数理解析研究所講究録
第 488 巻 1983 年 43-58

Shift力学系に対応するC*環の間のstable同型

東北大教養　武元英夫　(Hideo Takemoto)

無理数αに対して，1次元トーラス$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$上角度$2\pi\alpha$の回転$U_\alpha$は$\mathbb{T}$上の変換群として整数全体からなる群$\mathbb{Z}$が作用している．これに対応する変換群C*環$A_\alpha$が，いわゆる，無理数回転C*環と呼ばれるものである．このとき，A_αは次のようなC*環と考えられる。

すなわち，$L^2(\mathbb{T})$を$\mathbb{T}$上の2乗可積分関数全体からなるヒルベルト空間とすると，$L^2(\mathbb{T})$上の2つのユニタリ作用素U_α, Sから生成されるC*環がA_αである．いま．$e_n(z)=e^{2\pi in\cdot}$とすると$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$は$L^2(\mathbb{T})$でのc.n.o.sであり，ユニタリ作用素Sを$Se_n=e_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z})$で定義する。さらに$\mathbb{T}$上の角度$2\pi\alpha$の回転から導入される$L^2(\mathbb{T})$上のユニタリ作用素を前と同じ記号でU_αとする．このとき，$A_\alpha=C^*(U_\alpha, S)$となっている．ここで，$C^*(U_\alpha, S)$は$U_\alpha, S$から生成されるC*環を意味している。

特に，$U_\alpha e_n = e^{2\pi i n\alpha} e_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ となっている．このことより，一般のヒルベルト空間Hのc.n.o.s $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して，$Se_n = e_{n+1}$，$U_\alpha e_n = e^{2\pi i n\alpha} e_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ となる2個のユニタリ作用素S，U_αに対して，A_α と $C^*(U_\alpha, S)$ はC^*同型である．

上のことより，今後は，ヒルベルト空間Hはc.n.o.s $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$をもつものとしていく。H上のユニタリ作用素S：$Se_n = e_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z})$ をshift作用素といい，常用されていく。さらに，$e^{2\pi i x}\in\mathbb{T}$ に対して，ユニタリ作用素U_xを$U_x e_n = e^{2\pi i n x} e_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ で定義する．$\mathbb{T}$において離散位相を考えているとき，$\mathbb{T}_d$と書くことにする．$\mathbb{T}_d$での部分群Gが与えられると，これはshift力学系 $\Sigma_G = (\hat{G}, \sigma, \varphi)$ に対応している（くわしくは[3]を参照）．そこで，Sと$\{U_x ; e^{2\pi i x}\in G\}$から生成される$B(H)$の$C^*$部分環を$C^*(\Sigma_G)$と書いていくことにする。すると，$C^*(\Sigma_G)$はクロス積$C(\mathbb{T})\times G$と同型である。特に，$G$が有限生成であり，$\mathbb{Q}$上1次独立な無理数$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$（ここでの1次独立は$\{1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$が$\mathbb{Q}$上1次独立になっていることとする）に対して $G = \{e^{2\pi i k l} ; k\in\mathbb{Z}, l = 1, 2, \cdots, n\}$ のとき $C^*(\Sigma_G)$ は $C(\mathbb{T})\times\mathbb{Z}^n$ と同型である．

今G_1, G_2を$\mathbb{T}_d$の部分群とするとき，$C^*(\Sigma_{G_1})$と$C^*(\Sigma_{G_2})$が*-同型になるのは$G_1 = G_2$であることは，段階をえることによ

って，Rieffel [6]，Pimsner-Voiculescu [4]，Riedel [5]，河村-武元 [3] によって示された。そこで，本論では，$C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型になるのはどういう場合か，ということを中心にして進める。結果の証明は，頁数の制限もあるので本稿ではすべて省略することにし，追って発表される論文でくわしく書く予定ですので，興味のある方々には申し訳ありませんが，そちらを見て下さい。本稿は，河村氏との共同の仕事からなっていることを付け加えておきます。

1. 前段階までの話.

