数理解析研究所講究録
第488巻 1983年 27-42

Anosov 葉層の C^*-環の K-理論

都立大 理 髙井博司
(Hiroshi Takai)

§1、序

C^*-環のK-理論は，同型問題や指数定理と関連して，最近活発に研究されている分野であるが，その中で特にConnes [1] は次の注目すべき結果を出した： C^*-力学系 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ について，G を単連結な可解Lie群とすると，接合積 $\mathfrak{A} \times_\alpha G$ のK-理論 $K(\mathfrak{A} \times_\alpha G)$ と $\mathfrak{A}$ のK-理論 $K(\mathfrak{A})$ との間に

(I) $$K(\mathfrak{A} \times_\alpha G) \simeq K^{\dim G}(\mathfrak{A})$$

なる関係が成り立つ。更に(I)の系として，葉層 C^*-環 $C^*(M, \mathcal{F})$ についても，$\mathcal{F}$ が単連結可解Lie群の自由作用による軌道を葉とする葉層ならば，

(II) $$K(C^*(M, \mathcal{F})) \simeq K^{\dim \mathcal{F}}(M)$$

が成り立つ。

一方 Kasparov [4] は独自に開発したKK-理論を用い

て，(I) を次の様に一般化した： C^*−力学系 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ について，G を従順的連結 Lie 群であるとし，G_c はその極大コンパクト部分群とする。V を G/G_c 上の G_c での余接ベクトル空間とし，Ad_* を G_c の V 上への余随伴表現とする。そのとき V から生成される Clifford 環 C_V 上への Ad_* の自然な拡張を σ とすると，可分な C^*−環 $\mathcal{B}$ に対して，

(III) $$KK(\mathcal{B}, \mathfrak{A} \times_\alpha G) \simeq KK(\mathcal{B}, (\mathfrak{A} \otimes C_V) \times_{\alpha \otimes \sigma} G_c)$$

が成り立つ。更に Ad_* がスピノールならば，

(IV) $$KK(\mathcal{B}, \mathfrak{A} \times_\alpha G) \simeq KK^{\dim G/G_c}(\mathcal{B}, \mathfrak{A} \times_\alpha G_c)$$

が成り立つ。

これら (I)～(IV) の結果をふまえて，本報告においては次の結果を示すことにする： M を（階数 1 の）局所対称空間の単位球面バンドルとし，$\mathcal{F}$ を M の Anosov 葉層とすると，(II) が成り立つ。証明の本質的部分は (III) による。

§2、準備

M を $(C^\infty-)$ 多様体，θ を M 上の流れ（又は微分同相写像）とする。θ が <u>Anosov</u> であるとは，M の接バンドル $T(M)$ の部分バンドル E^s, E^u, E^c（又は E^s, E^u）が存在して次の条件を満たすときをいう：

(i) $T(M) = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ （又は $T(M) = E^s \oplus E^u$）

(ii) $\| d\theta_t|_{E^s} \| \leq C_1 e^{-tC_2}$ $(t\geq 0)$ （又は $\| d\theta^n|_{E^s} \| \leq C_1 C_2^n$ $(n\geq 0)$ ）

(iii) $\| d\theta_t|_{E^u} \| \leq C_1 e^{-tC_2}$ $(t\geq 0)$ （又は $\| d\theta^{-n}|_{E^u} \| \leq C_1 C_2^n$ $(n\geq 0)$ ）

(iv) $E_x^i = \mathbb{R} \left.\frac{d\theta_t(x)}{dt}\right|_{t=0}$ （$x\in M$）

ただし (ii), (iii) において C_1, C_2 は正の定数（微分同相の場合は $0<C_2<1$ ）である。又 $d\theta_t$ は θ_t の微分を意味する。

そのとき M の葉層 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ で $T\mathcal{F}^s = E^s$, $T\mathcal{F}^u = E^u$ を満たすものが存在する。ただし $T\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ の接平面場である。

$\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ を M の Horocycle 葉層という．更に，

$$W_x^{ws} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \theta_t(W_x^s) \qquad (x\in M,\ W_x^s \in \mathcal{F}^s)$$

$$W_x^{wu} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \theta_t(W_x^u) \qquad (x\in M,\ W_x^u \in \mathcal{F}^u)$$

