数理解析研究所講究録
第 487 巻 1983 年 193-203

Irreducibility of a class of 3-manifolds

神戸大 理　高橋 敬介

3-sphere S^3 内の knot K に沿った係数 $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の Dehn-surgery により得る orientable closed 3-manifold を $M(K:r)$ とかくことにする（[6] Ch9.）。

このとき、次の問題が考えられる。

<u>Problem 1.</u> いつ、$M(K:r)$ は irreducible となるか？

これに関する結果として、例えば、knot K が

(i) composite knot（[3]）、

(ii) $(2, \square)$-torus knot を除く 2-bridge knot（[2]）、

(iii) $(2, \square)$-torus knot を除く alternating knot（[4]）

のそれぞれの場合については任意の $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して $M(K:r)$ は irreducible であることがわかっている。

一方、irreducible にならない例として知られているのは

trivial knot に沿った係数 0 の Dehn-surgery と、(p,q)-cable knot（torus knot も含む）に沿った係数 pq の Dehn-surgery の場合だけである（[5], [1]）。

本稿の目標は $M(K:r)$ が irreducible かつ sufficiently-large となるための（十分）条件を求め、任意の non-trivial Dehn-surgery により常に irreducible かつ sufficiently-large な 3-manifold が得られる knot の class として上記 (i), (ii), (iii) 以外のものを見つけることである。 なお、本稿の内容は [7] を要約したものであり、議論はすべて PL-category で進める。

Definition. knot K の exterior X $(= S^3 - \mathring{N}(K))$ 内に次の条件(1), (2) をみたす properly embedded planar surface F が存在するとき、K は性質 $\mathcal{F}(q/p)$ をもつという。

(1) F は X で incompressible かつ ∂-incompressible である。

(2) ∂F の各成分は (p,q)-curve である。

（つまり、$p\cdot(\text{longitude}) + q\cdot(\text{meridian})$ in $H_1(\partial N(K))$）

さらに、次の(3)もみたすとき、K は性質 $\mathcal{F}_n(q/p)$ をもつという。

(3) ∂F の成分の個数は n である。

また、この F を性質 $\mathcal{F}(q/p)$ (or $\mathcal{F}_n(q/p)$) を与える surface ということにする。

次は性質 $\mathcal{F}(q/p)$ と $M(K:q/p)$ の irreducibility を関係づける基本的な補題である。証明は次の命題とも略す。

<u>Lemma.</u> knot K が性質 $\mathcal{F}(q/p)$ をもたないならば $M(K:q/p)$ は irreducible である。

<u>Proposition 1.</u> $K \subset S^3$ を knot、p, q を coprime integers とする。

(1) K が性質 $\mathcal{F}_1(q/p)$ をもつ

$\Longleftrightarrow$ K は trivial knot かつ $q=0$

($\text{このとき、} M(K:q/p) \cong S^2 \times S^1$)

(2) K が性質 $\mathcal{F}_2(q/p)$ をもつ

$\Longleftrightarrow$ 次の (2.1), (2.2) のいずれか一方が成立する.

(2.1) K は composite knot で $p=0$

(2.2) knot K' と coprime integers r, t が存在して、K は K' を companion とする (r,t)-cable knot で $q/p = rt$ かつ $|r| \geqq 2$ である。さらに K' が trivial knot のときは $|t| \geqq 2$ である。

($\text{このとき、} M(K:q/p) \cong M(K':t/r) \# L(r,t)$)

これより、性質 $\mathcal{F}_n(q/p)$ をもつ knot は $n=1,2$ のときには完全に characterize されているが、$n \geqq 3$ のときにはまだよくわ

からない。

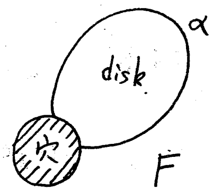
<u>Problem 2.</u> $n \geqq 3$, $p \neq 0$ のとき、性質 $\mathcal{F}_n(q/p)$ をもつ knot は存在するか？

