数理解析研究所講究録
第487巻 1983年 184-192

Dehn surgery on symmetric knots

神大・理　古沢 智
阪市大・理　作間 誠

S^3の中にknotが与えられると，そのknotに沿ってS^3をsurgeryすることによって，closed 3-manifoldが得られる。この時、次の定義がなされる。（[1]参照）

定義 knot Kが property P を持つとは，次が成立する時をいう。"任意の整数q ($\neq 0$)に対して，$\pi_1(M(K:\frac{1}{q})) \neq 1$"
ただし，$M(K:\frac{1}{q})$は，S^3をKに沿って係数$\frac{1}{q}$のsurgeryを行なうことによって得られる3-manifoldとする。

現在までに多くのtypeのknotsがproperty Pを持つことが証明されているが，ここではsymmetryを持つknots，特にperiodic knotsを扱う。

定義 knot Kが period n の periodic knot であるとは，次の条件を満たす homeomorphism $h: S^3 \longrightarrow S^3$ が存在する時をいう。

(i)　$h(K)=K$

(ii)　$h^n = \text{identity}$

(iii)　$\mathrm{Fix}\,h \cap K = \phi$　　($\mathrm{Fix}\,h$ は h の固定点集合)

次に periodic knots の構成を考える。$L = K \cup K'$ を S^3 内の 2-component link とする。ただし K' は trivial knot で，$\lambda = lk(K : K') \neq 0$ とする。λ に対して正の整数 n ($n \geqq 2$) を，λ と互いに素にとる。K' は trivial knot であるから，n-fold cyclic branched covering space $\Sigma_n(K')$ of S^3, branched along K' は，再び S^3 になる。K の $\Sigma_n(K') \cong S^3$ への lift を $C_n(L)$ と表わす。この時，$C_n(L)$ は period n の periodic knot となり，逆にすべての periodic knots は，この方法で得られる。

例1.

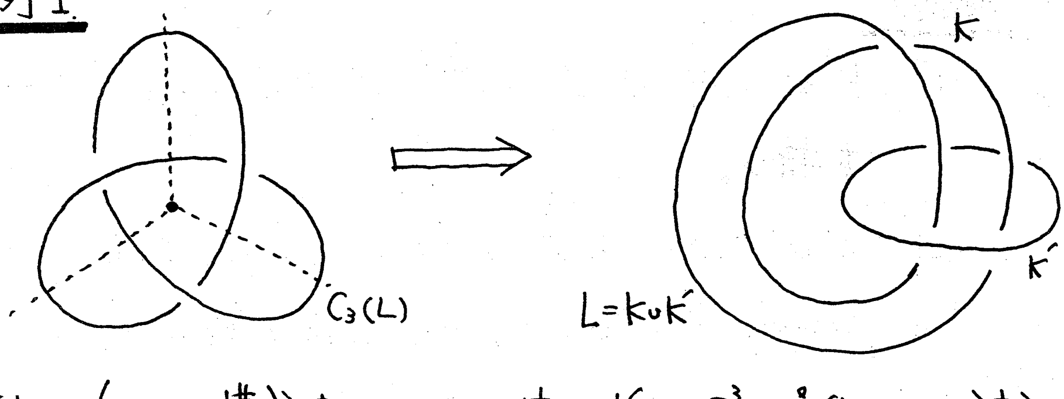

Fig.1

$M(K : \frac{1}{q})$ を構成する。この時，$K' \subset S^3 - \mathring{N}(K)$ に対応する $M(K : \frac{1}{q})$ 内の knot を $W_q(L)$ と表わす。すなわち，K' を $M(K : \frac{1}{q})$ において見た knot である。

補題1.　q を 0 でない整数とすると，$M(C_n(L) : \frac{1}{q})$ は，$M(K : \frac{1}{nq})$ の n-fold cyclic branched covering space branched along $W_{nq}(L)$ である。