とおくと，W_x^{ws}, W_x^{wu} は M の部分多様体となり，$\mathcal{F}^{ws} = \{W_x^{ws}\}_{x\in M}$, $\mathcal{F}^{wu} = \{W_x^{wu}\}_{x\in M}$ も M の葉層となる。これらを M の Anosov 葉層という。M 上の流れ θ から導入される Anosov（又は Horocycle）葉層は，Tomter［7］により次の様なタイプに分けられる：

(i) 局所対称空間の単位球面バンドル M の測地線流 θ により導入。

(ii) 可解多様体 M の極大ベキ零部分多様体の Anosov 微分同相写像の M への誘導流 θ により導入．

(iii) 簡約可能 Lie 群のベキ零 Lie 群上への作用による半直積 Lie 群の格子群による剰余多様体 M の自然な流れ θ に

より導入。

本稿では(1)の場合のみを考える。即ち，Gを実階数1の連結半単純Lie群（中心有限）とし，その岩沢分解$G=KAN$に対してRiemann対称空間G/Kを考える。Gの一様格子群Γをとり，二重剰余空間$\Gamma\backslash G/K$を考えると，階数1の局所対称空間になる。Mを$\Gamma\backslash G/K$の単位球面バンドル$T_1(\Gamma\backslash G/K)$とし，$\Gamma\backslash G/K$の測地線$\Gamma gK \to \Gamma g(\exp tX)K$ ($g\in G,\ t\in\mathbb{R}$)の定めるM上の流れθはAnosovになる。ただし，$A=\exp\mathbb{R}X$とする。θによるMのHorocycle及びAnosov葉層をそれぞれ$\mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A$と書くと次の命題が成り立つ：

<u>命題1.</u>　$(M,\mathcal{F}_H)$, $(M,\mathcal{F}_A)$は$\Gamma\backslash G/K$上の葉層化バンドルになり，ファイバーはそれぞれ$G/C_K(A)N$, G/Pである。ただし，$C_K(A)$はAのKにおける中心化群であり，Pは極小放物型部分群である。

G/Kは単連結であるから$\Gamma\backslash G/K$の基本群はΓに同型になる。よって夏目－高井［5］より次の命題が成り立つ：

<u>命題2.</u>　$C^*(M,\mathcal{F}_H)$, $C^*(M,\mathcal{F}_A)$はそれぞれ$(C_0(G/C_K(A)N)\times_\lambda\Gamma)_r$, $(C(G/P)\times_\lambda\Gamma)_r$に安定同型になる。ただし$(\cdot)_r$は縮約接合積を意味する。又$\lambda$は左移動作用を表わす。

更に$C_K(A)N$, Pは従順的であるので次の系を得る：

<u>系3.</u>　$C^*(M,\mathcal{F}_H)$, $C^*(M,\mathcal{F}_A)$はそれぞれ$C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A)N$,

$C(\Gamma\backslash G)\times_\rho P$ に安定同型である。ただし，ρ は右移動作用を表わす。

§3. K-理論

先ず Kasparov の同変 KK-理論のなかで，この節に必要な所を簡単に述べることにする。

$(\mathcal{A}, G, \alpha)$, $(\mathcal{B}, G, \beta)$ を C^*-力学系とし，Hilbert $\mathcal{B}$-加群 $\mathcal{E}$ と，その上の有界 $\mathcal{B}$-作用素の全体 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 及びコンパクト $\mathcal{B}$-作用素全体 $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ を考える。今 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ への準同型写像 φ と，（次数1の）G-連続作用素 $F\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ で次の条件を満たすものを考える：

(3.1) $\quad [\varphi(a), F],\ (F-F^*)\varphi(a),\ (F^2-1)\varphi(a),\ (\tilde{\beta}_g(F)-F)\varphi(a)\ \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$

$(g\in G,\ a\in\mathcal{A})$。ただし，$\tilde{\beta}$ は β の $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ への自然な持ち上げである。今 (3.1) を満たす $(\mathcal{E}, \varphi, F)$ 全体を $\mathcal{E}_G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ で表わし，特に (3.1) が全て 0 作用素であるもの全体を $\mathcal{D}_G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ で表わす。そこで $\mathcal{E}_G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の要素 $(\mathcal{E}_0, \varphi_0, F_0)$, $(\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1)$ に対して，関係 $(\mathcal{E}_0, \varphi_0, F_0)\sim(\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1)$ を次の様に導入する：