Problems 1, 2 に関係した定理を述べる。

<u>Theorem.</u> knot Kが性質 $\mathcal{F}_n(q/p)$（ただし、$n \geqq 3$）をもち、これを与える surface を $F \subset X = S^3 - \mathring{N}(K)$ とする。
もし、X を F で切り開らいて得られる compact 3-manifold の成分の中に ∂-irreducible なものがあれば、q/p と異なる任意の $s/r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して K は性質 $\mathcal{F}(s/r)$をもたない。
従って、$M(K : s/r)$ は irreducible である。
さらに、$r \neq 0$ のとき $M(K : s/r)$ は sufficiently-large である。

outline of proof）X を F で切り開らいて得られる ∂-irr. な成分を X' とおく。仮りに、Kが性質 $\mathcal{F}(s/r)$をもつとし、それを与える surface を F'とおく。このとき、$F \cap F'$ の成分は arc 又は simple closed curve としてよく、そのうち $A = \{\text{arcs}\}$ とおく。$n \geqq 3$、$F : \partial$-incomp. を使うと、簡単な議論により、$F' - A$ の成分の中に boundary が 1つの cycle であるようなもので、

X'に含まれるものがみつかる。そのclosureをDとおくと、
Dはdiskで、X'は∂-irr. だから $\partial D \simeq 0$ in $\partial X'$.
よって、∂Dは$\partial X'$でdiskをboundする。これより、∂Dの一部でAの成分であるarc αで、Fにおいて下図のようになっているものがみつかる。これはF'が∂-incomp. であることに反する。



$\ell \neq 0$のときは、$\partial X'$が2-sided incompressible surfaceとなっており、$M(K : {}^{k}\!/\!\ell)$はsufficiently-largeである。□

<u>Definition.</u> Theoremの条件で$p=0$, $n=4$の場合をみたすknot全体のclassを$\mathfrak{K}$とかくことにする。

<u>Corollary 1.</u> $K \in \mathfrak{K}$とする。このとき、任意の$r \in \mathbb{Q}$に対してKは性質$\mathcal{F}(r)$をもたず、$M(K : r)$はirreducibleかつsufficiently-largeである。

<u>Corollary 2.</u> 任意のknot $K \in \mathfrak{K}$はProperty Rをもつ。

<u>Corollary 3.</u> 任意のknot $K \in \mathfrak{K}$はProperty Pをもつ。

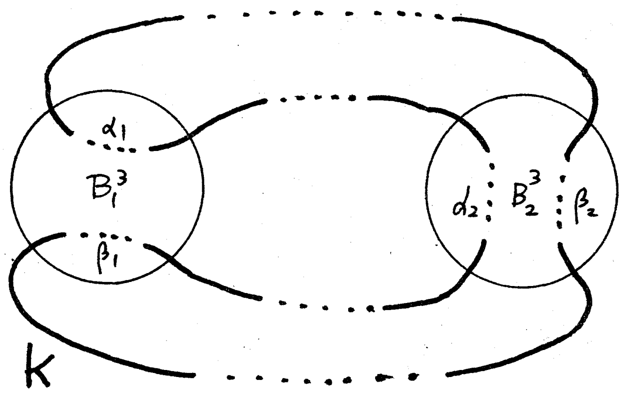
次に $\mathcal{K}$ に属する knot の構成について考える。

α_i, β_i を 3-ball B_i^3 に embed された arcs ($i=1,2$) で、次の条件をみたすものとする。

(*) $B_1^3 - N(\alpha_1 \cup \beta_1)$ の closure は ∂-irreducible である。

(**) $i_* : \pi_1(\partial B_2^3 - (\partial\alpha_2 \cup \partial\beta_2)) \longrightarrow \pi_1(B_2^3 - (\alpha_2 \cup \beta_2))$ は injective である。