《証明の概略》 $C_n(L)$ の補空間から K の補空間へは, $C_n(L)$ の構成方法から covering projection がある。$M(C_n(L):\frac{1}{q})$ において埋め込んだ solid torus には, $C_n(L)$ に associate して存在する periodic homeomorphism から induce される periodic homeomorphism が存在する。このhomeomorphism による orbit space は再び solid torus になり, この solid torus が K の補空間$=S^3-N(K)$ に埋め込まれる。以上の, 補空間の間の covering projection と, solid torus の間の covering projection を合わせればよい。□

補題1から次の補題2が得られる。

<u>補題2.</u>

(1) K が property P を持てば, $C_n(L)$ も property P を持つ。

(2) K が trivial knot とする。このとき $C_n(L)$ が property P を持つことと, 任意の整数 $q\ (\neq 0)$ に対して, $W_{nq}(L)$ が non-trivial knot であることは, 同値である。

《証明の概略》 (1): covering projection が induce する homomorphism $\pi_1(M(C_n(L):\frac{1}{q})) \longrightarrow \pi_1(M(K:\frac{1}{nq}))$ は, onto であることから成立する。(2): $M(K:\frac{1}{nq})$

は，S^3 であるから，Branched covering theorem を用いる。
([7]) □

<u>例2.</u> 例1で trefoil $C_3(L)$ を構成した。$C_3(L)$ を係数 $\frac{1}{g}$ の surgery すると，covering projection $M(C_3(L):\frac{1}{g}) \longrightarrow M(K:\frac{1}{3g})$ が存在する。このとき K' は，$W_{3g}(L)$ と書かれる。$W_{3g}(L)$ と K を入れかえ，K に沿って $(-3g)$ full twists すれば，knot $W_{3g}(L)$ は S^3 の中の torus knot になる。$g \neq 0$ であれば non-trivial knot であるから，補題2(2)により，trefoil $C_3(L)$ は，property P を持つ。