今後，群 G はすべて $\mathbb{T}_d$ の部分群とする。G が有限群ならば，ある自然数 n が存在し，$C^*(\Sigma_G)$ は $C^*(S)\otimes B(H_n)$ と同型である。ここで，H_n は n 次元ヒルベルト空間である。G が無限群のときは，$C^*(\Sigma_G)$ は単純 C^* 環でかつ唯一つのトレース Tr をもつ。この Tr を $\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\Sigma_G)\otimes B(H_n)$ に拡張することによって C^* 環 $C^*(\Sigma_G)$ の K_0-群 $K_0(C^*(\Sigma_G))$ から $\mathbb{R}$ への準同型写像が得られる。そこで，この準同型写像の値域を $R_{Tr}(C^*(\Sigma_G))$ とおくと，次の定理が得られる。

定理 1 (河村-武元 [3]，Riedel [5]，Rieffel [6]).

(1)　G を $\mathbb{T}_d$ の無限部分群とし，Tr を $C^*(\Sigma_G)$ のトレースとす

る。そのとき，$R_{Tr}(C^*(\Sigma_G)) = \{x \in \mathbb{R} ; e^{2\pi i x} \in G\}$ である．

(2) G_1, G_2 を２つの $\mathbb{T}_d$ での無限部分群とする．このとき，(1) の結果から，$C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が $*$-同型である必要十分条件は $G_1 = G_2$ である．

定理１(2) から，G が無限群でない場合をも含めて，

$$\mathbb{R}_G = \{x \in \mathbb{R} ; e^{2\pi i x} \in G\}$$

とおく．すると，$\mathbb{R}_G$ は $\mathbb{R}$ の部分群であり，$\mathbb{R}_G \supset \mathbb{Z}$ である．議論上の便利のために次の概念を記しておく．

$\{\alpha_\iota\}_{\iota \in I}$; 次のような性質をもつ無理数の集合とする。

$\{\alpha_\iota\}_{\iota \in I}$ のどんな有限集合 $\{\alpha_{\iota_k}\}_{k=1}^{\ell}$ に対して，$\{1, \alpha_{\iota_1}, \cdots \cdots, \alpha_{\iota_\ell}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上１次独立である．

$\{p_j\}_{j=1}^{N}$; $1 \leqq N \leqq +\infty$，自然数の可付番集合．

$G(\{1/p_j\}_{j=1}^{N} ; \{\alpha_\iota\}_{\iota \in I})$; $\{e^{2\pi i/p_j}, e^{2\pi i \alpha_\iota} ; 1 \leqq j \leqq N, \iota \in I\}$ から生成される $\mathbb{T}_d$ の部分群．

特に，$N=1$，$p_1 = p$ のとき，$G(1/p ; \{\alpha_\iota\}_{\iota \in I})$ とかく．

これから，$C^*(1 ; \{\alpha\})$ は無理数回転 C^* 環 A_α である．かつ，$\mathbb{R}_{G(1;\{\alpha\})} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ である。

定理1によって，shift力学系に対応するC^*環$C^*(\Sigma_G)$の間の同型に対する問題は解決されたことになった．そこで，stable同型について考えていこう．

定義2．無限可分なヒルベルト空間K上のコンパクト作用素全体のC^*環を$C(K)$とする．2つのC^*環$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$がstable同型であるとは，テンソル積$\mathcal{A}\otimes C(K)$と$\mathcal{B}\otimes C(K)$が$*$-同型であることである．

2つの無理数回転C^*環$C^*(\Sigma_{G(1;\{\alpha\})})$，$C^*(\Sigma_{G(1;\{\beta\})})$に対して$\mathbb{R}_{G(1;\{\alpha\})}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$と$\mathbb{R}_{G(1;\{\beta\})}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\beta$は常に群同型である．これから，群$\mathbb{R}_G$の間の群同型によって$C^*$環$C^*(\Sigma_G)$を分類することは不可能である．そこで，Rieffelは$\mathbb{R}$での通常の順序で，$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$を順序群とみることによって，無理数回転$C^*$環の間のstable同型について議論をしている[6]．それには次のようなMorita equivalenceの考えを用いている．すなわち，2つのC^*環A，Bが単位元をもっているとすると，AとBがstable同型であることとAとBがMorita equivalentであることが同値である．そして，AとBがstable同型であるならば，A-B-equivalence bimodule Xが存在する．今，Aがtraceてをもっているとすれば，線形汎関数τ_X；$\tau_X(\langle x,y\rangle_B)=$

