T. Whyburn " ANALYTIC TOPOLOGY " Amer.Math.Soc.Colloquium Publ., 28, Amer.Math.Soc., 1942.

[8] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on compact surfaces " Tokyo Jour.Math., to appear.

[9] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on compact surfaces II " to appear.

[10] K. Yokoyama " A complete classification of periodic maps on compact surfaces " preprint.

[11] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on 2-manifolds " 京都大学数理解析研講究録 369「3次元多様体の構造と位置の問題」1979年11月 8 - 30