

Triple Points and Knot Cobordism

大阪市大 理 杉下 幸司 (Kouji Sugishita)

大阪市大 理 村上 斉 (Hitoshi Murakami)

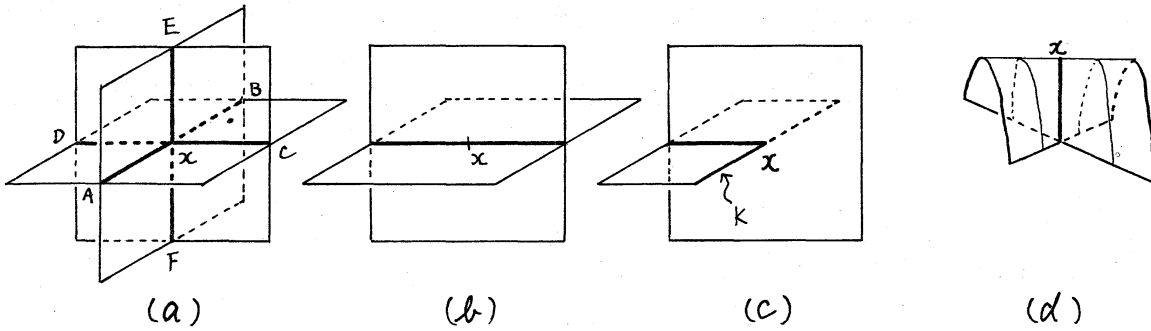
3次元 Euclid 空間内の結び目に singular disk を張り, その singularity を調べる: とにより T -genus と呼ばれる結び目不変量を導入し, その性質をいくつか述べる。証明は, 概略に留めるが, 図を多く用い直観的にわかるようにしたつもりである。なお, *ission*, *fusion* などの用語については [5], [6] を参照されたい。

§1 Preliminaries

1.1 定義 2-disk D^* から 3次元 Euclid 空間 R^3 への P.L. 写像 f で ∂D^* (D^* の境界) への制限が 1-対-1 となるものを考える。 $K = f(\partial D^*)$ とおくと, $D = f(D^*)$ を 結び目 K の張る singular disk といい。 D の集合 $\Sigma = \{x \in D \mid \#(f^{-1}(x)) \geq 2\}$ を singular disk D の singularity といい。

1.2 定義 結び目 K の張る singular disk D で, その singularity

Σ の閉包の各点 x の \mathbb{R}^3 での近傍が、次の図に示したいずれか
 になっているものを normal singular disk といい。



また、(a)の点 x のように、原像が3点からなっているものを、triple point、(d)の点 x のように、 $x \notin \Sigma$ であるが $x \in \text{Cl}\Sigma$ (Σ の閉包) となるものを、branch point という。

注意 (a), (b), (d) の場合、 $x \in f(\text{Int } D^*)$ 、(c) の場合、 $x \in f(\partial D^*) \cap f(\text{Int } D^*)$ である。ここで $\text{Int } D^*$ は D^* の内部である。

normal singular disk の singularity を次のように曲線の集まりとみなす。まず、singularity から triple point を除き、連結成分に分ける。それらを triple point の近傍で、上図 (a) の \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} のようにつなぎ直すことにより、(一般には、自分自身と交わる) 曲線に分けることができる。これらを double line と呼ぶ。

double line を、その原像の性質により、次のように分類する。
 (次ページの図参照)

(i) loop singularity : 原像が2本の loop となるもの

(ii) clasp singularity: 原像が2本の arc で、どちらも一端が境界に、一端が内部にあるもの

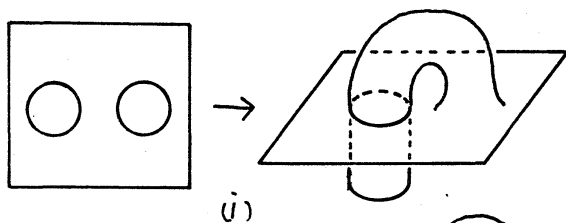
(iii) ribbon singularity: 原像が2本の arc で、片方はすべて内部に含まれ、もう一方は両端が境界にあるもの

(iv) branch singularity with one branch point

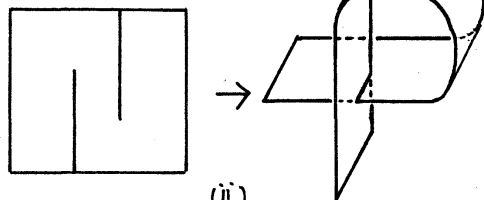
: 原像の閉包が一つの branch point を共有するもの

(v) branch singularity with two branch points

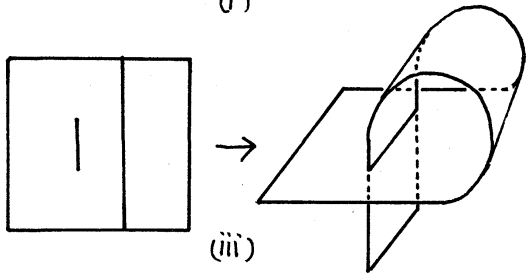
: 原像の閉包が二つの branch point を共有するもの



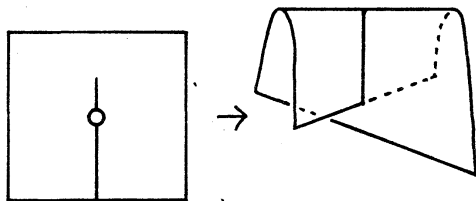
(i)



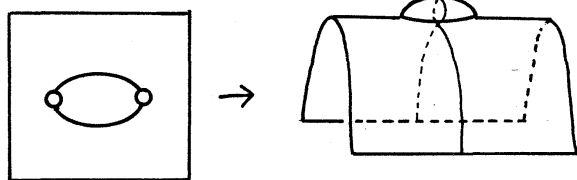
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