このとき、B_1^3, B_2^3 を S^3 の中に互いに disjoint に embed し、下図のように $B_1^3 \cup B_2^3$ の外で、α_i, β_i ($i=1,2$) の端点を4本のarcsで任意に結んで得られる knot K は $\mathcal{K}$ に属する。

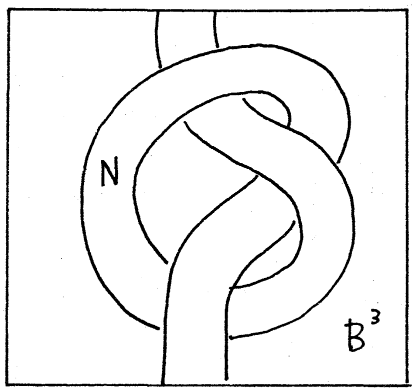


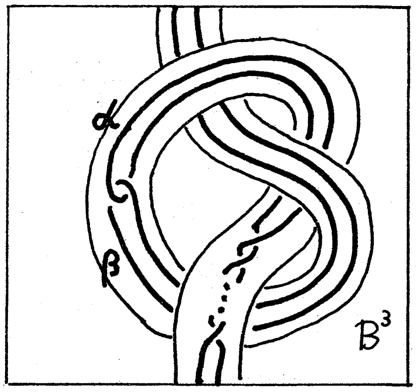
逆に、$\mathcal{K}$ に属する任意の knot は上記の方法で得られる。

以下において、3-ball と 2本の arcs との pair $(B^3, \alpha \cup \beta)$ で条件(*)または(**)をみたすものの例を与える。ただし、その証明は略す。

<u>Remark.</u> (*)をみたす $\Rightarrow$ (**)をみたす。

Example 1. 条件(＊)をみたす例。



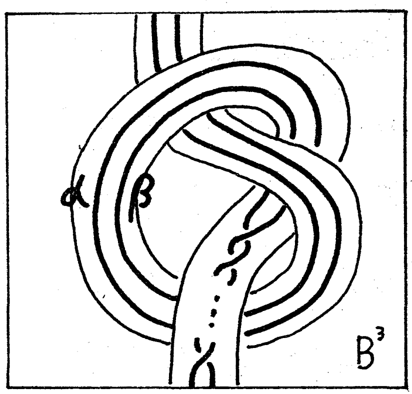


knotted arc の regular nbd. N を考える。

N の中に α, β を上図のように入れる。

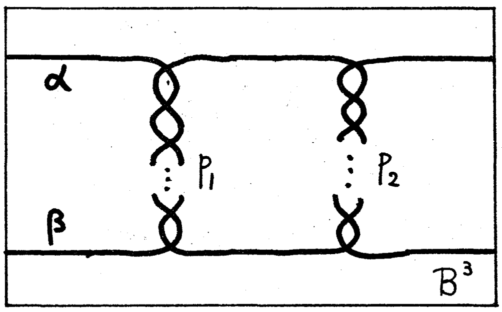
Example 2. 条件(＊＊)をみたす例。

Example 1. と同様に、knotted arc の reg. nbd. N の中に右図のように α, β を入れる。

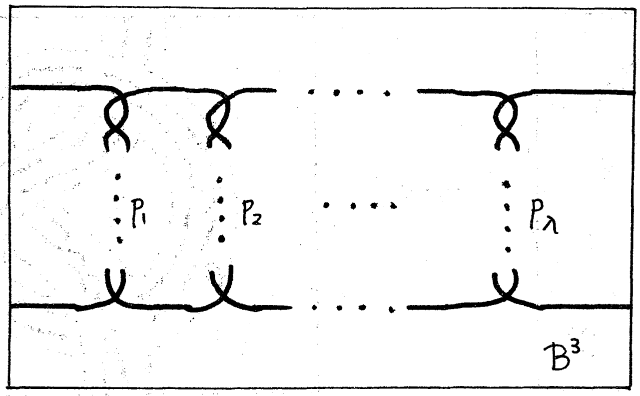


Example 3. 条件(＊)をみたす例。

$|p_1| = |p_2| \geqq 2$



Example 4. 条件(∗∗)をみたす例。



$|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_\lambda|$ のうち2以上のものが、2つ以上ある。