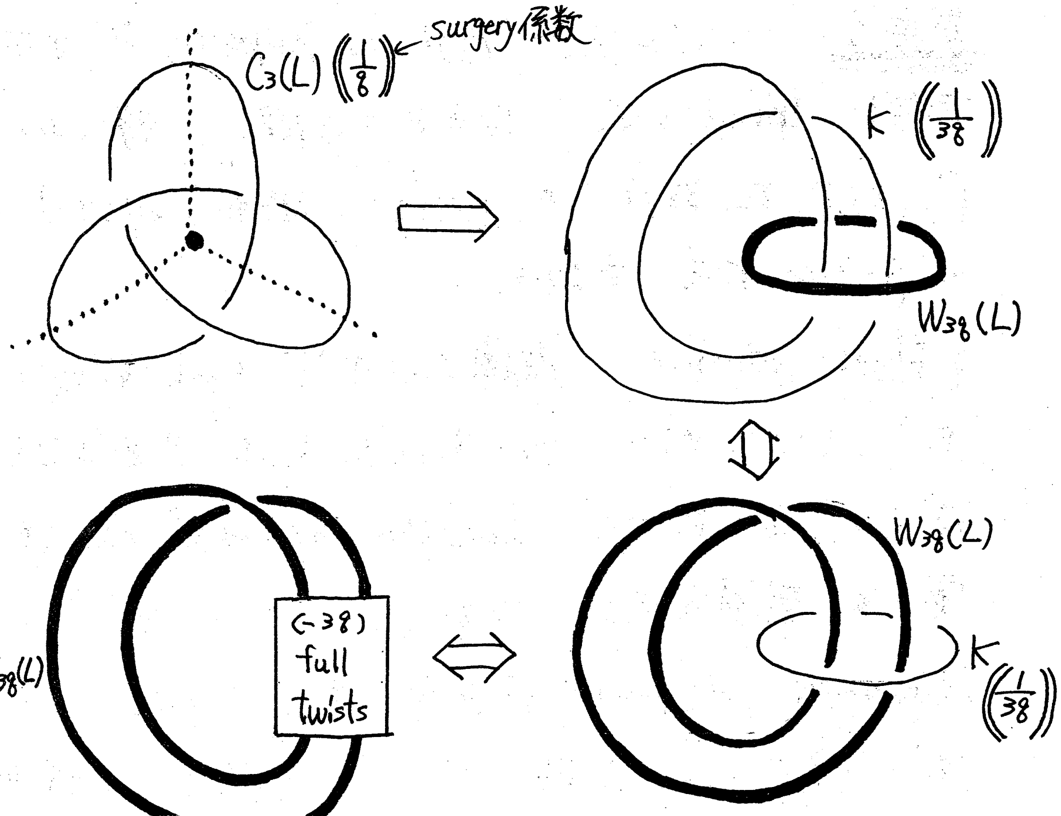

Fig 2.

次に $L = K \cup K'$ として，次の link を考える。この link を $L(r_1, r_2, r_3)$ と表わす。

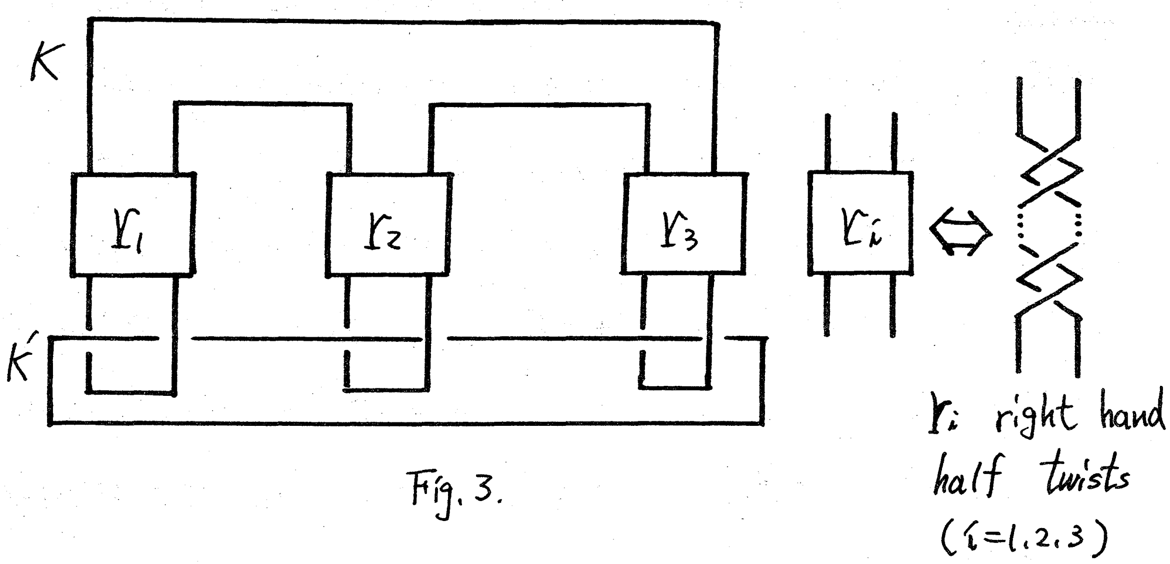

Fig. 3.

定理 1　$C_n(L(r_1, r_2, r_3))$ は property P を持つ。ただし trivial knot となるものを除く。特に $n=2$ の時 $C_2(L(r_1, r_2, r_3))$ は $(2r_1+1, 2r_2+1, 2r_3+1)$ の type の pretzel knot である。

《証明の概略》　補題 2(2) より，knot $W_{nq}(L)$ が各 $q\ (\neq 0)$ に対して non-trivial knot であることを示せばよい。そのために Alexander polynomial $\Delta_{nq}(t)$ を計算する。計算方法は，まず $L = L(r_1, r_2, r_3) = K \cup K'$ の Alexander polynomial $\Delta(x, y)$ を，K と K' に次の Fig. 4 の様な disk を貼って，Cooper[2] の方法で計算する。