((iv), (v) の白丸は branch point)
 である。

注意 上の図では描いていないが、double line は一般には、

自分自身と交わる。自分自身と交わらない場合，特に simple と呼ぶ。

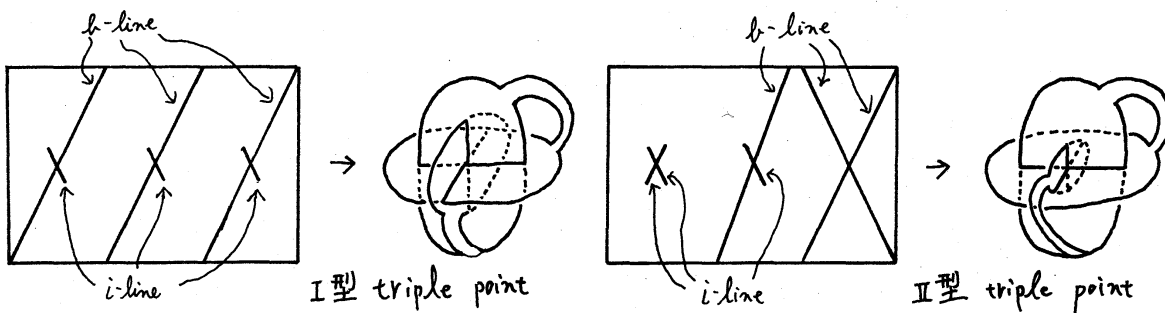
double line の原像は，2本の arc または loop になるが，それらに名前をつけることにする。ribbon singularity と branch singularity with one branch point のときは，端（ribbon のときは両端）が境界（boundary）にある方の arc を b-line，他（つまり内点（innner point）となる方）を i-line と名付ける。それ以外の double line の原像は，どちらかを b-line，他を i-line と名付ける。

triple point の原像は3点からなるが，上のように double line の原像に名前をつけたとき，それら3点は

(I) b-line \cap i-line, b-line \cap i-line, b-line \cap i-line

(II) i-line \cap i-line, b-line \cap i-line, b-line \cap b-line

の2種類しかないことが容易にわかる。(I)の場合 I型 triple point, (II)の場合 II型 triple point と呼ぶ。([2], [6])



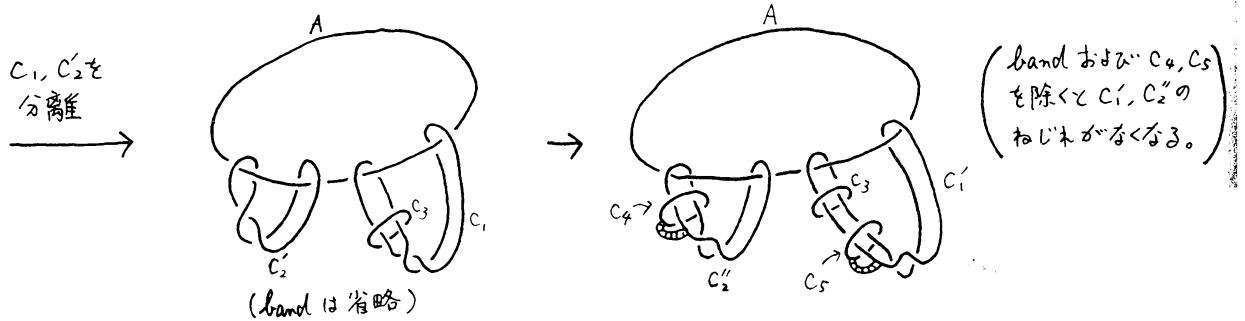
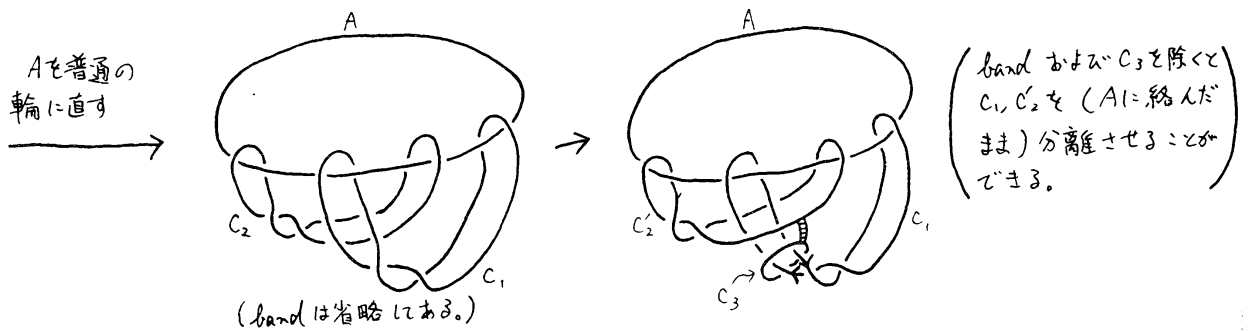
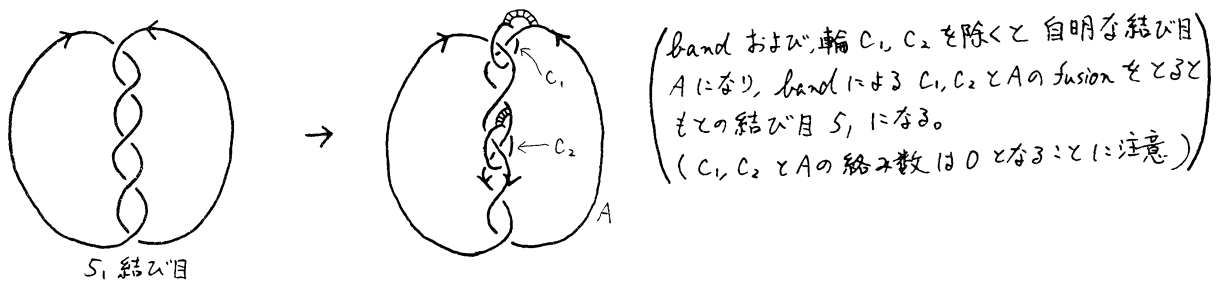
注意 I型, II型は, double line の原像の名付け方によつて変わる。

