数理解析研究所講究録
第 487 巻 1983 年 163-183

Tunnel Number 1 Knots の Property P について

北大 理 小林文夫 (Kobayashi Fumio)

§ R.P. Osborne は[Os]で"与えられた tunnel number 1 (H-genus 2) knot K が Property P を持つ事を示すアルゴリズム"を提出したが、ここでは一般に tunnel number 1 (H-genus 2) knot なら Property P を持つ事を示す。その為直接には次の Theorem の証明を目的としている。

Theorem　K が tunnel number 1 (H-genus 2) knot であるとき、K に沿う non-trivial Dehn's surgery で構成した 3-mfd, $\chi_{S^3}(K:r)$, $r\in\mathbb{Q}$ は wave の存在しない genus 2 H-図式を持つ。

Remark　K が 2-bridge knot の場合は 落合先生がすでに [Ochi] に於いて示された。従って上の Theorem は その拡張である。

上の Theorem と次の 2 つの Theorem を合わせると、目的の結果を得る

H.O.T-Theorem (本間, 落合 高橋)

S^3のnon-canonicalなgenus 2 H-図式にはwaveがある。

Theorem (Thurston e.t.c)

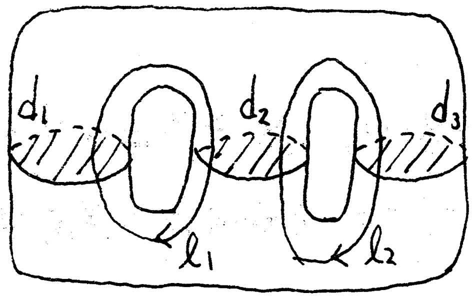
H-genus 2にはpoincaréの反例がない。 //

Def. knot Kがtunnel number 1 (或いはHeegaard genus 2) knotであるとは

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Kはnon-trivial knotであり, Kのregular n.b.d $N(K;S^3)$に1-handleを1つ付け加えて, standardなgenus 2 handle bodyにできるとき。 //

Remark tunnel number 1 knotsと云うclassは, 総ての2-bridge knotsとtorus knotsを含んでいる。 //

以下VはS^3にstandardにembeddingされたgenus 2 handle bodyとし, Vのstandard meridian discs d_1, d_2, d_3とstandard longitude curves l_1, l_2を下図で定義する。



l_1, l_2には適当な向きを付けておく。

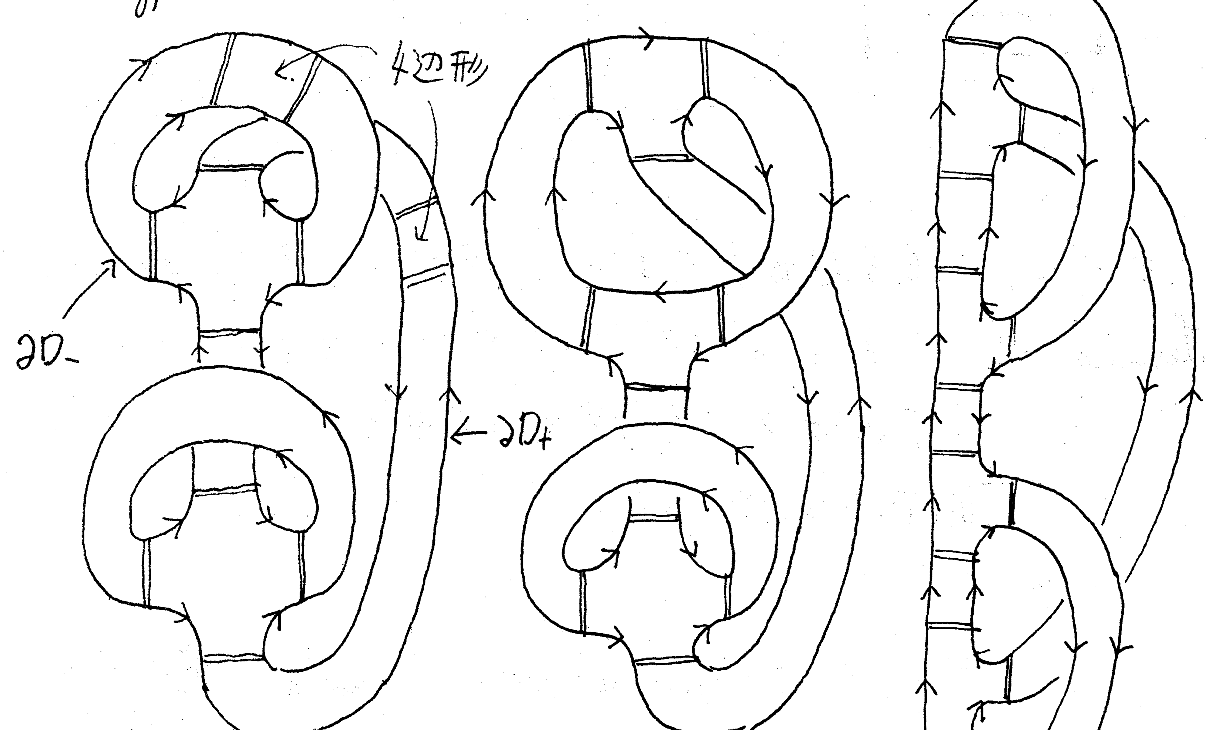
pair $(V;D)$をVとVにproperにembeddingされた2-disc Dの組で更に$V-D$はconnectedとすると, 対応 $K \simeq \mathrm{Core}(V-\mathring{N}(D;S^3))$により, Kを考える事とpair $(V;D)$を考える事は同じである。

従って以後は専ら pair $(V:D)$ を考えていくが，∂D には向きが付いており，∂D と $l_1 \cup l_2$ は transversal としておく。

Def．Set $\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ で ∂V を curves $l_1, l_2, \partial D$, で切り開いたものを表わす。各要素は boundary を含む。

Def. $\Gamma(D)$ で ∂V を ∂D で切り開いた図形上に curves l_1, l_2 を記入したものを表わす。

$\Gamma(D)$ は D の取り方により色々考えられるが，特に次の3つの type に名前を付けておく。



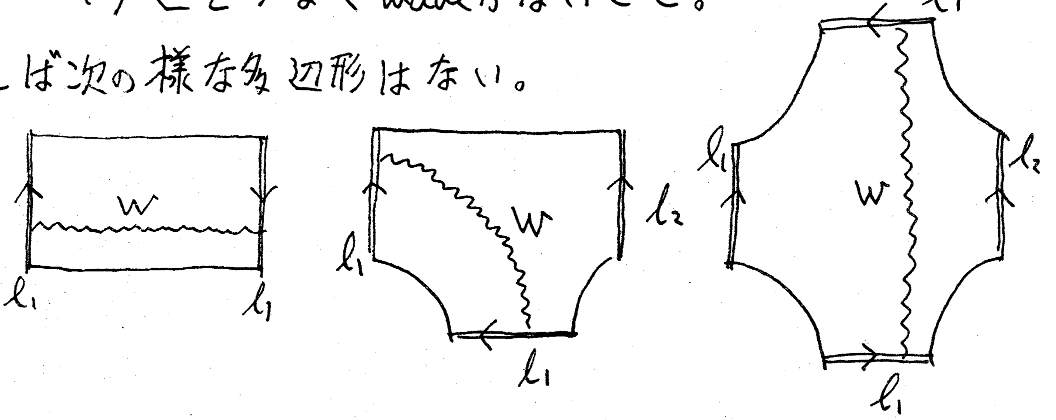
8型　　8-6型　　6型

- 4，6，8 辺形で構成されていて，6，8 辺形の l_1, l_2 にぞくす辺は直接，或いは4辺形の列によりつながっている。
- $\Gamma(D)$ の2ヶある boundary には ∂D の向きから induce される向

