数理解析研究所講究録
第488巻 1983年 89-104

Full II_1 Factorについて

大阪教育大　長田まり急　(Marie Choda)

Murray - von Neumann [21] は，II_1型因子に対して，性質(Γ)を定義することにより，II_1型因子の中には，(Γ)をもつもの(超有限II_1型因子)と，(Γ)をもたないもの(二つの生成元をもつ自由群の群Neumann環)が存在することを示した。II_1型因子が"(Γ)をもたない"という否定的条件は，その後Connes [12]が因子に対して定義した"完全(full)"と呼ばれる性質と一致する。

ここでは，構成されたvon Neumann環が完全II_1型因子になる為には，どのような条件が充たされればよいかという事を主題として，完全II_1型因子は少なくとも三つ以上は存在する事など，いくつかの完全II_1型因子に関する話を記していく。

1. 定義と記号

von Neumann環$\mathcal{A}$の(*-)自己同型写像全体のなす群を，$\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$で，内部自己同型写像全体のなす群を$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$で示

し，$\mathrm{Out}(\mathcal{A}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})/\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ とする。$\mathcal{A}$が忠実正規なトレースτをもつ有限型環のとき，そのτを固定して，$\mathcal{A}$はヒルベルト空間$L^2(\mathcal{A},\tau)$上で標準的に作用しているものとみなし，$\mathcal{A}$の元xの$L^2(\mathcal{A},\tau)$へのうめこみと，xとを同一視して同じxで記すことにする。

NをII_1型因子，τをNのcanonicalなトレースとしたとき次の条件が充されるならば，Nは<u>(Γ)をもつ</u>という：任意の$\varepsilon>0$とNの有限個の元の集合$\{x_1,\cdots,x_n\}$に対して，Nに属するユニタリ作用素uが存在して，$\tau(u)=0$かつ全ての$1\leq j\leq n$に対して$\|ux_j - x_j u\|_2 < \varepsilon$を充す。Connes[12]と境[24]の結果により，Nが(Γ)をもたない為の必要十分条件は，$\mathrm{Int}(N)$が閉じていることである。ここで，$\mathrm{Aut}(N)$に対する位相は次で定義されたものである：$\alpha_\iota \to \alpha \Longleftrightarrow \|\alpha_\iota(x) - \alpha(x)\|_2 \to 0$ $(x\in N,\ \alpha_\iota, \alpha\in \mathrm{Aut}(N))$。$\mathrm{Int}(N)$が閉じているとき，Nは<u>完全</u>$\mathrm{II}_1$型因子であると呼ばれる([12])。

Gを可算(離散)群とし，Gの群von Neumann環を<u>$R(G)$</u>で表わす：$\lambda(g)\xi(h) = \xi(g^{-1}h)$ $(g,h\in G,\ \xi\in\ell^2(G))$に対し$R(G)$は$\lambda(G)$の生成するvon Neumann環。<u>$G$の$(\mathcal{A},\tau)$への作用$\alpha$</u>でもって，$G$から$\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$への準同型$\alpha$で$\tau(\alpha_g(x))=\tau(x)$ $(g\in G,\ x\in\mathcal{A})$を充すものを表わす。環$\mathcal{A}$の群$G$による作用$\alpha$に関する接合積を<u>$R(G,\mathcal{A},\alpha)$</u>で記すことにする。

2。完全II_1型因子を与える為の条件

完全II_1型因子の例としては，Murray - von Neumann が与えた二つの生成元をもつ自由群F_2の群 von Neumann 環$R(F_2)$の他には，次のようなものがある；

(イ) 超有限II_1型因子$\mathcal{R}$のF_2による或る作用αに関する接合積 $R(F_2, \mathcal{R}, \alpha)$ ([22], [25] 他)，

(ロ) 完全II_1型因子N_1とN_2のテンソル積$N_1 \otimes N_2$ ([13])，

(ハ) 完全II_1型因子N上の$n \times n$行列環 ([4])，

(ニ) 完全II_1型因子Nと有限群Gに対し，α_g $(1 \neq g \in G)$ が外部自己同型となる作用αに関する$R(G, N, \alpha)$と不動点環 $N^\alpha = \{x \in N ; \alpha_g(x) = x,\ g \in G\}$ ([4], [2])。

(ニ)における群Gが無限群のときには，$R(G, N, \alpha)$が完全になる場合と，ならない場合が生じてくる。特に，Gが整数の群$\mathbb{Z}$のときについて，その例を掲げると，