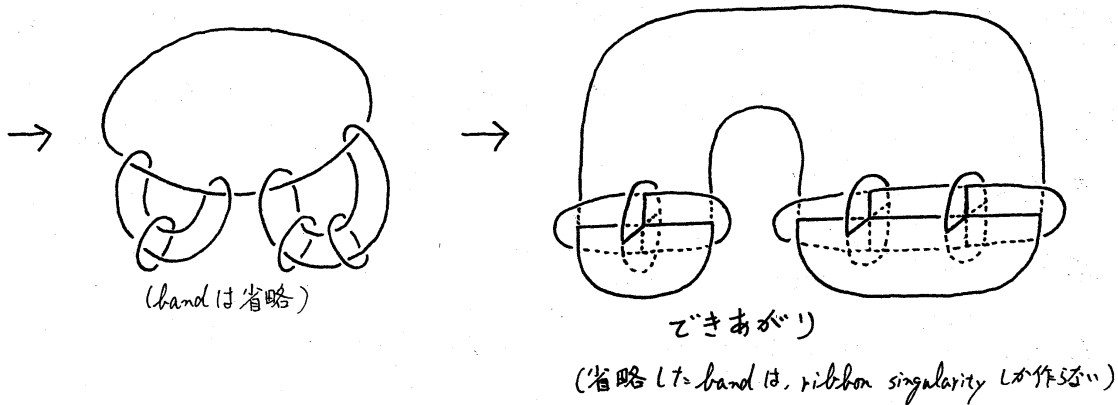
§2 T-genus

[3] により次の事実が知られている。([14] も参照)

2.1 補題 全ての結び目には *clasp singularity* を持たない *normal singular disk* を張ることが出来る。

証明 次の例を見れば、一般の場合の証明も推察できるであろう。





補題 2.1 により, 次の定義が可能となる。

2.2 定義 結び目 K に clasp singularity を持たない normal singular disk D を張り, double line の原像に ξ のように名前 ρ をつける。このとき, $T(K, D, \rho)$ で D に含まれる I 型 triple point の数を表わす。また, $T(K)$ で D および ρ を変えたときの $T(K, D, \rho)$ の最小値を表わし, 結び目 K の T-genus と呼ぶ。

$T(K)$ および $T(K, D, \rho)$ のもっと重要な性質として, 次の定理が挙げられる。

2.3 定理 K を結び目とする。このとき

- (1) $T(K)$ は knot-cobordism 不変量である。
- (2) $g^*(K) \leq T(K)$, ここで $g^*(K)$ は, K の slice genus (4-genus) である。
- (3) $T(K, D, \rho) \equiv \text{Arf}(K) \pmod{2}$, ここで $\text{Arf}(K)$ は, K の Arf 不変量 ([13]) である。特に, $T(K) \equiv \text{Arf}(K) \pmod{2}$ 。

(1)の証明 結び目 K と K' が cobordant であるとするとき, [5, Theorem 3.1] により次のような fusion, fission による系列 (a) が存在する。

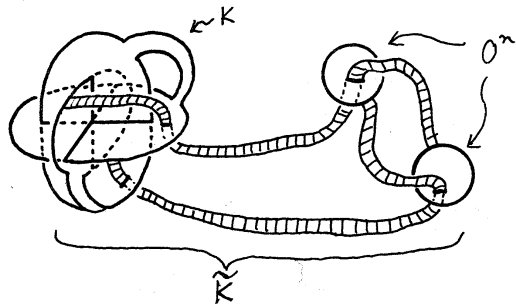
$$(a) \quad K \circ O^n \xrightarrow{\text{fusion}} \tilde{K} \xrightarrow{\text{fission}} K' \circ O^{n'}$$

ただし, \tilde{K} はある結び目, \circ は split union, $O^n, O^{n'}$ はそれぞれ n, n' 個の成分をもつ自明な絡み輪である。

$T(K) \geq T(K')$ を示すために, 次の二つに分けて考える。

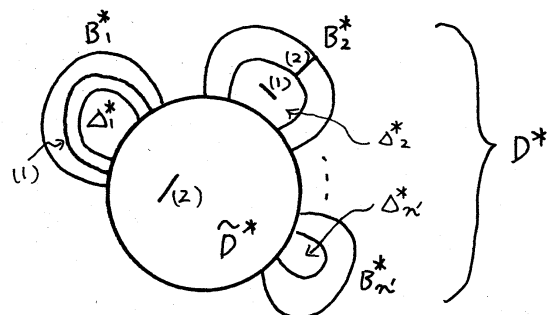
$$(i) \quad T(K) \geq T(\tilde{K}), \quad (ii) \quad T(\tilde{K}) \geq T(K')$$

まず, (i) を示す。 K に I 型 triple point を $T(K)$ 個もつ, clasp singularity をもたない normal singular disk を, O^n に non-singular disk を張る。これに (a) の fusion に使った band をつけ加え, band はいくらでも細くできることに注意すれば, triple point を増やさずに \tilde{K} に clasp singularity をもたない normal singular disk を張ることができる。つまり, $T(\tilde{K}) \leq T(K)$ である。