きが付くが、表の領域を左手に見る向きの付いている方を∂D_+
右手に見る向きの付いている方を∂D_-とする。
。l_1, l_2にぞくす辺は2重線で記入してある。

Def. $\Gamma(D)$に関する条件(*)とは、$\Gamma(D)$を構成する各図形
(i.e. Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$の各要素)に於いて、$l_1, l_2$にぞくす辺をつなぐwaveがないこと。

例えば次の様な多辺形はない。



それぞれ、4, 6, 8辺形上でl_1にぞくす辺をつなぐwaveがある。

Lemma 1　　$K \cong \mathrm{Core}(V - \mathcal{N}(D; S^3))$とするとき
(i) $\Gamma(D)$は8, 8-6, 6型のいずれか.
(ii) $\Gamma(D)$は(*)をみたす

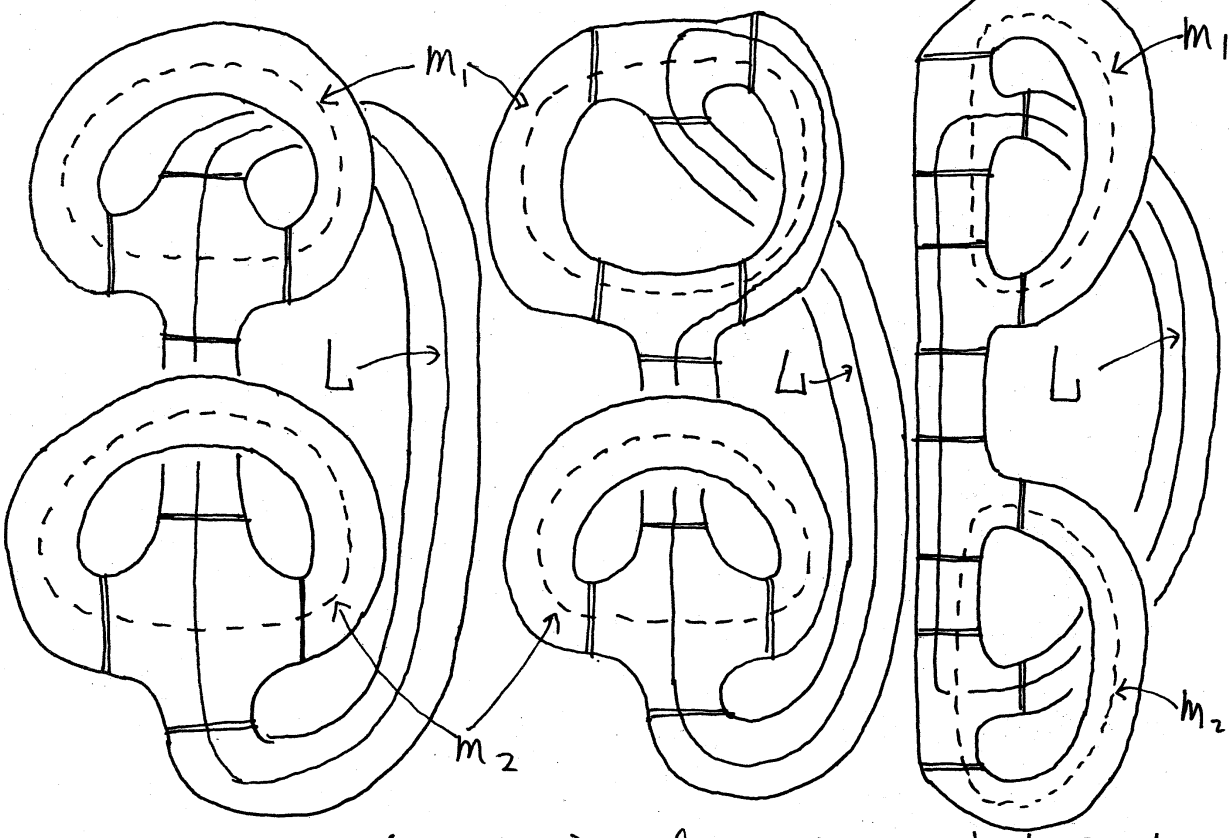
$\Longrightarrow$

Kに沿うnon-trivial Dehn's surgeryで構成した3-mfd, $\chi_{S^3}(K; r)$にはgenus 2 H-図式でwaveのないものがある。

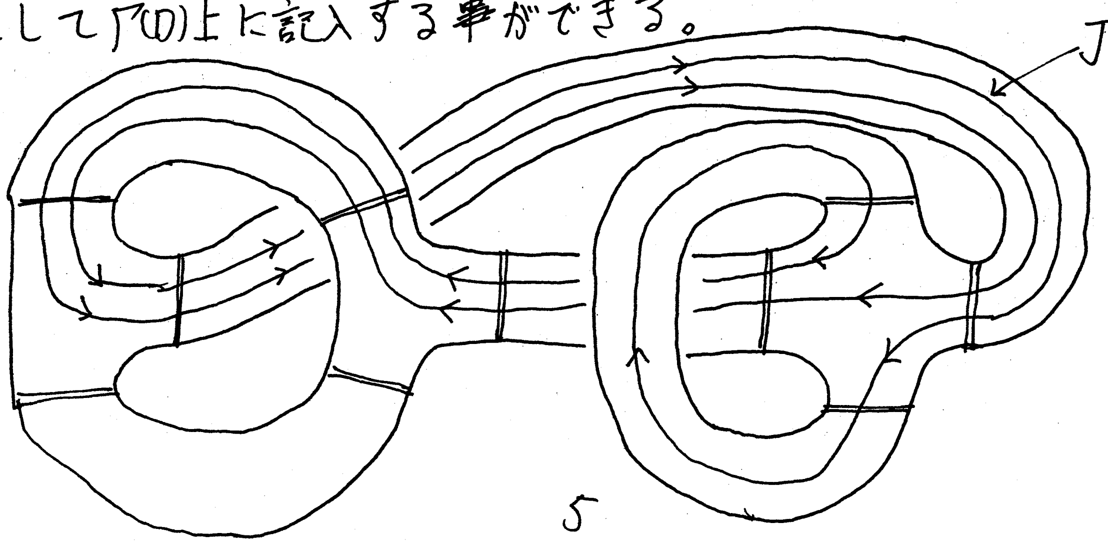
証明の概略

$\Gamma(D)$が8, 8-6, 6型のとき、$\Gamma(D)$上の次のcurves m_1, m_2は

solid torus $V - \mathring{N}(D:S^3)$ の meridian curves である。



従って torus $\partial(V-\mathring{N}(D:S^3))$ の longitude curve L を $\Gamma(D)$ 上にかくことができる。すると torus $\partial(V-\mathring{N}(D:S^3))$ 上の, $\chi_{S^3}(K\frac{q}{p})$ を決定する surgery curve J は, L を P 本 parallel に準備してそれを m_1 (or m_2) に沿って適当に回わして１本につないだ curve として $\Gamma(D)$ 上に記入する事ができる。



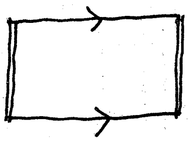
このとき $(\partial V ; l_1, l_2 ; \partial D, J)$ は $\chi_{S^3}(K;\frac{q}{p})$ の genus 2 H-図式であるが wave が存在しない。 //

§1

Def. 多辺形の good 及び bad そして (+) と (−)