(i) g_1とg_2をF_2の生成元，μを無理数とし，$\theta \in \mathrm{Aut}(R(F_2))$を$\theta(\lambda(g_i)) = e^{i\mu}\lambda(g_i)$ $(i = 1, 2)$で定義する。すると全ての$n (\neq 0)$に対して，θ^nは$R(F_2)$の外部自己同型だが，$R(\langle\theta\rangle, R(F_2))$は(Γ)をもち，従って完全ではない。

(ii) $\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$を自由群$F_\infty$の生成元の集合とする。$\theta \in \mathrm{Aut}(R(F_\infty))$を$\theta(\lambda(g_i)) = \lambda(g_{i+1})$で定義すると，全ての$n (\neq 0)$に対して，$\theta^n$は外部自己同型であり，$R(\langle\theta\rangle, R(F_\infty))$

は再び完全II_1型因子である。

上の(i)におけるθに対してθ^nは恒等写像に収束するが(ii)におけるθに対しては，$\{\theta^n\}_{n=1,2,\ldots}$の集合は$\mathrm{Out}(R(F_\infty))$の中で離散な集合になっている。この事実に関して，Jones-Philipsによる次の結果がある([18]，[23])：完全II_1型因子Nに対し，$R(\mathbb{Z}, N, \alpha)$が完全である為の必要十分条件は，$\alpha(\mathbb{Z})$の$\mathrm{Out}(N)$における像が離散集合になることである。

上の例(i)によって，$\mathrm{Out}(R(F_2))$は離散ではないが，$\mathrm{Out}(N)$が離散になる因子の例がConnesによって与えられた。群Gの自明な表現が$\hat{G}$の中で孤立点になっているとき，Gは<u>性質(T)をもつ</u>と呼ばれる([20])。GがICC群(すなわち$(1\neq)g\in G$に対し$C_g=\{tgt^{-1}; t\in G\}$が無限集合となる群)であることは，$R(G)$がII_1型因子である為の必要十分条件であるが，GがICC群であって(T)をもつならば，$\mathrm{Int}(R(G))$は閉集合になる([14])，従って$R(G)$は完全であり，$\mathrm{Out}(R(G))$は離散である。ICC群であって，(T)をもつものの代表例としては，$SL(3, \mathbb{Z})$があるが，上記のことにより，$R(F_2)$と$R(SL(3, \mathbb{Z}))$とは同型でない完全II_1型因子である。

今までの例は，本質的には全て群環として与えられる完全II_1型因子が土台になっているが，von Neumann環を与える手段として重要なものに，群測度空間構成法と呼ばれるもの

がある。この方法で完全III₁型因子を作る為に必要な条件について，次の§3と§4で考えてみたい。

3. 作用の強エルゴード性

$\mathcal{A}$を忠実正規有限なトレースτをもつvon Neumann環としては$\tau(1)=1$と正規化しておく。可算群Gの$(\mathcal{A},\tau)$への作用αに対して，エルゴード性より更に強い性質を考える。作用αがエルゴード的であるとは，$\mathcal{A}^\alpha=\mathbb{C}1$となることである。これに対し$\alpha$が次の条件を充すとき，作用$\alpha$は強エルゴード的であると呼ぶ：すべての$g\in G$に対して，$\|\alpha_g(x_n)-x_n\|_2\longrightarrow 0$を充す$\mathcal{A}$の中の（作用素ノルムに関して）有界な点列$\{x_n\}$は，$\|x_n-\tau(x_n)1\|_2\longrightarrow 0$を充す。この性質はConnes-Weiss [15]が確率測度空間への群の作用に対して定義した概念の拡張になっている。明らかに強エルゴード性からエルゴード性は導かれるが，逆は成立しないことは次の様な結果からも明らかである。$\mathcal{A}$のaperiodicな自己同型θの生成する群は，強エルゴード的になれないし，もっと一般に，群Gがamenableであれば，$\mathcal{A}$又はαに対し割合に自然な条件を付け加えれば，αは強エルゴード的にはなれない（[11]）。

この強エルゴード性より，もっと強いエルゴード性を考えることができる。各$g\in G$に対し，自己同型α_gは$L^2(\mathcal{A},\tau)$

上のユニタリに拡張することができる。この拡張されたユニタリを同じ記号 α_g で表わすことにする。作用 α が次の条件を充すとき，α は s-強エルゴード的であると呼ぶ：$L^2(\mathcal{A},\tau)$ の中のノルム1のベクトルの点列 $\{\xi_n\}$ が $\|\alpha_g(\xi_n)-\xi_n\|_2 \to 0$ を全ての $g\in G$ に対して充すならば，$\|\xi_n - \langle \xi_n, 1\rangle 1\|_2 \to 0$ でなければならない。明らかに，s-強エルゴード的な作用は強エルゴード的であるが，逆は一般には成り立たない（[9]，[25]）。このような作用を余り無理をせずに与えることが可能か否かについては，次のような結果が成立つ。