最後に、$\mathcal{K}$ に属する knot の例を与える。

Proposition 2. $(B^3, \alpha \cup \beta)$ が条件(∗)をみたし、K を solid torus V 内の knot で 図1 の(i)または(ii)のものとする。
また、$\tilde{K} \subset S^3$ を non-trivial knot、$h : V \xrightarrow{\cong} N(\tilde{K})$ を homeo. とする。このとき、$h(K) \in \mathcal{K}$ である。

proof) $(S^3 - h(\mathring{B}^3), h(K) \cap (S^3 - h(\mathring{B}^3)))$ は Example 2 より、条件(∗∗)をみたすから。□

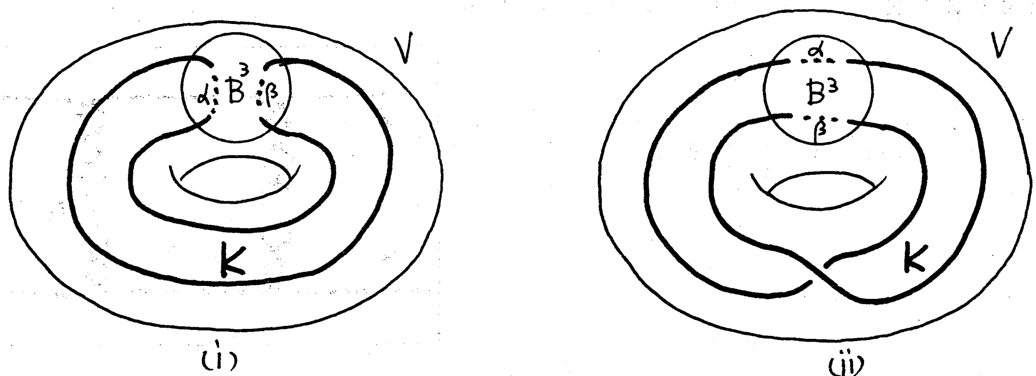
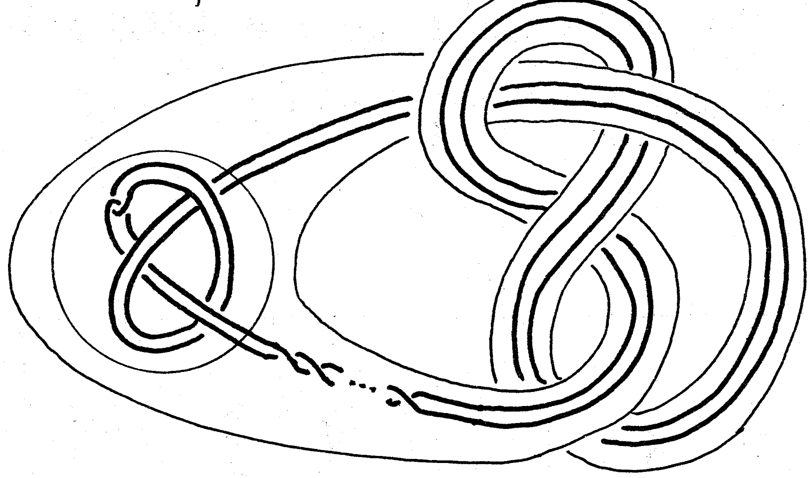