$= \tau(\langle y, x\rangle_A)$ for $x, y \in A$ はB上のトレースとなり，$\tilde{\tau}_x(K_0(B))$ $= \tilde{\tau}(K_0(A))$ となっている．ここで，$\tilde{\tau}$，$\tilde{\tau}_x$ はて，τ_x から導入される $K_0(A)$，$K_0(B)$ から $\mathbb{R}$ への準同型写像を表わす．今，AとBがそれぞれ一意なるトレースて，て′をもつとすると，正数 r が存在し，$\tau_x = r\tau'$ となっている．従って，$\tilde{\tau}(K_0(A))$ $= r\tilde{\tau}'(K_0(B))$ となり，$\tilde{\tau}(K_0(A))$ と $\tilde{\tau}'(K_0(B))$ は順序群同型となっている．そこで，次の定義を与える．

<u>定義3</u>．R_1，R_2 を $\mathbb{R}$ の部分群とする．R_1 から R_2 上への群同型写像 φ が順序群同型写像であるとは R_1 におけるすべての正数 r に対して $\varphi(r) > 0$ になることである．このような φ が存在するとき，R_1 と R_2 は順序群同型であるという．

定義3での性質を考えることによってRieffel は次の結果を得ている．これには，Green [2]，Shen [7] の結果が多いに用いられている．

<u>補題4</u>（Rieffel [6]）．単位元をもつ2つの C^*環A，Bが一意なトレースて，て′をそれぞれもつとする．そのとき，AとBが stable 同型であるならば，$\tilde{\tau}(K_0(A))$ と $\tilde{\tau}'(K_0(B))$ は順序群同型である．特に，$A = C^*(\Sigma_{G(1;\{\alpha\})})$，$B = C^*(\Sigma_{G(1;\{\beta\})})$ のときは

$C^*(\Sigma_{G(1;\{\alpha\})})$ と $C^*(\Sigma_{G(1;\{\beta\})})$ が stable 同型であることと $\mathbb{R}_{G(1;\{\alpha\})} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ と $\mathbb{R}_{G(1;\{\beta\})} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\beta$ が順序群同型であることは同値である.

上の結果から我々は次の予想をもつ.

<u>予想.</u> G_1 と G_2 を $\mathbb{T}_d$ での部分群とする. このとき, $C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型であることと $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ は順序群同型であろう.

本稿では上の予想に対する肯定的な解答を幾つかの場合について与えるが, まだ完全な解決には到達できていないのが残念なことである.

<u>2. 主要結果.</u>

G_1 と G_2 を $\mathbb{T}_d$ の部分群とする. 今, $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ が順序群同型かあるいは $C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型であるとき, G_1 または G_2 の一方が有限群ならば他方も有限群であることは明らかである. 今, G を有限群とすると, $C^*(\Sigma_G)$ は $C^*(S) \otimes B(l_n)$ に $*$-同型である. これから, 次の命題が得られる.

<u>命題5</u>. G_1, G_2 を $\mathbb{T}_d$ の部分群とし, G_1, G_2 の一方が有限群であるとする. そのとき, $C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型である必要十分条件は $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ が順序群同型になることである.

命題5から, 今後, 扱う群 G は無限群としていく. すると $C^*(\Sigma_G)$ は一意なトレースを持ち, $\mathbb{R}_G$ はそのトレースから導入される $K_0(C^*(\Sigma_G))$ から $\mathbb{R}$ への準同型写像の値域となっている. 補題4によって, 2つの群 G_1, G_2 に対して, $C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型ならば $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ は順序群同型となっている. 従って, 予想の解決には $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ が順序群同型のとき $C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型になっているかを調べればよい.

最初に $\mathbb{T}_d$ でのねじれ群 G を扱う. すると, $\mathbb{Z} < \mathbb{R}_G < \mathbb{Q}$ となっている. そこで今, R_1 を $\mathbb{Z} < R_1 < \mathbb{Q}$ なる $\mathbb{R}$ の部分とし, さらに $\mathbb{R}$ の部分群 R_2 を与える. さらに, R_1 と R_2 が群同型であると, 群同型写像 φ を与えておく. もし, $\mathbb{Z} < R_2$ ならば $\varphi(x) = x\varphi(1)$ for $x \in R_1$ かつ $1/\varphi(x) \in R_1 < \mathbb{Q}$ である. 逆に $1/\varphi(1) \in R_1 < \mathbb{Q}$ ならば $R_2 = \varphi(R_1) = R_1\varphi(1) \supset \mathbb{Z}$ である. これから, $\mathbb{Z} < R_2$ である必要十分条件は $1/\varphi(1) \in R_1$ になることである.