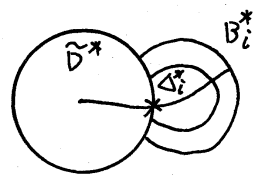
次に, (ii) を示す。 \tilde{K} に I 型 triple point を $T(\tilde{K})$ 個もつ, clasp singularity をもたない normal singular disk \tilde{D} を張り, これに (a) の fission に使った band $B_1, B_2, \dots, B_{n'}$ をつけ加える。これは $K' \circ O^{n'}$

の張る穴あき normal singular disk であり, $O^{\mathcal{N}}$ に対応する部分に non-singular disk $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mathcal{N}}$ を張ると, K' の張る normal singular disk D と存る。 $\tilde{D}, B_i, \Delta_i (i=1, 2, \dots, \mathcal{N})$, D の原像をそれぞれ $\tilde{D}^*, B_i^*, \Delta_i^*, D^*$ とかくと, D^* は次の図のように存る。



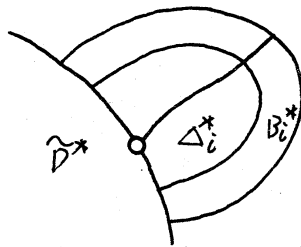
$B_i \cap \Delta_j, B_i \cap \tilde{D} (i, j = 1, 2, \dots, \mathcal{N})$ は simple ribbon singularity, $\Delta_i \cap \tilde{D} (i = 1, 2, \dots, \mathcal{N})$ は normal singularity であると仮定できる。(上の図で (1) が $B_i \cap \Delta_j$ の, (2) が $B_i \cap \tilde{D}$ の原像) また band を $\partial \tilde{D}$ に沿って滑らせることにより, Δ_i と $\Delta_j (i, j = 1, 2, \dots, \mathcal{N})$ は, \tilde{D} にもとからあった singularity とは交わらないようにできる。

D には clasp singularity のないことが次のように示される。もし, clasp singularity があつたとすると, その原像はともに次の図のようになつてしまう。



ところが, この arc と $\Delta_i^* \cap \partial \tilde{D}^*$ の交点を考えると, 相手(像の一致する点)がないことがわかる。これは矛盾であるから, 結局 D^* には clasp singularity はない。

次に Δ_i^* ($i=1, 2, \dots, n$) を通る double line の原像は b -line と名付けてもよいことを示す。loop singularity, branch singularity with two branch points の場合, Δ_i^* を通る方を b -line と名付ける。また, 先程と同様の考えで $\partial\Delta_i^* \cap \partial\hat{D}^*$ を横断する double line の原像は存在しないことがわかる。double line の原像は Δ_i^* の中で終わることはない ($\Delta_i \cap K' = \emptyset$ より) ので, Δ_i^* を通る arc は必ず下の図のように ∂B_i^* の方へ伸びることが, 前ページの上の図(2)からわかる。つまりこの arc は b -line である。

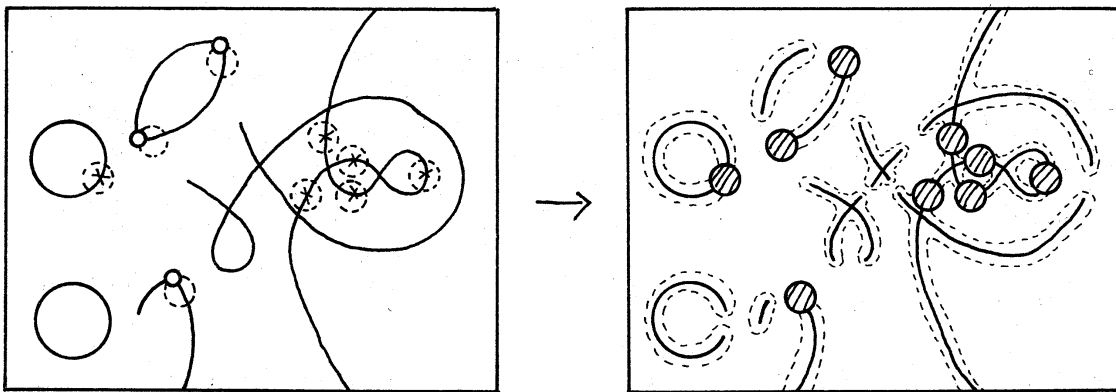


以上のことと, 新しくできた triple point の原像の1つは必ずある Δ_i^* ($i=1, 2, \dots, n_i$) に入らなければならぬことから, 増えた triple point はすべて II 型になる。(Δ_i^* に含まれる triple point の原像は b -line \cap b -line) つまり D の I 型 triple point の数は変わらないので, $T(K') \leq T(\hat{K})$ である。

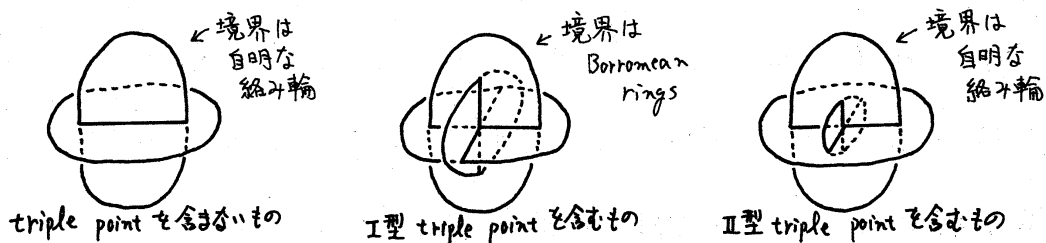
同様に $T(K) \leq T(K')$ も示せるので, $T(K) = T(K')$ となり, T -genus は knot-cobordism 不変量であることがわかる。