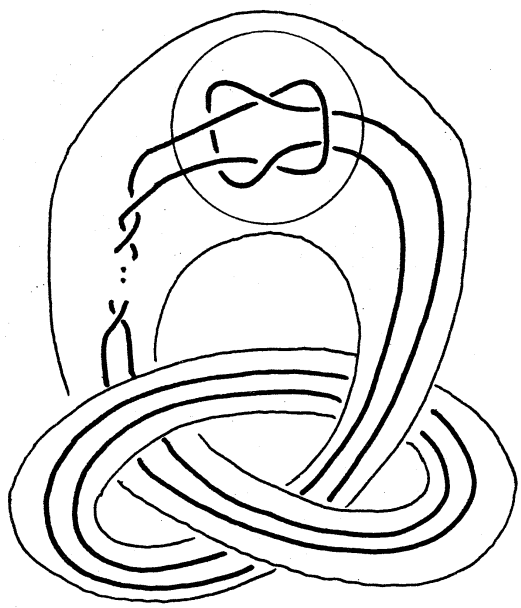
図 1.

Example 5. Kが composite knot を companion とする doubled knot のとき、 $K \in \mathfrak{K}$ である。



これは、Prop. 2. の $(B^3, \alpha \cup \beta)$ が Example 1. のものである場合になっている。

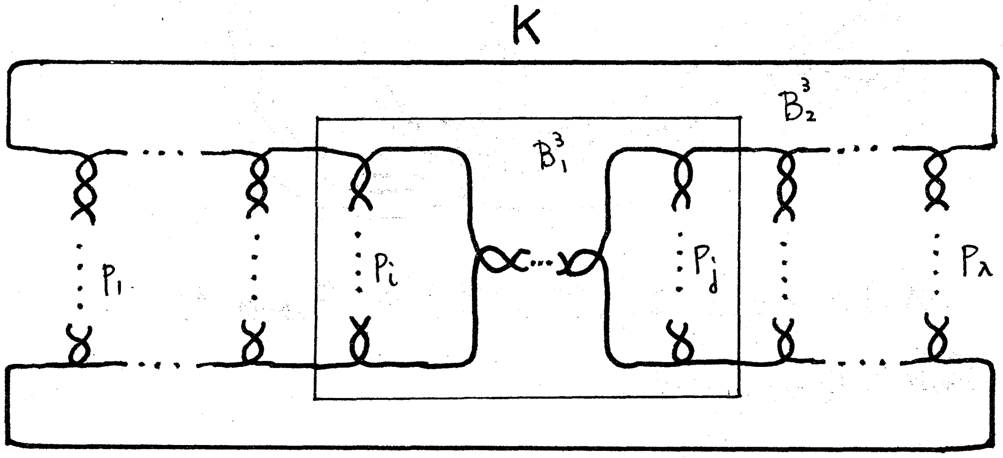
Example 6. Prop. 2. の $(B^3, \alpha \cup \beta)$ が Example 3. のものである場合、特に下図のような Whitehead's double は $\mathfrak{K}$ に属する。



<u>Example 7.</u> $p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$ が次の条件(i),(ii)をみたすとき、pretzel knot $K(p_1, p_2, \cdots, p_\lambda) \in \mathfrak{K}$ である。

(i) $|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_\lambda|$ のうち2以上のものが4個以上ある。

(ii) $|p_i| = |p_j|$ かつ $|p_k| = 1$ $(i < {}^\forall k < j)$ をみたす $i < j$ が存在する。



$(B_1^3, K \cap B_1^3)$ は Example 3 より条件(*)をみたす。

$(B_2^3, K \cap B_2^3)$ は Example 4 より条件(**)をみたす。

— References —

[1] C. McA. Gordon : Dehn surgery and sattelite knots, preprint.

[2] A. Hatcher, W. Thurston : Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements, to appear.

[3] W. Jaco, R. Myers : An algebraic determination of closed orientable 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 253 (1979), 149-170.

[4] W. Menasco : Incompressible surfaces in the complement of alternating knots and links, preprint.

[5] Moser : Elementary surgery along a torus knot, Pacific. J. Math., 38 (1971) 737-745.

[6] D. Rolfsen : Knots and Links, Math. Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, (1976)

[7] K. Takahashi : Dehn's Construction and Irreducibility of Three-Manifolds, Master Thesis, Kobe Univ. (1983).