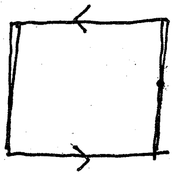
$\Gamma(D)$ を構成する 4, 6, 8 辺形に於いて

○ 4辺形が good とは ∂D_+ にぞくす辺と ∂D_- にぞくす辺が各々1コあるとき。

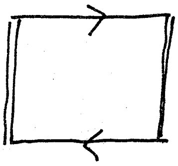


good

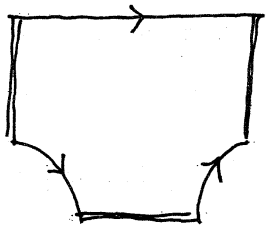
それ以外を bad



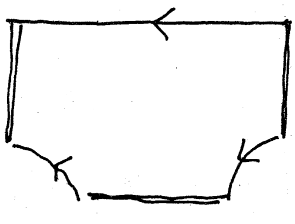
or



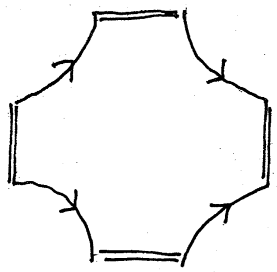
○ 6辺形が good (+) とは ∂D_+ にぞくす辺が2コ，∂D_- にぞくす辺が1コのとき



○ 6辺形が good (−) とは ∂D_- にぞくす辺が2コ，∂D_+ にぞくす辺が1コのとき



○ 8辺形が good とは ∂D_+ と ∂D_- にぞくす辺がそれぞれ2コあり右図の様なとき



Lemma

I　$\mathrm{cl}\,\mathrm{Set}\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ は good 8辺形2コと4辺形達からなる。

(ii) 2コのgood 8辺形はbad 4辺形の列でつながれる。

$\Longrightarrow$ $\Gamma(D)$は8型である。

II (i) Set $\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$はgood 8辺形1コ，6辺形が2コでそのうち1コはgood，残りは4辺形達から成る。

(ii) good 8辺形と少なくとも1コあるgood 6辺形はbad 4辺形の列でつながれる。

$\Longrightarrow$ $\Gamma(D)$は8-6型である

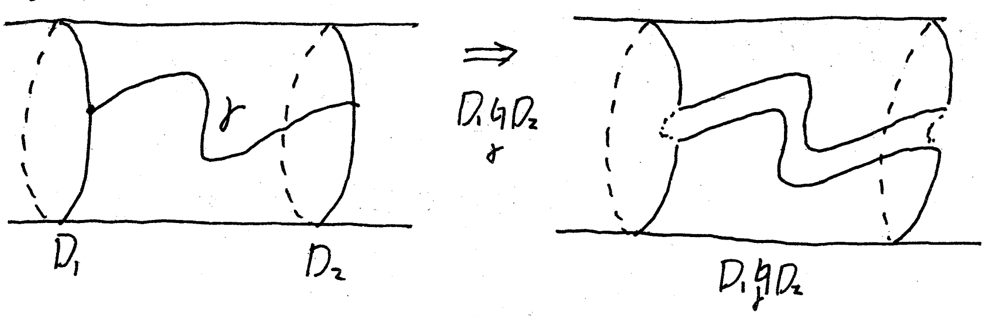
III (i) Set $\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$が6辺形4コ，そのうち少なくとも3コがgoodで，2コはgood(+) (or (−)) 1コはgood(−) (or (+)) 残りは4辺形達から成る。

(ii) 2コあるgood(+) (or (−)) 6辺形はbad 4辺形の列でつながれる。

$\Longrightarrow$ $\Gamma(D)$は6型である。 //

このLemmaは$\Gamma(D)$がorientableである事，boundaryが2コである事，及び∂D_tの向きに注意してSet $\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$にぞくす多辺形を$l_1$, l_2に沿って張り合わせていけば容易にわかる。

Def. 2枚のdiscs D_1, D_2のarc γに沿うband sum $D_1 \natural_\gamma D_2$



つまり，Vに properに embedding されている D_1, D_2 から ∂V上の arc γ により定義された band により新しく1枚の disc $D_1 \natural_\gamma D_2$ を造る操作である。

Lemma 2　(i) $\Gamma(D_1)$ は 8, 8-6, 6型 のいずれか

(ii) $\Gamma(D_1)$ は(※)をみたす。

(iii) ∂D_2 は $\Gamma(D_1)$ 上の m_1, or m_2 の curve (*Lemma* 1)

(iv) Set $\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial(D_1 \natural_\gamma D_2)\}$ には2辺形がない。

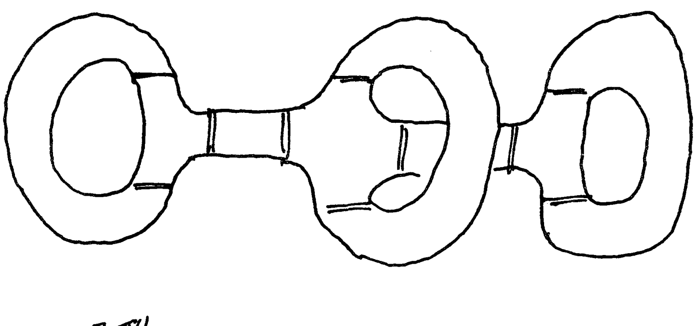
(v) $\gamma \cap (l_1 \cup l_2) \neq \phi$