(2) の証明 結び目 K の張る clasp singularity を持たない normal singular disk E の原像 E^* は次のページのようになる。図のよう

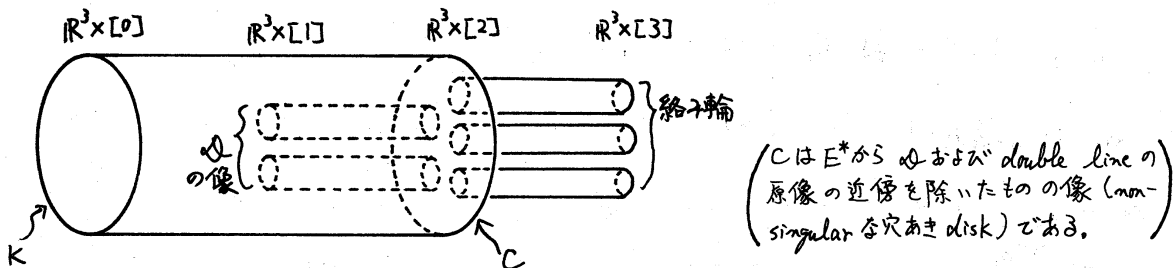
に b -line 上の各 triple point の原像の間, triple point を含まない loop singularity の原像の上, branch point の原像の近くから小さな disk $D = D_1, D_2, \dots, D_m$ を除くと, double line の原像の各連結成分は, triple point の原像を高々一個しか含まない。



これらの近傍を上図の破線で囲ったように取る。それぞれの像は次のようになる。

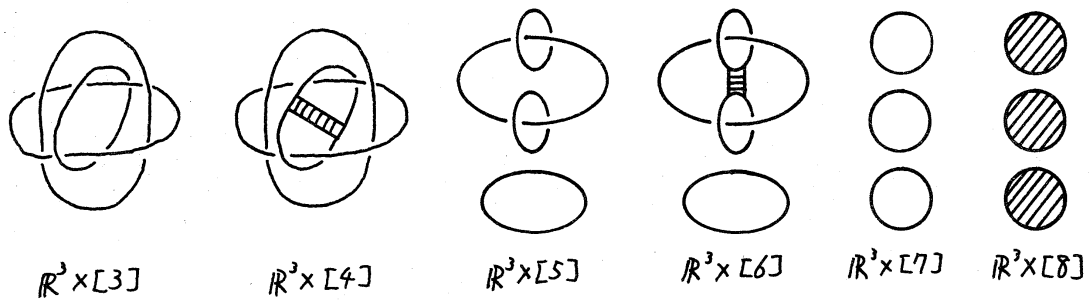


そこで, K に次のような曲面を張る。

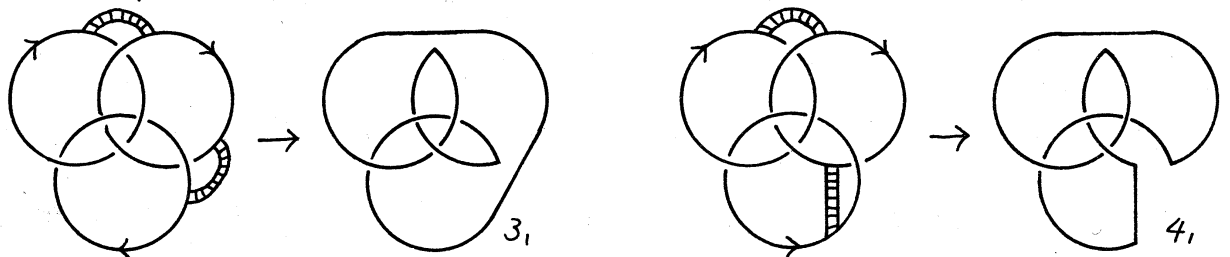


$R^3 \times [3]$ にできる絡み輪は, $T(K, E, \rho)$ 個の Borromean rings と自明な絡み輪との split union となる。ただし, ρ は E^* 上の double

lineの原像の名前のつけ方である。次の図でもわかるように、
 Borromean rings の slice genus は 1 であるから、結局 K には
 $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ 内で genus が $T(K, E, \rho)$ の曲面が張れることに存する。つまり、
 $g^*(K) \leq T(K)$ である。



(3)の証明 [10]により、同じ proper な絡み輪 ($L = \bigcup_{i=1}^n K_i$ と書いたとき、すべての i に対し $\sum_{j \neq i} lk(K_i, K_j) \equiv 0 \pmod{2}$) となるもの。ここで $lk(K_i, K_j)$ は K_i と K_j の絡み数) に relate している結び目 (つまり、 $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$ に proper に埋め込まれた穴あき disk B があって、 $\mathbb{R}^3 \times [0] \cap B, \mathbb{R}^3 \times [1] \cap B$ がそれぞれ結び目、proper な絡み輪に存する) の Art 不変量は一致する。(2)の証明からわかるように、 K は $T(K, E, \rho)$ 個の Borromean rings に relate している。(E, ρ は(2)の証明に用いたもの) 次の図から、1つの Borromean rings に relate している結び目として、3, 結び目または 4, 結び目がとれ、これらの Art 不変量はともに 1 である。