前述のことから, $\mathbb{Z}$ を含む $\mathbb{R}$ の部分群の間の同型を議論に

するとき，2つの群R_1とR_2のうち一方が$\mathbb{Q}$に含まれるとき，他方も$\mathbb{Q}$に含まれている．そこで，次の補題が得られる．

<u>補題6</u>．R_1，R_2を$\mathbb{Z} \subset R_i \subset \mathbb{Q}$ $(i=1.2)$ なる$\mathbb{R}$の部分群とする．そのとき，R_1とR_2が順序群同型である必要十分条件は次の性質を満す正なる有理数q_0/p_0が存在することである．すなわち．$p_0/q_0 \in R_1$，$q_0/p_0 \in R_2$，$R_1(q_0/p_0) = R_2$．

補題6から次の補題を得る．これは後で有意義な性質をもつ（ねじれのない群の場合においても有意義な役割をはたす）．

<u>補題7</u>．G_1, G_2をT_αの部分群とする。もし，次の性質を満す自然数p_0, q_0：$(p_0, q_0)=1$，$\mathbb{R}_{G_1} q_0 = \mathbb{R}_{G_2} p_0$，$1/q_0 \in \mathbb{R}_{G_1}$，$1/p_0 \in \mathbb{R}_{G_2}$が存在するとき，$C^*$環$C^*(\Sigma_{G_1})$と$C^*(\Sigma_{G_2})$はstable同型である．

以上より，無限生成群でねじれ群の場合には予想が肯定的に解決されることになる．

<u>定理8</u>．G_1とG_2をT_αでの無限生成なねじれ群であるとする．そのとき，2つのC^*環$C^*(\Sigma_{G_1})$と$C^*(\Sigma_{G_2})$がstable同型

である必要十分条件は$\mathbb{R}_{G_1}$と$\mathbb{R}_{G_2}$が 順序群同型になることである.

命題5と定理8によって, ねじれ群に対応しているC^*環$C^*(\Sigma_G)$ の分類が完全に決定されたことになる. 次は, ねじれ群でない群に対応しているC^*環$C^*(\Sigma_G)$ について考えよう. これについては, ねじれのない部分が有限生成の場合については肯定的な解答を与えるが, そうでない場合については, いまだに解決されないで残されている. まず, 有限生成な無限群を扱っていこう. 1つはねじれのない群であり, 1つはねじれのない群でない群に対応しているC^*環を調べていこう. そこで, Gをねじれのない群で有限生成だとすると, Gは$G(1;\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\})$ の形の群であり, そうでない場合は$G(1/p;\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\})$の形の群である.

まず, $G=G(1/p;\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\})$ とし, G' を$\{e^{2\pi ip\alpha_j};j=1,2,\cdots\cdots,k\}$から生成される群とする. すなわち, $G'=G(1;\{p\alpha_1,p\alpha_2,\cdots,p\alpha_k\})$ である. そのとき, G'はねじれのない群であり, $\mathbb{R}_G p=\mathbb{R}_{G'}$となっている. $\mathbb{R}_G p=\mathbb{R}_{G'}$という事から, 補題7によって$\mathbb{R}_G$と$\mathbb{R}_{G'}$は順序群同型でありかつ$C^*(\Sigma_G)$と$C^*(\Sigma_{G'})$はstable 同型となっている. 従って, 定義3の前に述べた注意と上の事実から, 群G_1, G_2は共に, 有限生成なねじれ

のない群の場合について考えればよい．この時，R_{G_1} と R_{G_2} が順序群同型であるとすると，G_1，G_2は同じ個数の無理数に対応している．すなわち，$G_1 = G(1;\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\})$，$G_2 = G(1;\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\})$ となっている．今，$\{1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$，$\{1, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立であるから，$C^*(\Sigma_1)$，$C^*(\Sigma_{G_2})$ はそれぞれ $C(\mathbb{T}) \times_{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}} \mathbb{Z}^k$，$C(\mathbb{T}) \times_{\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}} \mathbb{Z}^k$ に*-同型である．ここで，接合積のactionは，それぞれ，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$，$\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$ による$\mathbb{T}$上の回転によって導入されるものを考えている．するとGreenの定理[;定理]とそれの証明から $C^*(\Sigma_{G_1}) \otimes C(L^2(\mathbb{T}^k))$ と $C^*(\Sigma_{G_2}) \otimes C(L^2(\mathbb{T}^k))$ はそれぞれ，$C(\mathbb{T}^{k+1}) \times_{\{1, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}} \mathbb{R}^k$ と $C(\mathbb{T}^{k+1}) \times_{\{1, \beta_1, \cdots, \beta_k\}} \mathbb{R}^k$ に*同型である．ここで，上の接合積での$\mathbb{R}^k$の$C(\mathbb{T}^{k+1})$上のactionは次のような多重流れによる変換である．このとき1次元トーラス$\mathbb{T}$を0と1を同一視して考えた場合の区間$[0,1)$と同一視することと，$\mathbb{T}^{k+1}$の各座標は1をモジールとして考えていく．その時，上での$\mathbb{R}^k$の$C(\mathbb{T}^{k+1})$上のactionは次の多重流れによっての変換である：