$\Longrightarrow$

$\Gamma(D_1 \natural_\gamma D_2)$ は 8, 8-6, 6型のいずれかである。

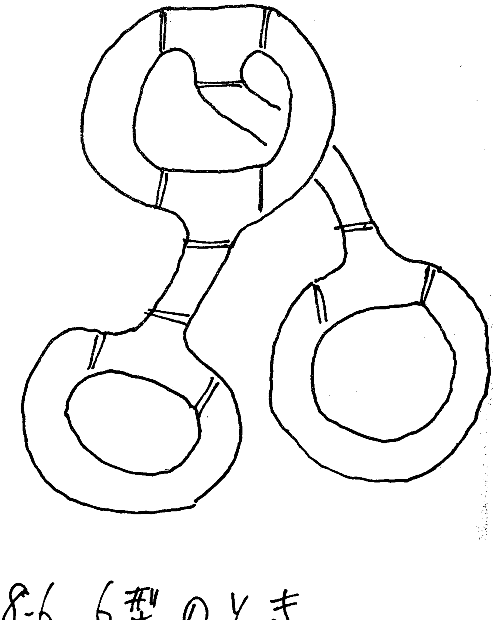
証明の概略

(i)と(iii)より $\Gamma(D_1)$ を ∂D_2 で切り開くと次のいずれかである。



I型

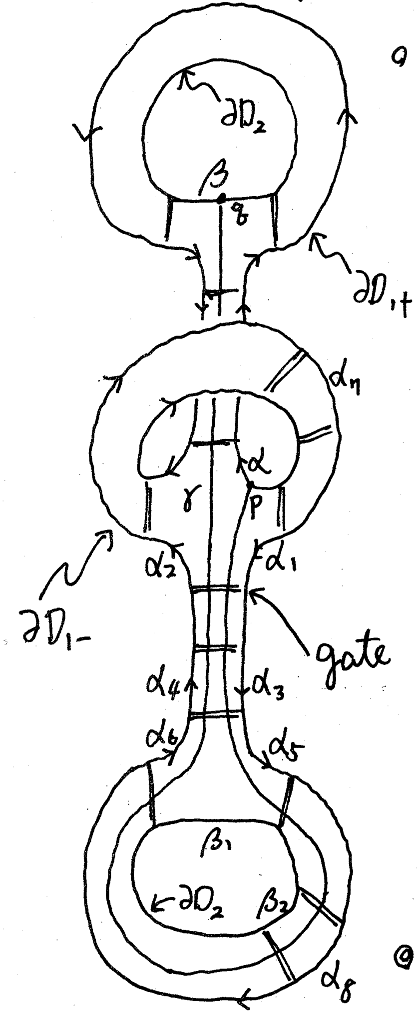
$\Gamma(D_1)$ が 8, 8-6 型のとき



II型

$\Gamma(D_1)$ が 8-6, 6型のとき

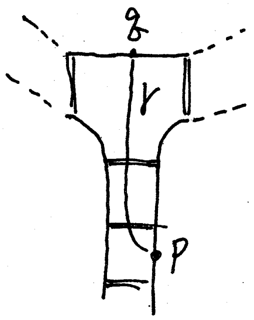
ここでは工型のときに説明する。

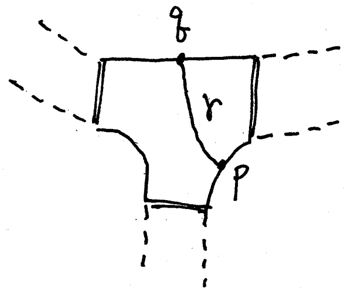


○ 工型の図形上にband sumを定義するarc γをかく。γの2つの端点をp, qとする。

$p=\gamma\cap\partial D_{1\pm}$, $q=\partial D_2$

このとき(iv),(v)より，点p, qは4辺形の辺上にはなく，また1つの多辺形の辺上にp, qの両方があることもない。





◎ 点pは8辺形の辺上にある。

◎ 点pが∂D_{1+}にぞくす辺上にあれば必ずγはgateを通る。

・点pののっている辺をα，点qののっている辺をβとする。

・上図でαは∂D_{1+}にぞくす辺だから，αと∂V上でidentifyされる辺は∂D_{1-}にぞくす辺であり，それは図で$\alpha_1 \sim \alpha_8$である。

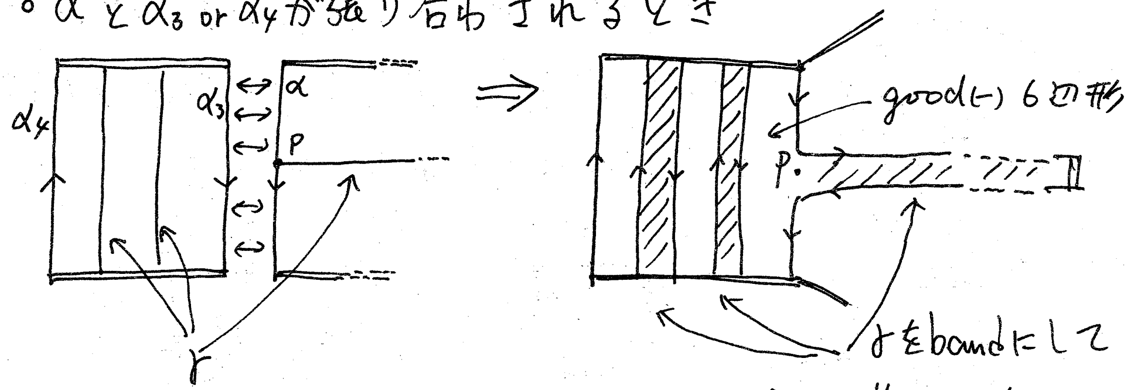
・同様に辺βとidentifyされる辺はβ_1かβ_2である。

さて Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial(D_1 \cup D_2)\}$ がどの様な図形から成っているかを調べる。∂D_2 には ∂D_1 からの向きが付いている。

(イ) まず点Pを内点に含む図形について.

◦ 仮定(ハ)より α と α_1 or α_2 は張り合わされない。

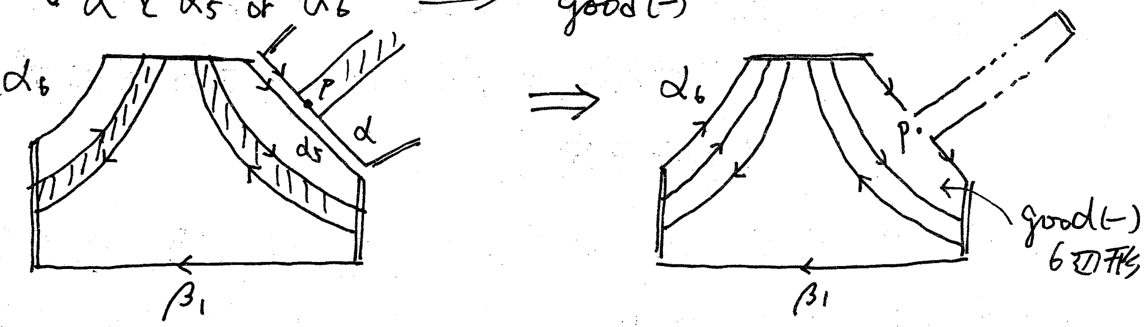
◦ α と α_3 or α_4 が張り合わされるとき



γ を band にして切り離し若干の修正。

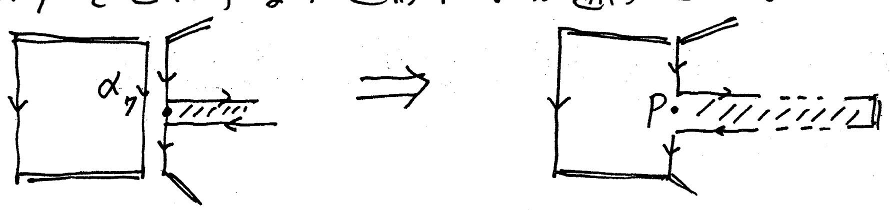
従って 点Pは Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial(D_1 \cup D_2)\}$ で good(−) 6辺形の内点である。

◦ α と α_5 or α_6 $\longrightarrow$ good(−)