Arf 不変量の加法性により, $T(K, E, \rho) \equiv Arf(K) \pmod{2}$ となる。

結び目 K が *slice* であることと, K が自明な結び目と *cobordant* であることは同値であるので, 定理 2.3(1)から

2.4系 結び目 K が *slice* であることと, $T(K) = 0$ であることは同値である。

注意 上の系は [6] で述べられていることの言い換えである。

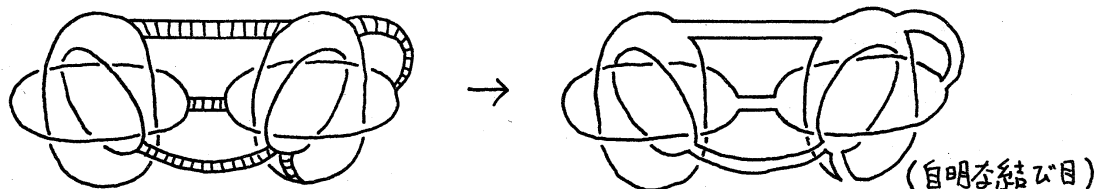
前ページの一番下の左の図より, $T(3_1) = 1$ であることがわかる。そこで, 結び目の n 個の *knot sum* を $\#3_1$ と書くと, その *slice genus* が n であることから, $T(\#3_1) = n$ となる。つまり

2.5命題 任意の自然数 n に対して, T -genus が n となる結び目が存在する。

上に述べた例と違, 7_3 結び目と 3_1 結び目の鏡像の向きを変えたもの $\bar{3}_1$ の *knot sum* $3_1 \# \bar{3}_1$ を考えると, $T(3_1 \# \bar{3}_1) = 0$ になる。すなわち, 2つの結び目 K_1, K_2 に対して

$T(K, \# K_2) \equiv T(K_1) + T(K_2)$ とはなるが、一般に等号は成立しないことがわかる。(等号の成立しない他の例については、[7], [8], [14]参照)

また、下の図をみれば、 $n \geq T(K)$ かつ $n \equiv T(K) \pmod{2}$ となる n に対して、 $T(K, D, \rho) = n$ となる D および ρ の存在することがわかる。



§3 $T(K)$ と $B(K)$

この節では、 T -genus の違、た定義を試みる。

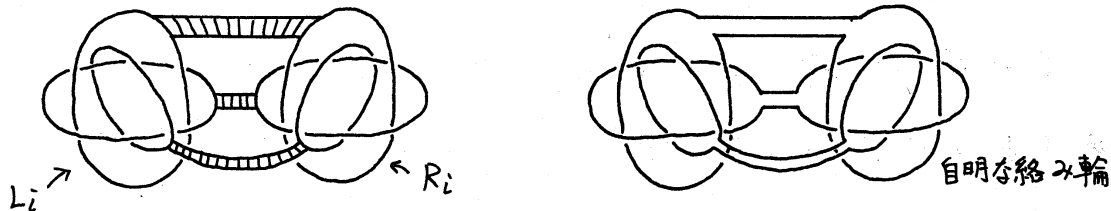
3.1 定義 K を結び目、 R_1, R_2, \dots, R_p を Borromean rings とするとき、それらの split union $K \circ R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_p$ から fusion によって得られる結び目を $K \#_{\mathcal{B}} (R_1 + R_2 + \dots + R_p)$ で表わす。 \mathcal{B} は、fusion に使う band である。

3.2 補題 任意の結び目 K に対し、自然数 n が存在して、 n 個の Borromean rings R_1, R_2, \dots, R_n とある band \mathcal{B} をとると、 $K \#_{\mathcal{B}} (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$ は slice 結び目となる。

証明 定理 2.3(2)の証明と, [5, Theorem 3.1] により,
次の系列 (a) が存在する。

$$(a) \quad K \circ O^m \xrightarrow{\text{fusion}} K' \xrightarrow{\text{fission}} L_1 \circ L_2 \circ \cdots \circ L_n \circ O^{m'}$$

ここで $O^m, O^{m'}$ はそれぞれ m, m' 個の成分をもつ自明な絡み輪,
 L_1, L_2, \dots, L_n は Borromean rings であり, $n \equiv T(K) \pmod{2}$ かつ $n \equiv T(K)$
 $(\pmod{2})$ である。 n 組の Borromean ring $R_i (i=1, 2, \dots, n)$ と $L_1 \circ L_2 \circ \cdots$
 $\circ L_n \circ O^{m'}$ の split union を考える。 次の図のような $3n$ 本の band
による L_i と $R_i (i=1, 2, \dots, n)$ の fusion をとる: とにより, $(L_1 \circ L_2 \circ \cdots$
 $\circ L_n \circ O^{m'}) \circ R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$ は $(3n+m')$ 個の成分をもつ自明な絡み輪
になる。



この band B を使って各段階で R_1, R_2, \dots, R_n との fusion をとる:
とにより, 系列 (a) は次の系列 (b) になる。

$$(b) \quad \tilde{K} \circ O^m \xrightarrow{\text{fusion}} \tilde{K}' \xrightarrow{\text{fission}} O^{3n+m'}$$

ここで $\tilde{K} = K \#_B (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$, $\tilde{K}' = K' \#_B (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$
という結び目である。系列 (b) は, \tilde{K} が slice 結び目であることを
示している。

この補題で示されたような, $K \#_B (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$ が slice

結び目となる n の最小値を $B(K)$ と書く。

3.3 定理 K を結び目とすると, $T(K) = B(K)$ となる。

証明 $B(K)$ の定義と補題 3.2 の証明から $B(K) \leq T(K)$

は明らかであるので $B(K) \geq T(K)$ を示す。

$B(K) = p$, つまりある band B と p 組の Borromean rings $R_i (i=1, 2, \dots, p)$ があり, $K \#_B (R_1 + R_2 + \dots + R_p)$ が slice 結び目になると仮定する。次の系列 (a) が存在する。

$$(a) \quad K \#_B (R_1 + R_2 + \dots + R_p) \circ O^m \xrightarrow{\text{fusion}} K' \xrightarrow{\text{fission}} O^{m'}$$