群 G が (T) をもつならば，全てのエルゴード的な作用は，s-強エルゴード的である（[5]）。又群 G が amenable でなければ，G の群 K への free な作用 α は，$R(K)$ 上で s-強エルゴード的になる（[14]）。

エルゴード性と s-強エルゴード性との違いは，次のような関係で言い表わすことができる。

エルゴード的な作用 α に対して，次の三つの条件は同値である（[6]，[8]）；

(1) α が s-強エルゴード的である，

(2) $\mathcal{A}$ 上の α-不変な状態は，正規である，

(3) α_G の生成する $L^2(\mathcal{A},\tau)$ 上の C^*-環 $C^*(\alpha_G)$ が $1\,(\in L^2(\mathcal{A},\tau))$ への一次元作用素 P_1 を含む。

系として，作用αがs-強エルゴード的である為の必要十分条件は，$\mathcal{A}$上のα-不変な状態がτに限ることであるを得る。

更に，αがs-強エルゴード的であれば，α_Gと$\mathcal{A}$によって生成される$L^2(\mathcal{A},\tau)$上のC^*-環$C^*(\mathcal{A},\alpha_G)$は$L^2(\mathcal{A},\tau)$上の完全連続作用素全体を含み，$C^*(\mathcal{A},\alpha_G)$が，$P_1$を含むならば，$\alpha$は強エルゴード的であるという関係が成立つ（[8]）。

4。群測度空間構成法が完全II_1型因子を与える条件

ここでは，群測度空間構成法によるvon Neumann環が完全II_1型因子になる為の条件を求めることを主眼として，一般のvon Neumann環からの接合積が完全II_1型因子になる為には，どのような条件が必要であるかについて，考えていく。

群Gの中心を$Z(G)$で，集合Sの特性関数をχ_Sで表わす。

群Gに対し，次の二つの条件は同値である（[10]）；

(4) $\sum_{h\in G}|\xi_n(h)-\xi_n(ghg^{-1})|^2\longrightarrow 0$を全ての$g\in G$に対して充す$l^2(G)$の元の列$\{\xi_n\}$は，$\sum_{h\notin Z(G)}|\xi_n(h)|^2\longrightarrow 0$を充す，

(5) $l^\infty(G)$上の状態mが，全ての$g\in G$と$x\in l^\infty(G)$に対して$m(x)=m(gxg^{-1})$を充すならば，$m(\chi_{Z(G)})=1$となる，

ただし，$gxg^{-1}(h)=x(g^{-1}hg)$　$(g,h\in G,\ x\in l^\infty(G))$とおく。

例1　この同値条件を充す群の例として，次のようなものがある；自由群F_n $(n=2,\cdots,\infty)$，$SL(n,\mathbb{Z})$ $(n=2,3,\cdots)$，

$PSL(n, \mathbb{Z})$, 自由積 $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ $(n \geqq 2, m \geqq 3)$, それに可換群等。

同値条件 (4) 及び (5) を充すとき, 群 G は性質 (F) をもつと呼ぶ。G が (F) をもつということは, Effros [16] の定義した inner amenability と大きな関係があり, 中心が単位元のみの群の場合には, (F) をもつことと inner amenable でないこととが同値になる。一般の群の場合には, inner amenable でなければ (F) をもつが, $SL(2, \mathbb{Z})$ の例から判るように, (F) をもつ群が必ずしも inner amenable でないとは限らない。又 Kazhdan の性質 (T) については, G が (T) をもち, 任意の $g \notin Z(G)$ に対して, C_g が無限集合になるならば, G は (F) をもつ。

さて, A を忠実正規有限なトレース τ をもつ von Neumann 環, G を可算群, α を G の (A, τ) への作用とする。そのとき G が (F) をもち, $Z(G)$ が有限集合で, 作用 α が強エルゴード的ならば, 接合積 $R(G, A, \alpha)$ は完全 II_1 型因子となる ([10])。この結果において, もし A が完全 II_1 型因子等の場合には, α の強エルゴード性は不要であるが, 一般に次が成立する。

A が可換な環のときには, α が強エルゴード的でなければ $R(G, A, \alpha)$ は完全型因子にはなれない ([7])。

又 $Z(G)$ の有限性も一般には省くことができないということは (1) の例からも判るが (1) で扱った群は $\mathbb{Z}$ だから, §3

で述べたように，その作用は強エルゴード的になれない。そこで次に $Z(G)$ が無限で，他の条件が全て充されていて，$R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ が完全にならない可換な $\mathcal{A}$ の例を掲げる。