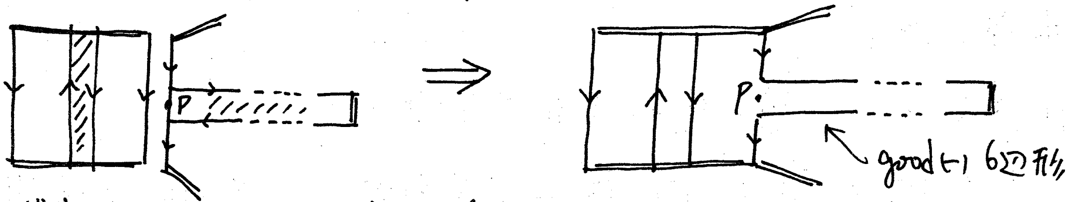


◦ α と α_7 $\longrightarrow$ good(−) 6辺形

α_7 を辺にする4辺形に γ が通っていないとき

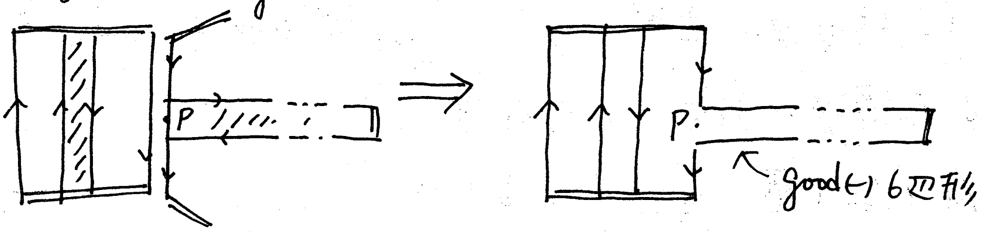


α_7 を辺にする4辺形にγが通っているとき



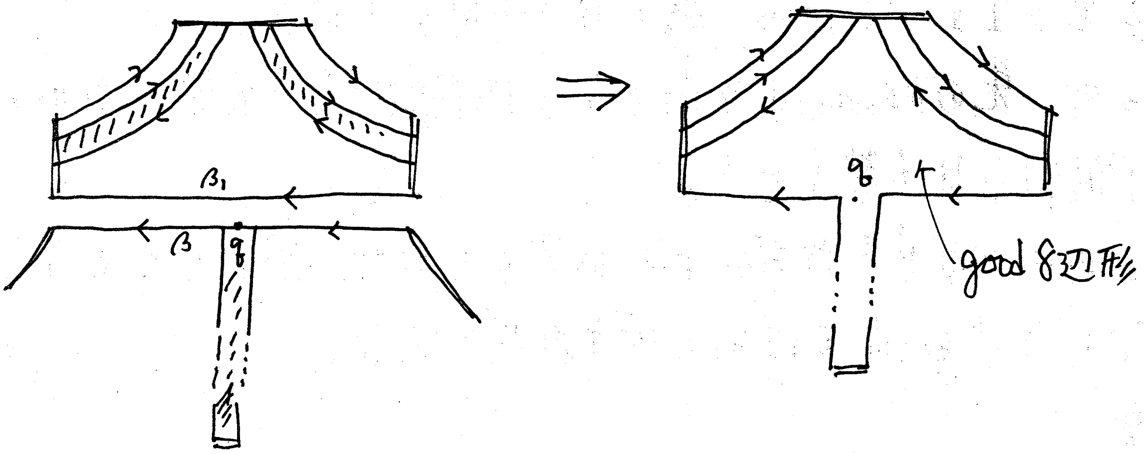
いずれにしてもgood(−) 6辺形

◦ α と α_8 ⟶ good(−) 6辺形



(ロ)点qを内点に含む多辺形について

◦ βとβ_1が張り合わされるとき，qを内点に含む図形はgood 8辺形である。



◦ β と β_2 ⟶ good(−) 6辺形．このときβ_1を辺に含む多辺形はgood(+) 6辺形である。

さて点Pと点qをそれぞれ内点に含む多辺形は，γから

定義される bad 4辺形の列(i.e. band)でつながれるから 次がわかった。

(i) β と β_1 が張り合わされるとき、

Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial(D_1 \cup_\gamma D_2)\}$は good 8辺形1つと good(−) 6辺形1つ、更に工型図形を構成する8辺形からもう1つ6辺形ができ、残りは4辺形。そして good 8辺形と good(−) 6辺形は bad 4辺形の列でつながれる。

(ii) β と β_2 が張り合わされるとき、

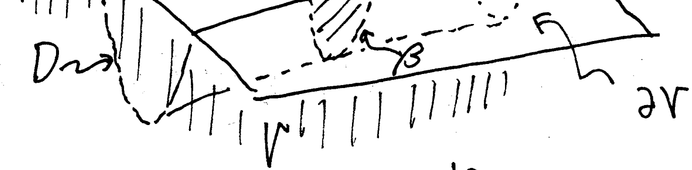
Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial(D_1 \cup_\gamma D_2)\}$は点 P, q を内点にする good(−) 6辺形、(この2つは bad 4辺形の列でつながれている。) β_1 を辺にする good(+) 6辺形、そして工型図形を構成する8辺形からもう1つの6辺形、残りは4辺形より成る。

従って、先の Lemma より (i) のとき $\Gamma(D_1 \cup_\gamma D_2)$ は 8-6 型、(ii) のとき $\Gamma(D_1 \cup_\gamma D_2)$ は 6型となる。

この例では点 P が ∂D_{1+} 上にあるとしたが、∂D_{1-} 上にあるとすると上で good 6辺形の符号が逆になる。 //

§2

Def. pair$(V:D)$に対する ∂-compressing disc δ とは次のもの。



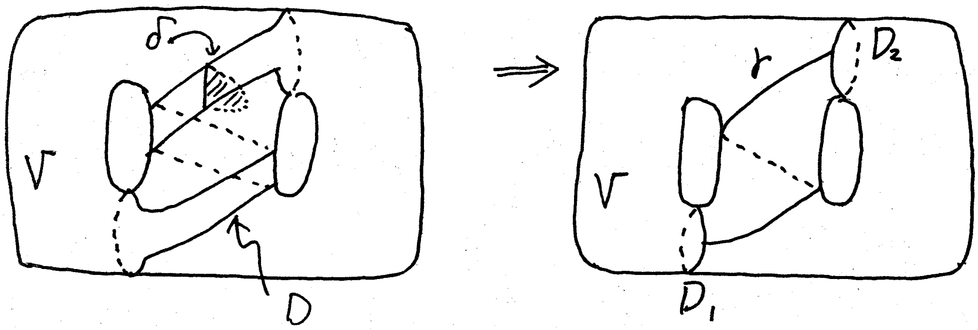
$\alpha = \partial V \cap \delta$

$\beta = D \cap \delta$

$\alpha \cup \beta = \partial \delta$, $\alpha \cap \beta = \{2pt\}$

更に α と ∂D の subarc でできる ∂V 上の s.c.c は ∂V 上 homotopic zero ではない。 //

従って pair $(V:D)$ に ∂-compressing disc δ があれば $D=D_1 \natural_\gamma D_2$ と考えられる。ここで γ は $\alpha=\partial V\cap\delta$ に1点で transversal に交わる arc として定義される。



Lemma pair $(V:D)$ に対して D は V の standard meridian discs d_1, d_2, d_3 に parallel な何枚かの discs を適当な順に band sum したものである。 //

従って pair $(V:D)$ に対して上の Lemma に云う discs の最小の枚数として或る自然数が対応する。これを $n(D)$ とかく。

Def. K を tunnel number 1 (H-genus 2) knot とするとき

$$n(K) \underset{\text{def}}{=} \min\{n(D) \mid K \cong \mathrm{Core}(V - \mathring{N}(D:S^3))\}$$

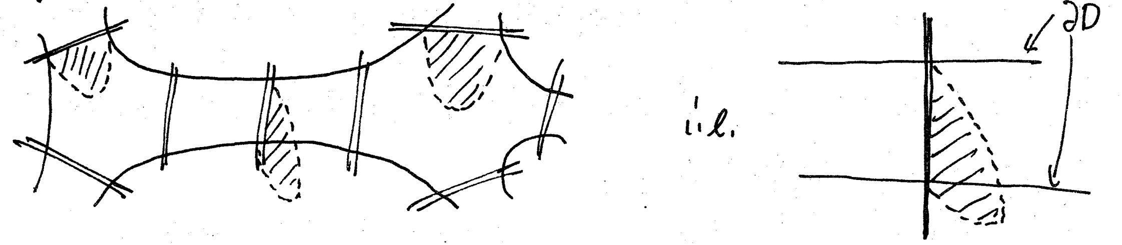
Remark

$$n(K)=2 \iff K: \text{2-bridge knot}$$ //

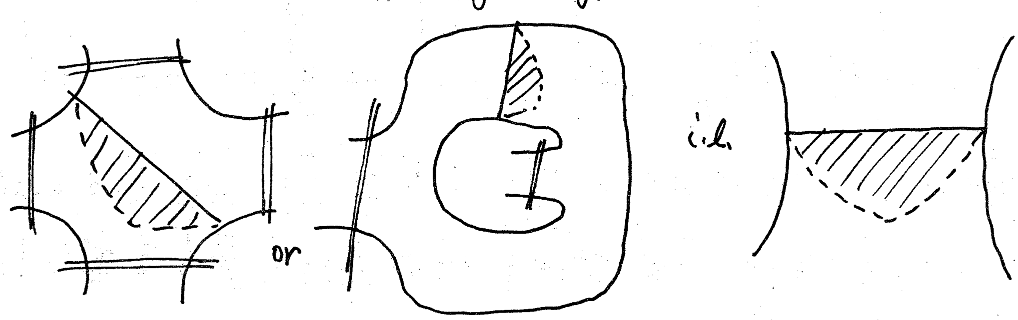
Def. type (a), (b), (c) の ∂-compressing disc とは次のもの。
V の Core (i.e. spine) を S としたとき、$\delta\cap S=\phi$ で、

勿論 ∂-compressing disc であり.