この系列 (a) を左側に伸ばすと次の (a') になる。


$$(a') \quad (K \circ R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_p) \circ O^m \xrightarrow{\text{fusion}} K \#_B (R_1 + R_2 + \dots + R_p) \circ O^m \xrightarrow{\text{fusion}} K'$$

ここで, 左側の fusion は band B によるもので, K' は (a) からわかるように ribbon 結び目である。

補題 3.2 の証明の図で示したような band B' と Borromean rings L_1, L_2, \dots, L_p をとり, 各段階で fusion をとる: これにより, 系列 (a') は次のような系列 (b) になる。

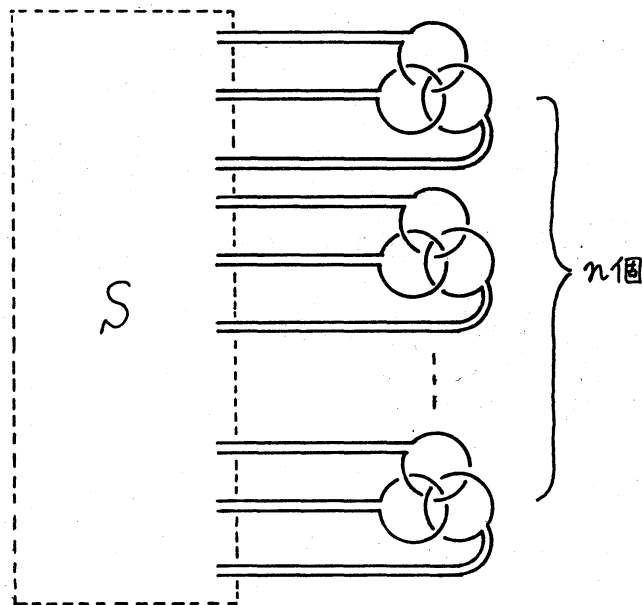
$$(b) \quad K \circ O^{3p+m} \xrightarrow{\text{fusion}} \tilde{K} \circ O^m \xrightarrow{\text{fusion}} \tilde{K}'$$

ここで $\tilde{K} = (K \#_B (R_1 + R_2 + \dots + R_p)) \#_{B'} (L_1 + L_2 + \dots + L_p)$, $\tilde{K}' = K' \#_{B'} (L_1 + L_2 + \dots + L_p)$ という結び目である。 K' が ribbon 結び目であることから, \tilde{K}' の T-genus は p 以下になる。系列 (b) より K と \tilde{K}' は cobordant だから $T(K) = T(\tilde{K}') \leq p = B(K)$ となる。

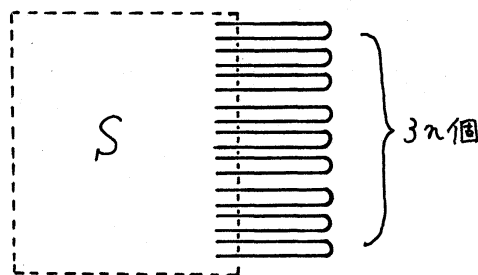
$B(K)$ による T -genus の定義は, clasp singularity と Hopf link
 と unknotting operation を関連付ける見方と共通したところがあるように思われる。([12] 参照)

補題 3.2 の証明から, 次のような結び目の分解が可能であることがわかる。

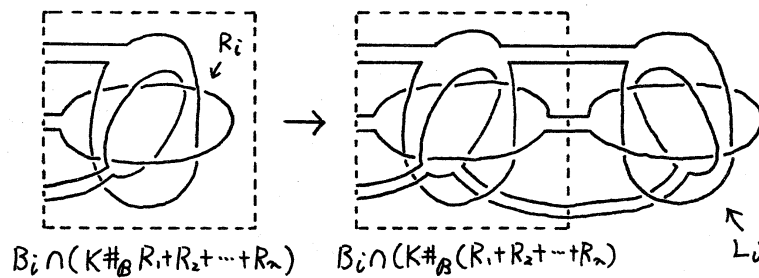
3.4 定理 任意の結び目 K は, 次のように “slice 部分” と “Borromean rings 部分” に分けることができる。



ただし, “Borromean rings 部分” の数 n は, $n \geq T(K)$ かつ $n \equiv T(K) \pmod{2}$ となる任意の自然数であり, 破線の内部 S は, 下の図のようにすると slice 結び目となる, $3n$ 本の arc からなる tangle である。



証明 補題 3.2 の証明のようには, $K \#_{\mathcal{B}} (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$ を slice 結び目にする。 R_i ($i=1, 2, \dots, n$) は Borromean rings である。そのとき, \mathbb{R}^3 の中に 3-ball B_1, B_2, \dots, B_n があって, $B_i \cap (K \#_{\mathcal{B}} (R_1 + R_2 + \dots + R_n))$ は下図左のようになる。 ($i=1, 2, \dots, n$)



これらに, Borromean rings L_1, L_2, \dots, L_n を上図右のように fusion する。このときに使う hand を \mathcal{B}' とすると, $(K \#_{\mathcal{B}} (R_1 + R_2 + \dots + R_n)) \#_{\mathcal{B}'} (L_1 + L_2 + \dots + L_n)$ は K と同じ結び目型になることがわかる。 L_i ($i=1, 2, \dots, n$) に対応する部分が, "Borromean rings 部分" で, $(K \#_{\mathcal{B}} (R_1 + R_2 + \dots + R_n))$ に対応する部分が, "slice 部分" である。