(i) $\mathcal{E}_0$ から $\mathcal{E}_1$ への G-同変等距離同型 u（次数0の）で

$$\varphi_1(a) = u\,\varphi_0(a)\,u^{-1} \qquad (a\in\mathcal{A})$$

を満たすものが存在する。（ユニタリー同値性）

(ii) $\mathcal{E}_G(\mathcal{A}, \mathcal{B}\otimes C[0,1])$ の要素 $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\varphi}, \tilde{F})$ で

$$\tilde{\mathcal{E}}_t = \tilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{B}\otimes C[0,1]} (\mathcal{B}\otimes C[t]),\quad \tilde{\varphi}_t = \tau_t^* \circ \tilde{\varphi},\quad \tilde{F}_t = \tau_t^*(\tilde{F})$$

$(0 \le t \le 1)$ なるものが存在して

$$(\tilde{\mathcal{E}}_0, \tilde{\varphi}_0, \tilde{F}_0) = (\mathcal{E}_0, \varphi_0, F_0),\ (\tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{F}_1) = (\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1)$$

を満たす。（ホモトピー同値性） ただし，τ_t^* は

$$\tau_t^*(\tilde{F})(\xi \otimes b_t) = \tilde{F}(\xi) \otimes b_t \quad (\xi \in \tilde{\mathcal{E}},\ b_t \in \mathcal{B}\otimes C[t])$$

なる $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}})$ から $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}}_t)$ への制限準同型である。

$\mathcal{E}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の同値関係〜による商空間を $\tilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と書き，$\mathcal{D}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の $\tilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ での像全体を $\tilde{\mathcal{D}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と書く。今 $[\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1], [\mathcal{E}_2, \varphi_2, F_2] \in \tilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に対して，

$$[\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1] + [\mathcal{E}_2, \varphi_2, F_2] = [\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2,\ \varphi_1 \oplus \varphi_2,\ F_1 \oplus F_2]$$

とおくと，$\tilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は可換半群になり，$\tilde{\mathcal{D}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ による剰余半群 $\tilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})/\tilde{\mathcal{D}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は可換群になる。これを Kasparov の K-群（又は KK-群）といい，$KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と表わす。

注意 1.　$KK_G(\mathcal{A},\mathbb{C}) = Ext_G(\mathcal{A})$，$KK_G(\mathbb{C},\mathcal{B}) = K_G(\mathcal{B})$ である。

注意 2.　$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ は C^*-環であり，それぞれ（α, β, δ なる）G の作用があるとき，$KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ から $KK_G(\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes\mathcal{D})$ への準同型写像 $\sigma_{\mathcal{D}}$ で

(3.2)　$$\sigma_{\mathcal{D}}([\mathcal{E}, \varphi, F]) = [\mathcal{E}\otimes\mathcal{D},\ \varphi\otimes id,\ F\otimes 1]$$

$([\mathcal{E}, \varphi, F] \in \tilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ なるものが存在する。

注意 3.　$\mathcal{A}_2$ から $\mathcal{A}_1$ への準同型写像 π に対して，$KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B})$

から $KK_G(\mathcal{A}_2,\mathcal{B})$ への準同型写像 π^* で

$$\pi^*([\mathcal{E},\varphi,F]) = [\mathcal{E},\varphi\circ\pi,F] \qquad ([\mathcal{E},\varphi,F]\in\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B}))$$

を満たすものが存在する。同様に $\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ への準同型写像 η に対して，$KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}_1)$ から $KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}_2)$ への準同型写像 η_* で

$$\eta_*([\mathcal{E},\varphi,F]) = [\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2,\ \eta'\circ\varphi,\ \eta'(F)]$$

$([\mathcal{E},\varphi,F]\in\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ を満たすものが存在する。ただし，η' は $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2)$ への G-準同型写像で

$$\eta'(T)(\xi\otimes b_2) = T(\xi)\otimes b_2 \qquad (T\in\mathcal{L}(\mathcal{E}),\ \xi\in\mathcal{E},\ b_2\in\mathcal{B}_2)$$

を満たす。

次に KK-理論で，基本的でかつ最も重要な性質に次にあげる結果がある：

<u>命題 4.</u>（積交叉性） $(\mathcal{A}_i,G,\alpha_i),(\mathcal{B}_i,G,\beta_i)\ (i=1,2)\ (\mathcal{D},G,\delta)$ を C^*-力学系としたとき，$KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{D})\times KK_G(\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_2)$ から $KK_G(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2,\ \mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2)$ への写像 $\otimes_{\mathcal{D}}$ で次の条件を満たすものが存在する：C^*-力学系 $(\mathcal{A}_j,G,\alpha_j),(\mathcal{B}_j,G,\beta_j)_{(j=1,2,3)},(\mathcal{D}_j,G,\delta_j)_{(j=1,2)}$ に対し，(i) $(x_1\otimes_{\mathcal{D}_1}x_2)\otimes_{\mathcal{D}_2}x_3 = x_1\otimes_{\mathcal{D}_1}(x_2\otimes_{\mathcal{D}_2}x_3)$