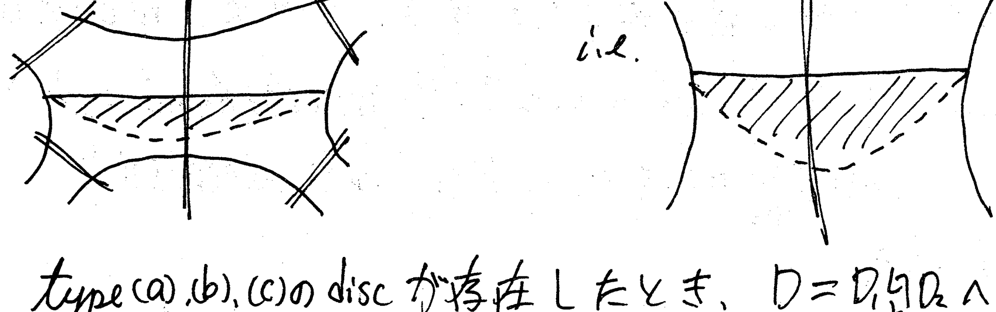
◦ type(a) の disc δ : $\partial V\cap\delta$ が l_1 or l_2 上にある.



◦ type(b) の disc δ : $(\partial V\cap\delta)\cap(l_1\cup l_2)=\phi$ かつ ∂V と D を setwise に固定した V 上の ambient isotopy で type(a) の disc に重ねられない。



◦ type(c) の disc δ : $\#\{(\partial V\cap\delta)\cap(l_1\cup l_2)\}=1$, かつ ∂V と D を setwise に固定した V 上の ambient isotopy で type (a),(b) の disc に重ねられない。

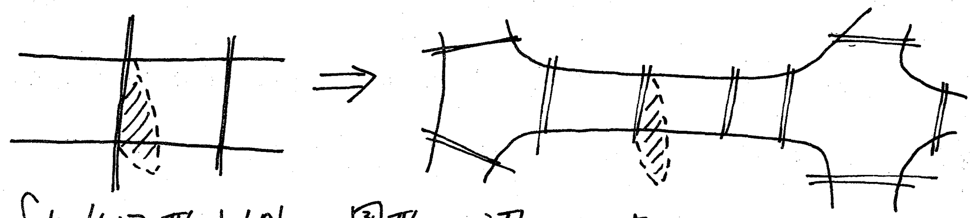


Def. type(a),(b),(c) の disc が存在したとき、$D=D_1\cup D_2$ への分解のされ方を次できめる。

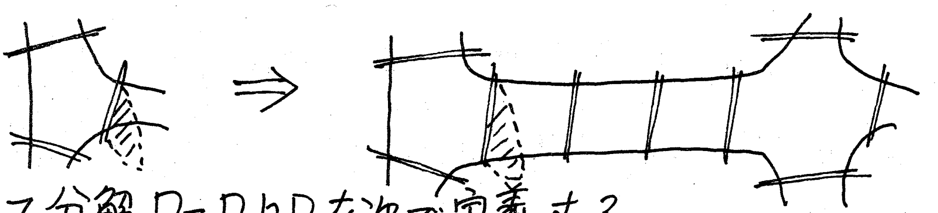
◦ type(a) の disc δ による分解

$\partial V\cap\delta$ が4辺形の辺のとき，4辺形以外の図形につながるま

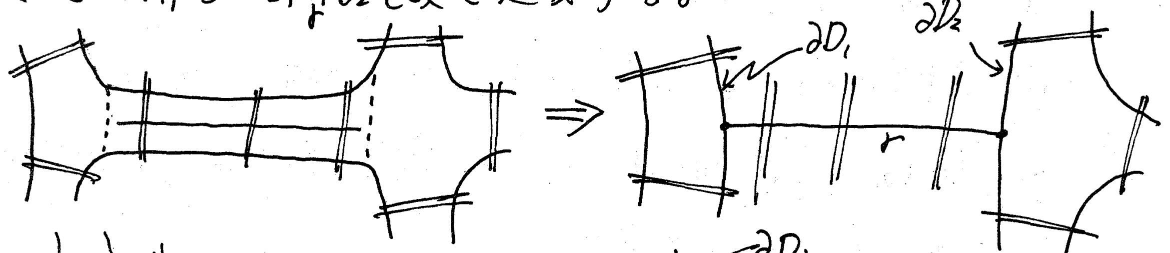
でつなげる.