$$(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k \ ; \ \mathbb{T}^{k+1} \ni (x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$$

$$\longrightarrow (x_1 + t_1, \cdots, x_k + t_k, x_{k+1} + t_1\alpha_1 + \cdots + t_k\alpha_k)$$

従って，$C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型である必要十分条件は $C(\mathbb{T}^{k+1})\times_{\{1,\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}}\mathbb{R}^k$ と $C(\mathbb{T}^{k+1})\times_{\{1,\beta_1,\cdots,\beta_k\}}\mathbb{R}^k$ が $*$-同型になることである．そこで，$C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型であることと $\{1,\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$，$\{1,\beta_1,\cdots,\beta_k\}$ による $\mathbb{T}^{k+1}$ 上の軌跡が $\mathbb{T}^{k+1}$ 上の同型写像によって同型になっていることである．そこで．$k=1$ の場合での Shen の定理の一般化を与えておこう．

<u>補題 9</u>．$\mathbb{R}_{G_1}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha_1+\cdots+\mathbb{Z}\alpha_k$ と $\mathbb{R}_{G_2}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\beta_1+\cdots+\mathbb{Z}\beta_k$ が順序群同型であるとすれば．次の性質$(*)$を満す行列 $(a_{ij})\in GL(k+1,\mathbb{Z})$ が存在する；各 $l=1,2,\cdots,k$ に対して，

$$(*)\qquad \alpha_l=\Big(\sum_{j=1}^{k}\beta_j a_{jl}+a_{k+1\,l}\Big)\Big/\Big(\sum_{j=1}^{k}\beta_j a_{j\,k+1}+a_{k+1\,k+1}\Big)$$

次に，補題 9 での性質$(*)$を満す行列 $(a_{ij})=A\in GL(k+1,\mathbb{Z})$ が与えられたとすると，その時．$\mathbb{T}^{k+1}$ の共役群が $\mathbb{Z}^{k+1}$ である事実を経由することによって，A は $\mathbb{T}^{k+1}$ 上の同型写像となっている．さらに，この同型写像によって，$\{1,\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ による $\mathbb{T}^{k+1}$ 上の軌跡が $\{1,\beta_1,\cdots,\beta_k\}$ による $\mathbb{T}^{k+1}$ 上の軌跡に移ることがわかる．以上から，次の定理を得る．

<u>定理10</u>．G_1, G_2 を T_α での有限生成な無限群とする．そのとき，$C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ が stable 同型である必要十分条件は $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ が順序群同型になることである．

以上から，次のまとめができる．定理8によって(命題5と共に考えると)ねじれ群に対しては予想は肯定的に解決されたことになった．ねじれのない群に対しては有限生成群に対しては肯定的な解答を与えることができたが，一般の，無限生成群まで含めると，ねじれのない群に対するものに対しては完全な解決にまで達していない．しかし，補題7を考えると，ねじれ群でない2つの群に対しても，補題7の性質を満すならば(この時，$\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ は順序群同型となっている) $C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ は stable 同型になっている．このとき順序群同型写像は $\mathbb{Z}$ での1を有理数 q_0/p_0 に移している場合である．しかし，T_α での2つの部分群 G_1, G_2 に対して，$\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ が順序群同型であったとしても1は有理数に移っているとは限らない．例えば，