$(x_1\in KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{D}_1),\ x_2\in KK_G(\mathcal{D}_1\otimes\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_2\otimes\mathcal{D}_2),\ x_3\in KK_G(\mathcal{D}_2\otimes\mathcal{A}_3,\mathcal{B}_3))$

が成り立つ。注意2の $\sigma_{\mathcal{D}}$ について

(ii) $$\sigma_{\mathcal{D}_2}(x_1)\otimes_{\mathcal{D}_1\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}_2}\sigma_{\mathcal{D}_1}(x_2) = x_1\otimes_{\mathcal{D}}x_2$$

$(x_1\in KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{D}_1\otimes\mathcal{D}),\ x_2\in KK_G(\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}_2\otimes\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_2))$

及び

$$\text{(iii)} \quad \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_1 \otimes_{\mathcal{D}} x_2) = \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_1) \otimes_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}_1} \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_2)$$

$(x_1 \in KK_G(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D}),\ x_2 \in KK_G(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2))$

が成り立つ。ただし，$\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{D}_j, \mathcal{D}$ $(i=1,2,3,\ j=1,2)$ は可分な C^*-環とする。

実際，$x_1 = [\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1] \in KK_G(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D})$，$x_2 = [\mathcal{E}_2, \varphi_2, F_2] \in KK_G(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$ に対して，次の様に $x_1 \otimes_{\mathcal{D}} x_2$ を定義する：

(a) $\quad \mathcal{E}_{12} = (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes_{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2} (\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$

(b) $\quad \varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2$ は $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ への準同型写像であり，$\varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2 = \Phi_2 \circ (\varphi_1 \otimes id)$ となる $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1) \otimes \mathcal{A}_2$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ への自然な準同型写像 Φ_2 がとれる。

(c) $\quad \mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ の元 M_j $(j=1,2)$ で，$M_j \geq 0$ $M_1 + M_2 = 1$，かつ

$$[M_j, \Phi_2(F_1 \otimes 1)], [M_j, 1 \otimes F_2], [M_j, \varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2(a_1 \otimes a_2)], \gamma_g(M_j) - M_j, M_j a_j \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_{12})$$

$(a_j \in \mathcal{A}_j\ (j=1,2),\ g \in G)$ を満たすものに対して，

$$F_1 \#_{\mathcal{D}} F_2 = M_1^{1/2} \Phi_2(F_1 \otimes 1) + M_2^{1/2}(1 \otimes F_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$$

とおくと，$x_1 \otimes_{\mathcal{D}} x_2 = [\mathcal{E}_{12}, \varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2, F_1 \#_{\mathcal{D}} F_2] \in KK_G(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ は M_j の取り方に依らない。この写像 $\otimes_{\mathcal{D}}$ について (i)～(iii) が成り立つ。ただし，γ_g は $g \in G$ の $\mathcal{E}_{12}$ 上への作用の $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ への持ち上げを意味する。

この積に関して，次の重要な結果がある。

<u>命題 5.</u> $\mathcal{A}, \mathcal{D}_j$ $(j=1,2)$ を可分な C^*-代数，$\mathcal{B}$ を C^*-代数とする。

もし $\alpha \otimes_{\mathcal{D}_2} \beta = 1_{\mathcal{D}_1}$ を満たす $\alpha \in KK_G(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, $\beta \in KK_G(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)$ が存在すれば, $\gamma = \beta \otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$ は環 $KK_G(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_2)$ のベキ等元になり, $KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_1)$ から $KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2)$ への準同型写像 $\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$ は1対1写像である。更に $\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$ の像 $Im(\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha)$ は

$$Im\,\gamma = \{ x \in KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2) \mid x \otimes_{\mathcal{D}_2} \gamma = x \}$$

に一致する。同様に, $\otimes_{\mathcal{D}_2} \beta$ は $KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2)$ から $KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_1)$ への上への準同型写像であり, その核 $Ker(\otimes_{\mathcal{D}_2} \beta)$ は

$$Ker\,\gamma = \{ x \in KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2) \mid x \otimes_{\mathcal{D}_2} \gamma = 0 \}$$