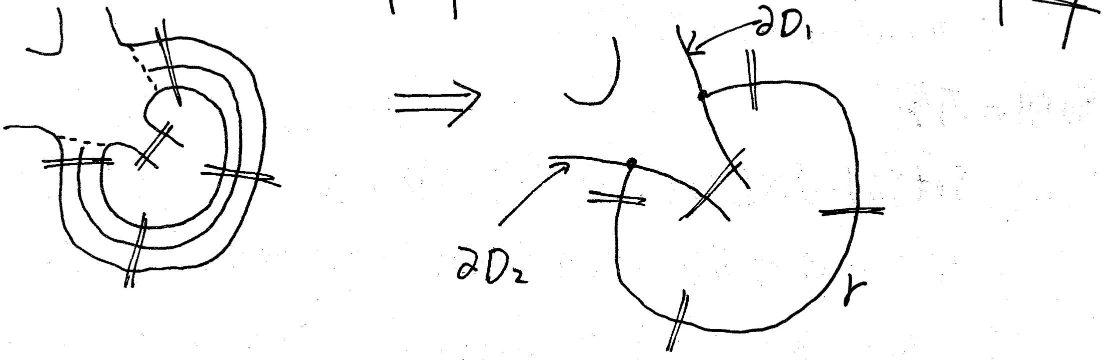


$\partial V \cap \delta$ が4辺形以外の図形の辺のとき

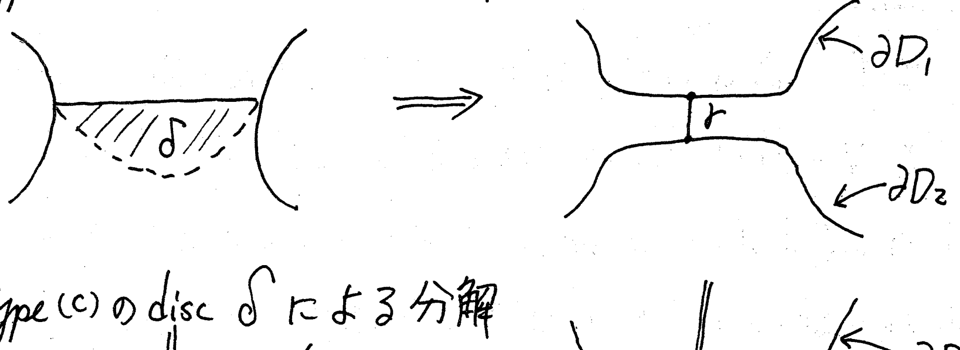


さて分解 $D = D_1 \cup_\gamma D_2$ を次で定義する。

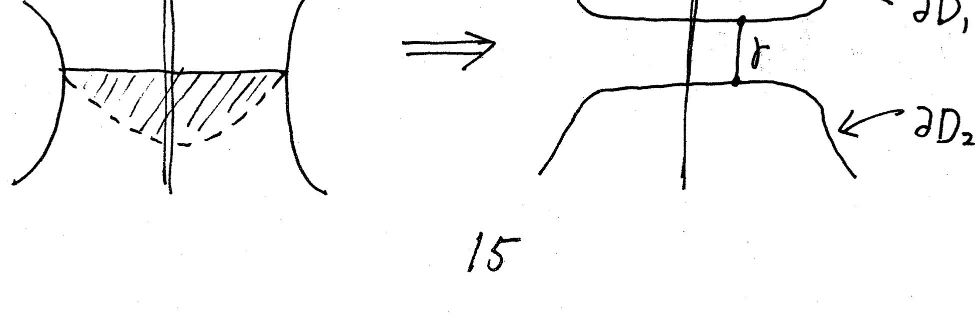




∘ type (b) の disc δ による分解



∘ type (c) の disc δ による分解



◎ type (a), (b), (c) の disc が存在するとき 分解の優先順位を (a) > (b) > (c) とする。つまり type (a) の disc があれば必ず (a) で分解することにし、(b), (c) ではしない……。

Lemma　pair $(V:D)$ に対して Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ に 2 辺形がなければ、上の分解 ((a) > (b) > (c)) により $D = D_1 \natural D_2$ になったとするとき

(i) Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D_i\}$ $i=1,2$ にも 2 辺形がない。

(ii) D_2 (or D_1) は solid torus $V - \mathring{N}(D_1 : S^3)$ (or $V - \mathring{N}(D_2 : S^3)$) の meridian disc である。

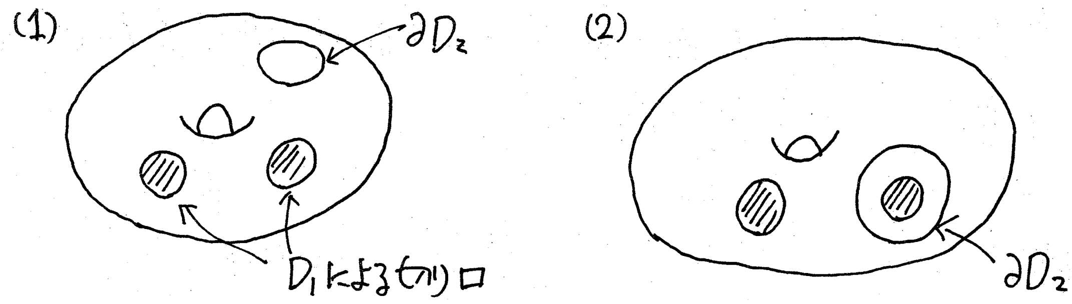
証明の方針

(i) Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D_1 \cup \partial D_2\}$ に 2 辺形のないことを示せば良いが、それは arc γ の近傍に 2 辺形がないことを示せば十分である。これを type (a), (b), (c) のそれぞれについて調べる。

(ii) まず、D_1 or D_2 のいずれかは V を separate しない。従って $V - \mathring{N}(D_1 : S^3)$ を solid torus とする。このとき D_2 はその solid torus に proper に embedding されているが、その embedding のされ方は次の 4 通り。そこで (1)〜(3) だとすると矛盾を示す。

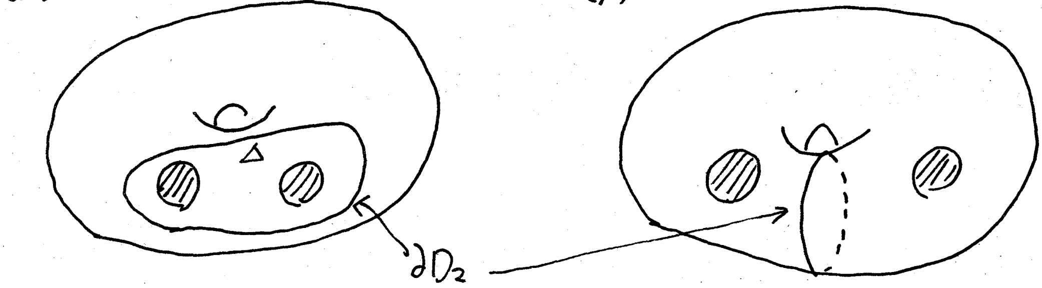
(1)

(2)



(3)

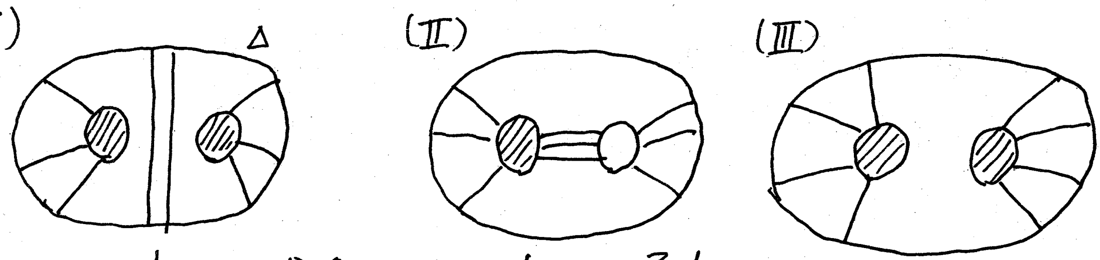
(4)



(3)が起らないことの概略

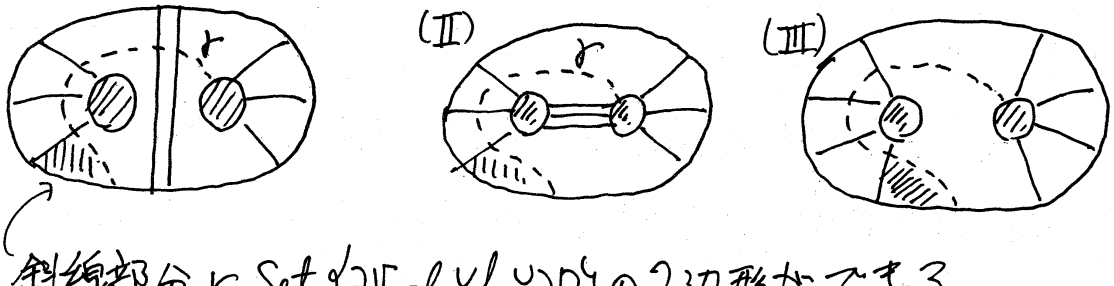
∂D_2 は $\partial(V-\mathring{N}(D:S^3))$ 上 disc Δを張るのでそれを取り出す。Δ上には l_1, l_2 にぞくす curve が走っているが，(*)により走り方の type は次の3通りである。

(I) (II) (III)



・type (a) の disc で分解したとすると矛盾

(I) (II) (III)