T -genus を使って, knot-cobordism 群に距離を導入することが可能である ($\alpha = [K]$ を knot-cobordism 群の元としたとき, $T(\alpha) = T(K)$ とおき, 距離関数 d_T を, $d_T(\alpha, \beta) = T(\alpha - \beta)$ と定める) が, このことについては [4], [14] を, また, T -genus の絡み輪への拡張については [14] をそれぞれ参照されたい。

付表

交点数が9以下の素な結び目の signature, slice genus および T-genus の表である。signature と slice genus は, [9], [13] を参考にした。T-genus を実際にどのように求めたかは, [7] を参照されたい。なお, 不等号はその数以下 (T-genus は mod 2 で等しくなる) ということ, *印は Artin 不変量が 1 ということである。

	$\frac{1}{2} M $	g^*	T		$\frac{1}{2} M $	g^*	T		$\frac{1}{2} M $	g^*	T		$\frac{1}{2} M $	g^*	T			
* 3 ₁	1	1	1		8 ₈	0	0	0		9 ₈	1	1	2	*	9 ₂₉	1	1	1
* 4 ₁	0	1	1		8 ₉	0	0	0		9 ₉	3	3	≤ 8	*	9 ₃₀	0	1	1
* 5 ₁	2	2	3	*	8 ₁₀	1	1	1		9 ₁₀	2	2	≤ 8		9 ₃₁	1	1	2
5 ₂	1	1	2	*	8 ₁₁	1	1	1		9 ₁₁	2	2	≤ 4	*	9 ₃₂	1	1	1
6 ₁	0	0	0	*	8 ₁₂	0	1	1	*	9 ₁₂	1	1	1	*	9 ₃₃	0	1	1
* 6 ₂	1	1	1	*	8 ₁₃	0	1	1	*	9 ₁₃	2	2	≤ 7	*	9 ₃₄	0	1	1
* 6 ₃	0	1	1		8 ₁₄	1	1	2	*	9 ₁₄	0	1	1	*	9 ₃₅	1	1	≤ 7
7 ₁	3	3	≤ 6		8 ₁₅	2	2	≤ 4		9 ₁₅	1	1	2	*	9 ₃₆	2	2	3
* 7 ₂	1	1	≤ 3	*	8 ₁₆	1	1	1		9 ₁₆	3	3	≤ 6	*	9 ₃₇	0	1	1
* 7 ₃	2	2	≤ 5	*	8 ₁₇	0	1	1		9 ₁₇	1	1	2		9 ₃₈	2	2	≤ 6
7 ₄	1	1	≤ 4	*	8 ₁₈	0	1	1		9 ₁₈	2	2	≤ 6		9 ₃₉	1	1	2
7 ₅	2	2	≤ 4	*	8 ₁₉	3	3	≤ 5		9 ₁₉	0	1	2	*	9 ₄₀	1	1	1
* 7 ₆	1	1	1		8 ₂₀	0	0	0		9 ₂₀	2	2	2		9 ₄₁	0	0	0
* 7 ₇	0	1	1		8 ₂₁	1	1	2	*	9 ₂₁	1	1	≤ 3		9 ₄₂	1	1	2
* 8 ₁	0	1	1		9 ₁	4	4	≤ 10	*	9 ₂₂	1	1	1	*	9 ₄₃	2	2	3
8 ₂	2	2	2		9 ₂	1	1	≤ 4	*	9 ₂₃	2	2	≤ 5		9 ₄₄	0	1	2
8 ₃	0	1	2	*	9 ₃	3	3	≤ 9	*	9 ₂₄	0	1	1		9 ₄₅	1	1	2
* 8 ₄	1	1	1	*	9 ₄	2	2	≤ 7		9 ₂₅	1	1	2		9 ₄₆	0	0	0
* 8 ₅	2	2	3		9 ₅	1	1	≤ 6		9 ₂₆	1	1	2	*	9 ₄₇	1	1	1
8 ₆	1	1	2	*	9 ₆	3	3	≤ 7		9 ₂₇	0	0	0	*	9 ₄₈	1	≤ 2	≤ 3
8 ₇	1	1	2	*	9 ₇	2	2	≤ 5	*	9 ₂₈	1	1	1		9 ₄₉	2	2	≤ 6

References

- R. Fox and J. Milnor: Singularities of 2-sphere in 4-space and cobordism of knots, *Osaka J. Math.*, 3 (1966), 257-267.
- F. Hosokawa and T. Yanagawa: Is every slice knot a ribbon knot? *Osaka J. Math.*, 2 (1965), 373-384.
- S. Kaplan: Constructing framed 4-manifolds with given almost framed boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 254 (1979), 237-263.
- A. Kawauchi, H. Murakami and K. Sugishita: On the T-genus of knot cobordism, to appear.
- A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki: Descriptions on surfaces in four-space I, *Math. Semi. Notes Kobe Univ.*, 10 (1982), 75-124.
- A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki: Descriptions on surfaces in four-space II, to appear.
- H. Murakami: Borromean rings and knot cobordism, Master Thesis, Osaka City Univ. (1983)
- H. Murakami and K. Sugishita: Triple points and knot cobordism, pre-print.
- Y. Nakanishi: A note on unknotting number, *Math. Semi. Notes Kobe Univ.*, 9 (1981), 99-108.
- [1] R. Robertello: An invariant of knot cobordism, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 543-555.
- [2] D. Rolfsen: *KNOTS AND LINKS*.
- [3] T. Shibuya: Some relations among various numerical invariants for links, *Osaka J. Math.*, 11 (1974), 313-322.
- [4] Y. Shinohara: On the signature of knots and links, Dissertation, Florida State Univ., (1969).
- [5] K. Sugishita: Triple points and knot cobordism, Master Thesis, Osaka City Univ., (1983).