に一致する。そして

$$KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2) = Im\,\gamma \oplus Ker\,\gamma$$

が成り立つ。もし $\gamma = 1_{\mathcal{D}_2}$ ならば, $\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$, $\otimes_{\mathcal{D}_2} \beta$ は同型写像になる。

上記命題5の仮定を満たす $(\mathcal{D}_j, G, \delta_j)$ $(j=1,2)$ 及び α, β は次の様にして作られる： 今 G を従順的連結 Lie 群, G_c をその極大コンパクト部分群とする。 $\xi = T^*(G/G_c)$ を G/G_c 上の余接バンドルとし, $C_\xi(G/G_c)$ を ξ に随伴して決まる Clifford バンドルの断面で, 無限遠点で 0 になるもの全体の成す C^*環とする。即ち, V を G/G_c 上の G_c での余接ベクトル空間とし, C_V を V から生成される Clifford 環とすると, $C_\xi(G/G_c)$ は G から C_V への連続関数 f で次の条件を満たすもの全体である：

$$(1) \qquad f(gh) = \sigma_h^{-1} f(g) \qquad (g \in G,\ h \in G_c)$$

(III) $\qquad \| \mathfrak{f}(g) \| \to 0 \quad (gG_c \to \infty)$,

ただし σ は G_c の V への余随伴表現 Ad_* の C_V 上への自然な拡張である。今 G/G_c 上の L^2- 調和形式全体 $L^2(\Lambda^*(G/G_c))$ の成す Hilbert 空間を考える。(以下 $\mathcal{H}$ と書く) $C_\xi(G/G_c)$ から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への準同型写像 φ を $\varphi(\omega) = d_\omega + d^*_{\omega^*}$ $(\omega \in \Omega^1(G/G_c))$ を満たすように定義する。ただし, d_ω は ω による外積作用素を表わし, $d^*_{\omega^*}$ は ω の共役 1- 形式 ω^* の外積作用素 d_{ω^*} の共役作用素を意味する。 δ を G/G_c 上の滑らかな,台がコンパクトである形式上の外微分とし, $\Delta = \delta\delta^* + \delta^*\delta$ をラプラシアンとする。そのとき $\frac{\delta+\delta^*}{(1+\Delta)^{1/2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が成り立ち G の $\mathcal{H}$ 上への作用による $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上への自然な持ち上げに関して G- 連続となる。

$$\alpha = [\, \mathcal{H}, \varphi, \frac{\delta+\delta^*}{(1+\Delta)^{1/2}} \,]$$

とおくと, $\alpha \in KK_G(\,C_\xi(G/G_c), \mathbb{C}\,)$ となる。また $\rho(x)$ を G_c から $x \in G/G_c$ への測地距離とし, $\theta = \frac{\rho\,\delta\rho}{(1+\rho^2)^{1/2}} \in \Omega^1(G/G_c)$ とおき, $\mathcal{E} = C_\xi(G/G_c)$, $L_\theta f = \theta f$ $(f \in \mathcal{E})$ とすると,

$$\beta = [\, \mathcal{E}, id, L_\theta \,]$$

は $KK_G(\mathbb{C}, C_\xi(G/G_c))$ となり, $\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \beta = 1_{C_\xi(G/G_c)}$ が成り立つ。更に, G が従順的より, $\gamma = \beta \otimes_{C_\xi(G/G_c)} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ となる。実際, もし $\dim G = 1$ ならば, $G = \mathbb{R}$ 又は T^1 . γ は $\mathbb{Z}$ 又は $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ のベキ等元より, $\gamma = 1$. $\dim G \leq n$ について $\gamma = 1$ が成り立つと仮定する。もし $\dim G = n+1$ ならば, G は従順的より,