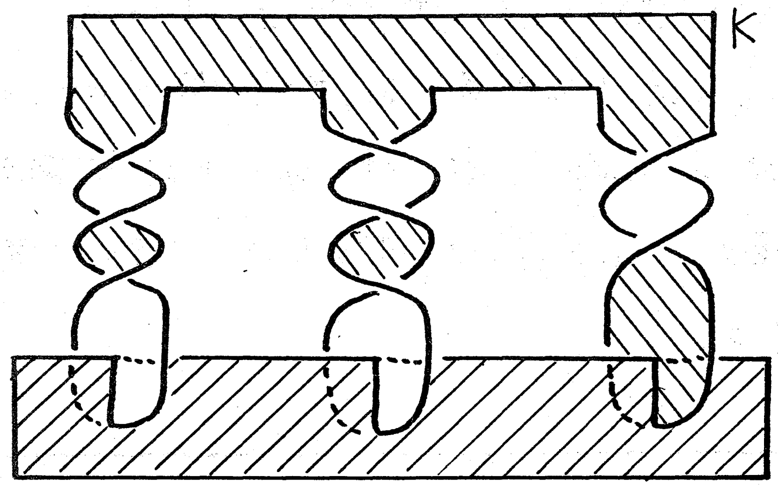

Fig. 4

次に $\Delta(x,y)$ から, $W_{n8}(L)$ の Alexander polynomial を求めるには, 次の補題3を用いる。

補題3. (Kidwell [4])
$\lambda = lk(K:K') \neq 0$ とする。$W_K(L)$ の Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ は, $L = K \cup K'$ の Alexander polynomial $\Delta(x,y)$ から, 次のようにして得られる。

$$\Delta_K(t) = \frac{(t-1)\,\Delta(t, t^{-k\lambda})}{t^{\lambda}-1}$$

上の公式を用いて $\Delta_{n8}(t)$ を求め, その degree を調べると, $\Delta_{n8}(t) \neq 0$ であることがわかる。 □

次に p と q を互いに素な整数とし, $1 \leqq q < 2p$. $g.c.d(2p, q) = 1$ を満たすものとする。2-bridge link $L(2p, q) = K \cup K'$ を考える。

定理2　$C_n(L(2p,q))$ は property P を持つ。ただし、trivial knot となるものを除く。特に $n=2$ の時 $C_2(L(2p,q))$ は 2-bridge knot of type (p,q) である。

《証明の概略》　$L(2p,q)$ は次の link の形に表わすことができる。

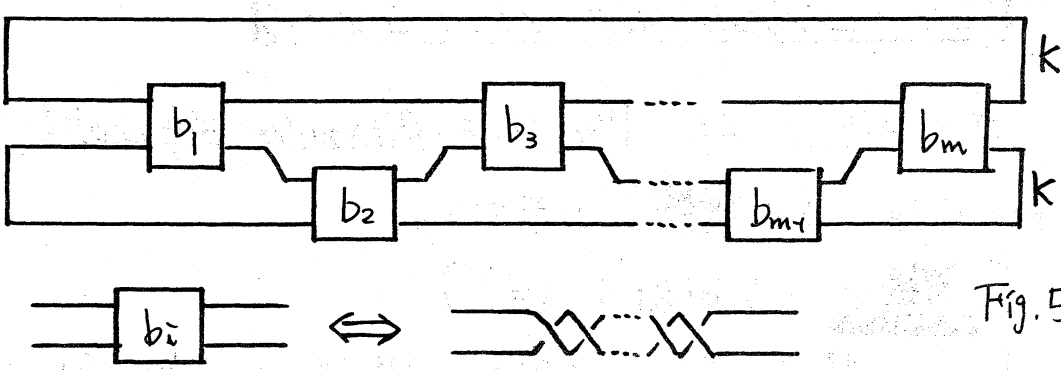

Fig.5

b_i right hand full twists

ただし各 b_i は次のようにして決まる整数である。

$$\frac{2p}{q} = 2b_1 + \cfrac{1}{-2b_2 + \cfrac{1}{2b_3 + \cdots + \cfrac{1}{-2b_{m-1} + \cfrac{1}{2b_m}}}}$$