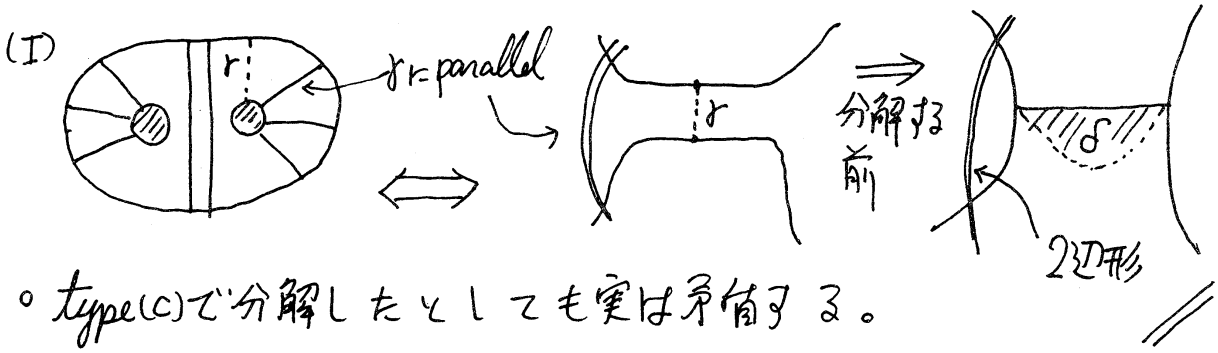


斜線部分に Set$\{\partial V-l_1\cup l_2\cup\partial D\}$ の2辺形ができる。

・type (b) の disc で分解したとすると矛盾

γ は l_1, l_2 にぞくす辺に parallel だが、それは Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ に 2辺形がないことに反す。例えば

(I)



○ type(c)で分解したとしても実は矛盾する。 //

Def. tunnel number 1 (H-genus 2) knot K に対応する最短 disc D_K とは $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$

(i) $K \cong \mathrm{Core}(V - (D_K : S^3))$

(ii) $n(D_K) = n(K) = \#\{D_K \cap S\}$

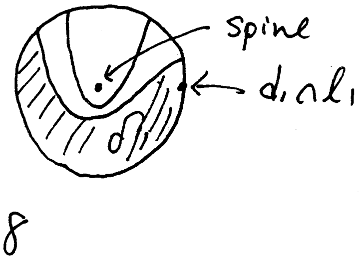
(iii) Set$\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D_K\}$ に2辺形がない。

Lemma 3　K に対応する最短 disc D_K は type (a) の disc のみで、すべてが standard meridian discs d_1, d_2, d_3 のどれかに parallel な discs の band sum にまで分解される。

証明の方針

○ pair $(V : D)$ に type (a), (b), (c) の disc が存在しなければ $D \cap (d_1 \cup d_3) = \emptyset$ としてよい。

(∵) d_1 と D が V 上の ambient isotopy で消せない交叉をしていれば disc d_1 上で $d_1 \cap D$ を観て outer most な disc δ は (a), (b), (c) のいずれかの存在を示す。



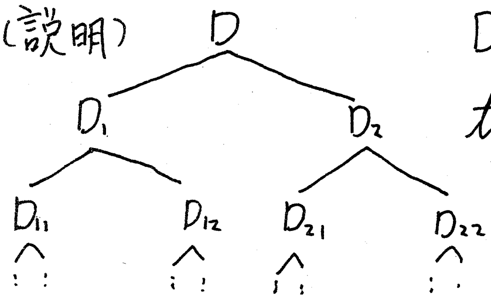
◦ $D \cap (d_1 \cup d_3) = \phi$ なら

(i) Dは d_1 と d_3 を band sum したものである。

or (ii) Dは d_1, d_2, d_3 のいずれかに parallel

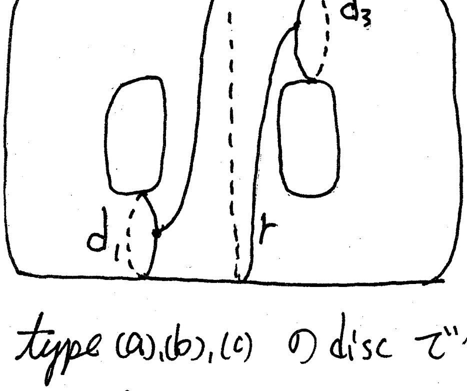
◦ Dを type (a), (b), (c) の disc で分解していき, ((a) > (b) > (c))
或る段階で type (a) の disc が存在しなくなれば以後その disc を分解した disc には type (a) の disc が存在しない。

(説明)



D_2 に type (a) の disc が存在しなければ, type (b) or (c) で分解されてできた D_{21}, D_{22} にも type (a) の disc が存在しない。

◦ D_K の分解の途中で type (a) の disc が存在せず, d_1, d_2, d_3 のいずれにも parallel でない disc $\hat{D}$ ができたとする。
$\hat{D}$ を type (b), (c) の disc で $\hat{D} = d_1 \natural d_3$ を得るまで分解する。
$\hat{D}$ に type (a) の disc がないから $\gamma \cap (l_1 \cup l_2) = \phi$



◦ D_K は type (a), (b), (c) の disc で d_1 と d_3 に parallel な discs の band sum にまで分解されその枚数は $n(K)$ 枚である。

(∵) type (a), (b), (c) の disc で分解して $D = D_1 \natural D_2$ になったとすると $\#(D \cap S) = \#(D_1 \cap S) + \#(D_2 \cap S)$ だから 枚数は $n(K) = \#(S \cap D)$ でおさえられる。

従って上の $\tilde{\tilde{D}} = d_1 \natural d_3$ の arc γ に沿って V を handle sliding すると　$n(K)$ より少ない枚数の分解を持つ disc D' が存在して，　$K \cong \mathrm{Core}(V - \mathcal{N}(D'; S^3))$。これは $n(K)$ の定義に反する。//

Lemma　(i) $D = d_1 \natural d_3$　(ii) $\gamma \cap (l_1 \cup l_2) \neq \phi$
(iii) $\mathrm{Set}\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ に２辺形がない
$\Rightarrow$　$\Gamma(D)$ は８型で(※)をみたす。

Remark　$D = D_1 \natural D_2$，$\Gamma(D)$．$\Gamma(D_1)$：8．8-6，6型とする。
Lemma 2 の方法で $\Gamma(D_1)$ から $\Gamma(D)$ を構成するとき．
$\Gamma(D_1)$ の４辺形が ⟶ ４辺形達
６辺形が ⟶ ６辺形１コと４辺形達
８辺形が ⟶ ６辺形２コと４辺形達　か
８辺形１コと４辺形達
６辺形２コが → ８辺形１コと４辺形達　に分れる。

Def．６辺形の起源
２コの６辺形が１コの８辺形からわかれてできたとき同じ起源を持つと云う。

Remark　６辺形２コから８辺形ができるとき，その２コの６辺形は同じ起源である。従って $\Gamma(D_1)$ が(※)をみたせば $\Gamma(D_1 \natural D_2)$ も(※)をみたす。

Theoremの証明

Kに対応する最短disc D_Kをtype (a)のdiscで分解する。

i.e. $D_K = D_1 \cup D_2$; $\gamma \cap (l_1 \cup l_2) \neq \phi$.

$\#(\partial D_1 \cap (l_1 \cup l_2))$と$\#(\partial D_2 \cap (l_1 \cup l_2))$の大きい方を更にtype (a)のdiscで分解する。

これを続けて$\tilde{D} = d_1 \cup d_2$, $\gamma \cap (l_1 \cup l_2) \neq \phi$まで分解すると$\Gamma(\tilde{D})$は8型で(*)をみたす。

$\tilde{D}$まで分解したのと逆の順でD_Kを再構成していくが、このとき、Lemma 2の条件はすべてみたされ、また任意の段階での6辺形は或る段階の8辺形から分れたものであるから、6辺形の起源を考えることができて、上のRemarkにより、条件(*)も各段階に遺伝していく。

従って最終的に$\Gamma(D_K)$は8, 8-6, 6型で(*)をみたしている。//

［参考文献］

[H.O.T] Homma, Ochiai and Takahasi, "An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splitting of genus 2" Osaka J. of Math 17. (1980) 625-648

[Ochi] Ochiai Mitsuyuki "Dehn's surgery along 2-bridge knots II"

[Os] R.P. Osborne "Property P for a class of Knots"