半単純ならばコンパクトであるから，$\gamma=\beta\otimes_{C_\xi(M)}\alpha=1$ となるように選べる。半単純でないならば，T^p 又は $\mathbb{R}^q$ に同型である G の正規部分群 N が存在する。$N=T^p$ ならば，$N\subset G_c$ より，$\dim G/N\leq n$ 表対して帰納法より $\alpha_{G/N}\in KK_{G/N}(C_\xi(G/G_c),\mathbb{C})$ と $\beta_{G/N}\in KK_{G/N}(\mathbb{C},C_\xi(G/G_c))$ で $\alpha_{G/N}\otimes_{\mathbb{C}}\beta_{G/N}=1_{C_\xi(G/G_c)}$，$\gamma_{G/N}=1_{\mathbb{C}}$ となるものが存在する。$KK_{G/N}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ から $KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ への自然な準同型写像により結論が成り立つ。$N=\mathbb{R}^q$ ならば，$\alpha_{G_cN}\in KK_{G_cN}(C_\xi(G_cN/G_c),\mathbb{C})$，$\beta_{G_cN}\in KK_{G_cN}(\mathbb{C},C_\xi(G_cN/G_c))$ で $\gamma_{G_cN}=1$ なるものをとり，$\alpha'_{G_cN}=i_{G_cN,G}\circ\sigma_{C_W}(\alpha_{G_cN})\in KK_G(C_\xi(G/G_c),C_\xi(G/G_cN))$，$\beta'_{G_cN}=i_{G_cN,G}\circ\sigma_{C_W}(\beta_{G_cN})\in KK_G(C_\xi(G/G_cN),C_\xi(G/G_c))$ を考える。ただし，$W=T^*_{G_cN}(G/G_cN)$ であり，$i_{G_cN,G}$ は $KK_{G_cN}(C_\xi(G_cN/G_c)\otimes C_W,C_W)$ [又は $KK_{G_cN}(C_W,C_W\otimes C_\xi(G_cN/G_c))$] から $KK_G(C_\xi(G/G_c),C_\xi(G/G_cN))$ [又は $KK_G(C_\xi(G/G_cN),C_\xi(G/G_c))$] への自然な準同型写像である。これらから，$\alpha=\alpha'_{G_cN}\otimes_{C_\xi(G/G_cN)}\tau_{G/N,G}(\alpha_{G/N})$ $\beta=\tau_{G/N,G}(\beta_{G/N})\otimes_{C_\xi(G/G_cN)}\beta'_{G_cN}$ とおくと，$\alpha\otimes_{\mathbb{C}}\beta=1_{C_\xi(G/G_c)}$，$\gamma=\beta\otimes_{C_\xi(G/G_c)}\alpha=1_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。ただし，$\tau_{G/N,G}$ は $KK_{G/N}(C_\xi(G/G_cN),\mathbb{C})$ [又は $KK_{G/N}(\mathbb{C},C_\xi(G/G_cN))$] から $KK_G(C_\xi(G/G_cN),\mathbb{C})$ [又は $KK_G(\mathbb{C},C_\xi(G/G_cN))$] への自然な準同型写像である。

命題 6. G を従順的連結 Lie 群とし，G_c をその極大コンパクト部分群とする。ξ を G/G_c 上の余接バンドルとすると，$\alpha\in KK_G(C_\xi(G/G_c),\mathbb{C})$，$\beta\in KK_G(\mathbb{C},C_\xi(G/G_c))$ で，$\alpha\otimes_{\mathbb{C}}\beta=1_{C_\xi(G/G_c)}$，

$\beta \otimes_{C_\xi(G/G_c)} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ を満たすものが存在する。

注意4. 一般に，従順的連結局所コンパクト群についても命題は成り立つ。

上記命題6により，本節の主結果である次の命題を示すことが出来る：

命題7. $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ を C^*-力学系とし，$\mathfrak{A}$ を可分な C^*-環，G を従順的連結 Lie 群とすると，$\tilde{\alpha} \in KK((\mathfrak{A}\otimes C_V)\times_{\alpha\otimes\sigma} G_c,\ \mathfrak{A}\times_\alpha G)$, $\tilde{\beta} \in KK(\mathfrak{A}\times_\alpha G, (\mathfrak{A}\otimes C_V)\times_{\alpha\otimes\sigma} G_c)$ で，$\tilde{\alpha}\otimes_{\mathfrak{A}\times_\alpha G}\tilde{\beta} = 1_{(\mathfrak{A}\otimes C_V)\times_{\alpha\otimes\sigma}G}$, $\tilde{\beta}\otimes_{\mathfrak{A}\otimes C_V\times G_c}\tilde{\alpha} = 1_{\mathfrak{A}\times_\alpha G}$ を満たすものが存在する．ただし，$V = T^*_{G_c}(G/G_c)$。

実際，$KK_G(\mathfrak{A},\mathcal{B})$ から $KK(\mathfrak{A}\times_\alpha G, \mathcal{B}\times_\beta G)$ への自然な準同型写像を考えて，$\mathfrak{A},\mathcal{B}$ を $C_\xi(G/G_c)$, $\mathbb{C}$ に対して適用すると，命題6より結論を得る。