<u>例</u>．α を無理数として，$G_1 = \bigcup G(1; \{\frac{\alpha}{2^n}\})$，$G_2 = \bigcup G(\frac{1}{2^n}; \{\frac{1}{\alpha}\})$ とすると，$\mathbb{R}_{G_1} = \bigcup \{\mathbb{Z}\frac{\alpha}{2^n} + \mathbb{Z}\}$，$\mathbb{R}_{G_2} = \bigcup \{\mathbb{Z}\frac{1}{2^n} + \mathbb{Z}\frac{1}{\alpha}\}$ である．今，$\mathbb{R}_{G_1}$ から $\mathbb{R}_{G_2}$ 上への写像 φ を $\mathbb{R}_{G_1} \ni x \longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in \mathbb{R}_{G_2}$ によって定義すると，φ によって $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ は順序群同型にな

っている．G_1はねじれのない群であるが，G_2はねじれの部分がある群である．

上の例から次のような群を考えてみる．$\{p_n\}$を$p_n \mid p_{n+1}$を満たす自然数列とする．今，$G_1 = \bigcup G(1\,;\{\frac{\alpha}{p_n}\})$，$G_2 = \bigcup G(\frac{1}{p_n};\{\frac{1}{\alpha}\})$とおくと，$\mathbb{R}_{G_1}$と$\mathbb{R}_{G_2}$は順序群同型となっている．$C^*(\Sigma_{G_1})$と$C^*(\Sigma_{G_2})$をみると，$p_n \mid p_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ということから，

$$C^*(\Sigma_{G_1}) = \varinjlim C^*(\Sigma_{G(1;\{\frac{\alpha}{p_n}\})})$$

$$C^*(\Sigma_{G_2}) = \varinjlim C^*(\Sigma_{G(\frac{1}{p_n};\{\frac{1}{\alpha}\})})$$

である．ここで，上で考える帰納的極限は包含関係によって導入されるものである．補題7によって$C^*(\Sigma_{G(\frac{1}{p_n};\{\frac{1}{\alpha}\})})$と$C^*(\Sigma_{G(1;\{\frac{p_n}{\alpha}\})})$はstable同型である．さらに，Rieffelの結果（すなわち，定理1）から，$C^*(\Sigma_{G(1;\{\frac{p_n}{\alpha}\})})$と$C^*(\Sigma_{G(1;\{\frac{\alpha}{p_n}\})})$はstable同型となっている．これらのことと，帰納的極限の性質を考えることによって次の命題が得られる．

<u>命題11</u>．αを無理数とする．$\{p_n\}$を$p_n \mid p_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$を満たす自然数列とする．α，$\{p_n\}$に対してT_αでの２つの部分群G_1，G_2を次のように定義する．

$G_1 = \bigcup G(1 ; \{\frac{\alpha}{p_n}\})$, $G_2 = \bigcup G(\frac{1}{p_n} ; \{\frac{1}{\alpha}\})$ とおくと, $\mathbb{R}_{G_1}$ と $\mathbb{R}_{G_2}$ は順序群同型であるが, さらに, C^*環 $C^*(\Sigma_{G_1})$ と $C^*(\Sigma_{G_2})$ は stable 同型となる.

以上が前述の予想に対する肯定的な解答が与えられる部分である. 従って, 未解決の部分は次の Γ_α の群 G に対するものである. すなわち, ねじれのない部分が無限生成である一般の場合, ねじれのない部分が有限生成であって, ねじれの部分が無限生成である群に対する場合の2つが残されたことになる.

さらに, 問題として考えられるのは, $C^*(\Sigma_G)$ は AF-環に埋めこめられるかがある.

参考文献

[1] D.E. Evans, Gauge actions on $\mathcal{O}_A$, J. Operator Theory, 7(1982), 79-100.

[2] P. Green, The local structure of twisted covariance algebras, Acta Math., 140(1978), 191-250.

[3] S. Kawamura and H. Takemoto, C*-algebras associated with shift dynamical systems, preprint.

[4] M. Pimsner and D. Voiculescu, Imbedding the irrational rotation C*-algebra into an AF-algebra, J. Operator Theory, 4(1980), 201-210.

[5] N. Riedel, Classifictions of the C*-algebras associated with minimal

rotations, Pacific J. Math., 101(1982), 153-162.

[6] M.A. Rieffel, C*-algebras associated with irrational rotations, Pacific J. Math., 93(1981), 415-429.

[7] C.L. Shen, On the classifiction of the ordered groups associated with approximately finite dimensional C*-algebras, Duke Math. J., 46 (1979), 613-633.