(連分数展開)

$L(2p,q)=K\cup K'$ の Alexander polynomial $\Delta(x,y)$ を求めるために、次の Fig.6 の様な disk を K と K' に貼ることができる。これを用いて $\Delta(x,y)$ を計算し、補題3を用いて $W_{nq}(L)$ の Alexander polynomial を、各 q $(\neq 0)$ に対して求める。□

注　2-bridge knots の property P については，[8] によって証明されている。

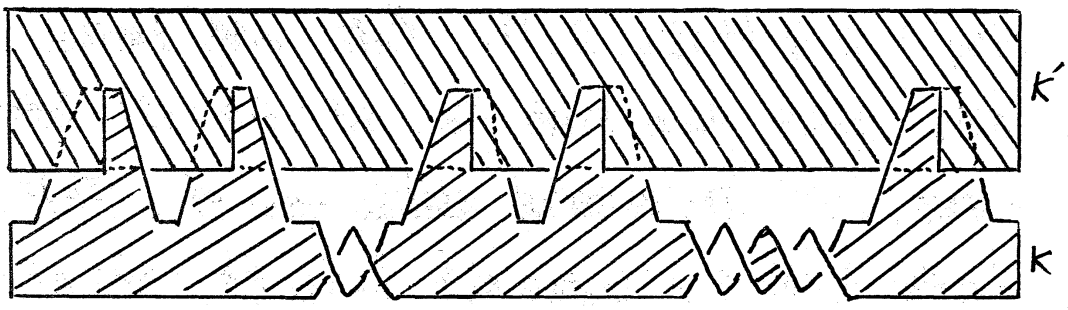

Fig. 6

最後に 9-crossings 以下の classical knots の property P について述べる。Rily [5] によって，かなり調べられたが，次の knots については証明されていなかった。

8_{10}, 8_{17}, 9_n (n = 24, 29, 32, 33, 34, 38, 39, 41, 46, 47, 49)

これらの中で 9_{41}, 9_{46}, 9_{47}, 9_{49} は periodic knots であって，今までに用いた notation を用いれば，

$9_{41} = C_2(L(-2, 1, 1))$, $9_{46} = C_3(L(18, 5))$

$9_{47} = C_3(L(16, 3))$, $9_{49} = C_3(L(14, 3))$

である。したがって，これらの knots は property P を持つ。また，9_{29}, 9_{34}, 9_{38}, 9_{39} は strongly invertible knots であり，これらは [3] によって，さらに 8_{10}, 9_{24} も [3] によって property P を持つことが証明されている。残りの 8_{17}, 9_{32}, 9_{33} は，まだ証明されていない。

References

[1] Bing, R.H., Martin, J.M.: Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Sci. 155, 217–231 (1971)

[2] Cooper, D.: The universal abelian cover of a link, London Math. Soc. Lecture Note Series 48, 51–66 (1979)

[3] Furusawa, S., Sakuma, M.: Dehn surgery on symmetric knots, preprint.

[4] Kidwell, M.E.: Relations between Alexander polynomial and summit power of a closed braid, to appear in Math. Semi. Notes, Kobe Univ.

[5] Riley, R.: Knots with the parabolic Property P, Quart. J. Math. 25. 273–283 (1974)

[6] Rolfsen, D.: Knots and links, Math. Lect. Series 7, Berkeley: Publish or Perish Inc. (1976)

[7] The proof of the Smith Conjecture, Proc. of Conference at Columbia University, New York, 1979, in preparation

[8] Takahashi, M.: Two bridge knots have Property P, Memoirs, A.M.S. 29, no. 239 (1981)