系8. 可分な C^*-環 $\mathcal{B}$ に対して，$KK(\mathcal{B},\mathfrak{A}\times_\alpha G)$ は $KK(\mathcal{B}, (\mathfrak{A}\otimes C_V)\times_{\alpha\otimes\sigma}G_c)$ に同型である。

§4. Thom 同型

本節では §2 で扱った葉層 C^*-環の K-理論を §3, 系8 を用いて取扱うことにする。

M を局所対称空間の単位球面バンドルとすると，連結半単純 Lie 群 G の岩沢分解 $G=KAN$ と，G の一様格子部分群 Γ について，$M = T_1(\Gamma\backslash G/K)$ と書ける。M の Horocycle 及び Anosov 葉層

を $\mathfrak{F}_H$, $\mathfrak{F}_A$ とする。ただし，これらは $\dim A = 1$ の仮定のもとで作られる。系3より，$C^*(M,\mathfrak{F}_H)$, $C^*(M,\mathfrak{F}_A)$ はそれぞれ $C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A)N$，$C(\Gamma\backslash G)\times_\rho P$ に安定同型である。よって，K-理論 $K(C^*(M,\mathfrak{F}_H))$, $K(C^*(M,\mathfrak{F}_A))$ は K-理論 $K(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A)N)$, $K(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho P)$ にそれぞれ同型である。

G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ に同型でなければ $C_K(A)$ は K の連結閉部分群になる。そのとき，$C_K(A)N$, P は従順的連結 Lie 群になる。これらの極大コンパクト部分群は $C_K(A)$ であるから，系8より $K(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A)N)$, $K(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho P)$ は $K((C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} C_V)\times_{\rho\otimes\sigma} C_K(A))$, $V = \mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*+\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$ にそれぞれ同型である。ただし，$\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$ は N, A の Lie 環 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ の実双対空間を意味する。もし $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ ならば，C_V は単純になり $M_{2^n}(\mathbb{R})$ に同型である。$C(\Gamma\backslash G) \cong C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$，$M_{2^n}(\mathbb{C}) \simeq M_{2^n}(\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ より $C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}) \simeq C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{C})$ となる。よって，その双対空間 $(C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}))^\wedge$ は $\Gamma\backslash G$ に同一視出来る。今 $\rho\otimes\sigma$ の $\Gamma\backslash G$ への作用 $\hat{\rho}$ を考えると，$\Gamma\cap C_K(A)=\{e\}$ より，自由作用になる。よって $\hat{\rho}$ の $\xi\in\Gamma\backslash G$ での安定群 $C_K(A)_\xi$ は自明になる。$C_K(A)$ はコンパクトであるから，$\rho\otimes\sigma$ は（Fell の意味で）滑らかであるので，竹崎［6］により $(C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}))\times_{\rho\otimes\sigma} C_K(A)$ の双対空間は $\left(\bigcup_{\xi\in\Gamma\backslash G}(C_K(A)_\xi,\omega_\xi)^\wedge\right)/C_K(A)$ に同一視出来る。ただし，$(C_K(A)_\xi,\omega_\xi)^\wedge$ は $C_K(A)_\xi$ の既約な ω_ξ-射影表現の同値類

の全体である。$C_K(A)_\xi = \{e\}$ $(\xi \in \Gamma\backslash G)$ より，$(C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}))\times_{\rho\otimes\sigma} C_K(A)$ の双対空間は $\Gamma\backslash G/C_K(A)$ に同一視出来る。

このことより $(C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}))\times_{\rho\otimes\sigma} C_K(A)$ は $\Gamma\backslash G/C_K(A)$ 上の連続場の C^*-環 $CF(\Gamma\backslash G/C_K(A), \{\mathcal{C}(\mathcal{H}_\xi)\}_\xi)$ に同型である。特に $\mathcal{H}_\xi$ は $L^2(C_K(A))$ に同型にとれる。(実際，Green［3］の手法を使うと，$\mathcal{H}_\xi = L^2(\xi)\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2^n}$ $(\xi \in \Gamma\backslash G/C_K(A))$ と出来るが，$C_K(A)\approx\xi$ であり，$C_K(A)$ は連結コンパクト群であるから，$\dim \mathcal{H}_\xi = \aleph_0$ となる。) $\Gamma\backslash G$ は主 $C_K(A)$-バンドル（$\Gamma\backslash G/C_K(A)$ 上の）となるから，Dixmier-Douady［2］より $\xi \in \Gamma\backslash G/C_K(A) \longmapsto \mathcal{H}_\xi$ は自明な Hilbert 空間の連続場である。よって Dixmier-Douady［2］より，$CF(\Gamma\backslash G/C_K(A), \{\mathcal{C}(\mathcal{H}_\xi)\}_\xi)$ は $C(\Gamma\backslash G/C_K(A))\otimes\mathcal{C}(L^2(C_K(A))\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{2^n})$ に同型になる。だから $K(C^*(M,\mathcal{F}_H))$（又は $K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$）は，$V = \mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$（又は $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^* + \mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$）が偶数次元の実ベクトル空間ならば，$K(\Gamma\backslash G/C_K(A))$ に同型である。即ち，$K(M)$ は $K(C^*(M,\mathcal{F}_H))$（又は $K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$）に同型である。$K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$ は $K^{\dim A}(C^*(M,\mathcal{F}_H))$ に同型であるから，$\dim \mathcal{F}_A = \dim AN$，$\dim \mathcal{F}_H = \dim N$ を使うと，もし $C_K(A)$ が連結（$G \not\simeq SL(2,\mathbb{R})$）ならば，$K(C^*(M,\mathcal{F}))$ は $K^{\dim \mathcal{F}}(M)$ $(\mathcal{F} = \mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A)$ に同型である。もし $G \simeq SL(2,\mathbb{R})$ ならば，$G = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})/\Delta$ と書ける。ただし，$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆群であり，Δ は G の基本群で $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の中心の部分群であ

る。$G=KAN$ を G の岩沢分解とすると，$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})=\widetilde{K}AN$ なる $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の岩沢分解をとると，$K=\widetilde{K}/\Delta$ となる。$SL(2,\mathbb{R})=SO(2,\mathbb{R})\cdot\mathbb{R}\cdot\mathbb{R}$ という形より，$\widetilde{K}$ は $SO(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆群となる。$SO(2,\mathbb{R})$ の基本群は $\mathbb{Z}$ であるから，$\Delta=\pi_1(G)=\pi_1(K)$ は $\mathbb{Z}$ の部分群になる。$C_{SO(2,\mathbb{R})}(\mathbb{R})=\mathbb{Z}_2$ となり $SL(2,\mathbb{R})$ の中心である。同様にして $C_K(A)$ は G の中心の部分群となる。よって $C(\Gamma\backslash G)\times_\rho P$，$C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A)N$ は $(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A))\times_{\tilde{\rho}}AN$，$(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A))\times_{\tilde{\rho}}N$ にそれぞれ同型である。ただし，$\tilde{\rho}=\rho\otimes id$ である。Connes の Thom 同型定理 (I) より，$K(C^*(M,\mathcal{F}_H))$, $K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$ はそれぞれ $K^{\dim N}(M)$, $K^{\dim AN}(M)$ に同型となる。よって次の結果を得る：

<u>定理 9.</u>　$\mathcal{F}_H$, $\mathcal{F}_A$ を局所対称空間の単位球面バンドル M の Horocycle, Anosov 葉層とすると，

$$K(C^*(M,\mathcal{F}))\simeq K^{\dim\mathcal{F}}(M)\qquad(\mathcal{F}=\mathcal{F}_H,\mathcal{F}_A)$$

が成り立つ。

<u>注意 5.</u>　$K(M)=K(T_1(\Gamma\backslash G/K))$ は Thom-Gysin 完全系列により計算される。

文献

[1]　A. Connes, An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of $\mathbb{R}$, Advances.

Math., 39 (1981), 31—55.

[2] J. Dixmier — A. Douady, Champs continus d'espaces Hilbertiens et de C*-algèbres, Bull. Soc. Math. France., 91 (1963), 227 - 284.

[3] P. Green, C*-algebras of transformation groups with smooth orbit space, Pacific J. Math., 72 (1977), 71—97.

[4] G. G. Kasparov, K-theory, group C*-algebras and higher signatures, Preprint (1981).

[5] T. Natsume - H. Takai, Connes algebras associated to foliated bundles, Preprint, Univ. Roma (1982).

[6] M. Takesaki, Covariant representations of C*-algebras and their locally compact automorphism groups, Acta. Math., 119 (1967), 273—303.

[7] P. Tomter, On the classification of Anosov flows, Topology., 14 (1975), 179—189.