例 μ をトーラス $\mathbb{T}$ 上のハール測度，X を $SL(3,\mathbb{Z})$ 上の $\mathbb{T}$ の値を取る関数の全体 $X = \mathbb{T}^{SL(3,\mathbb{Z})}$ とし，ν を $SL(3,\mathbb{Z})$ を添字集合とする μ の無限積測度 $\nu = \mu^{SL(3,\mathbb{Z})}$ とする。$\mathbb{Z}$ と $SL(3,\mathbb{Z})$ の直積群 G の (X, ν) への作用 α を次の様に定義する；無理数 θ に対して，$(\alpha_{(n,g)} x)(h) = e^{in\theta} x(g^{-1}h)$ $(n \in \mathbb{Z},\ g, h \in SL(3,\mathbb{Z}),\ x \in X)$。すると G は (F) をもち，α の作用は強エルゴード的だが，$Z(G) = \mathbb{Z}$ で無限集合となる。又 $R(G, L^\infty(X, \nu), \alpha)$ は完全でない II_1 型因子である。

5。部分環に対する近似的正規性への応用

von Neumann 環の理論の中で最も重要な定理の一つは，いわゆる double commutant 定理；$\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ である。与えられた von Neumann 環 M の von Neumann 部分環 B に対して，$B^{cc} = B$ が成り立つとき，Kadison [19] は，BはMの中で正規であると呼んだ。ただし $B^c = \{x \in M ; xb = bx \quad b \in B\}$。エルゴード性に対して，強エルゴード性を導入したように，部分環に対する正規性に対して，次のような近似的正規性を考えることができる。

II_1型因子 N の自己共役な部分集合 S に対し，集合 $S^\dagger$ を次で定義する；$N \ni x$ に対し

$x \in S^\dagger \Leftrightarrow \|xy_n - y_n x\|_2 \to 0$ が全ての有界点列 $\{y_n\} \subset N$ で $\|sy_n - y_n s\|_2 \to 0$ $(s \in S)$ を充すものに対して成立する。

$S^\dagger$ は N の von Neumann 部分環となる。又一般に $S \subset S^\dagger$ である。II_1型因子 N の von Neumann 部分環 B が $B^\dagger = B$ を充すとき，B はN の中で近似的正規であるという。明らかに，正規な部分環は近似的正規である．Connes [13] は，超有限型 II_1型因子 R の von Neumann 部分環は全て R の中で近似的正規であることを示したが，彼の証明は本質的には，次の事柄を示している。（可分なヒルベルト空間上で作用している）II_1型因子 N の injective な von Neumann 部分環は，N の中で近似的に正規である（[10]）。

では，与えられた II_1型因子の中で，どのような部分環が，近似的に正規ではなくなるのだろうか？

§4 の結果の一つの応用として，近似的正規でない部分環の例を得ることができる．

次に掲げる von Neumann 環 B は II_1型因子 N の中で近似的に正規でない（[10]）；

(ア) G を有限群，α を G の完全 II_1型因子 B への作用で，

α_g $(g \neq 1)$ が B の外部自己同型になるものとしたとき
$N = R(G, B, \alpha)$ とおく。

(イ) A を忠実正規有限なトレース τ をもつ von Neumann 環
G を (F) をもつ群で，$Z(G) = \{1\}$ を充すとし，α は
G の (A, τ) への作用とする。υ を接合積を構成する
ときの G から $R(G, A, \alpha)$ の中へのユニタリ表現とし，
$N = R(G, A, \alpha)$，$B = \{\upsilon(G)$ の生成する von Neumann 環$\}$とする。

更に一般に，群 G が (F) をもち $Z(G) = \{1\}$ を充すならば G から完全 II_1 型因子 N へのユニタリ表現 u が存在して，$u(G)$ の生成する von Neumann 環 B が N の中で近似的に正規でないようにすることができる（[10]）。

6. Haagerup 型の II_1 型因子

N を II_1 型因子，τ を N 上の canonical トレースとする。N 上の正規線型写像の族 $\{P_t\}$ で，次の条件 ①〜③ を充すものが，存在するとき，N は Haagerup 型であるという；

① 各 P_t は完全正値で，$P_t(1) = 1$ である，
② 各 P_t はコムパクト（即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有限次元写像 Q_t が存在して $\|P_t(x) - Q_t(x)\|_2 < \varepsilon \|x\|_2$ $(x \in N)$），
③ 全ての $x \in N$ に対して，$\|P_t(x) - x\|_2 \to 0$ である。

超有限 II_1 型因子 $\mathcal{R}$ は，I_{2^n} 型因子の増加列 $\{M_n\}$ から生成さ

れているので，P_nとしてRからM_nへの期待値を取れば，列$\{P_n\}$は①～③を充している。

Connesは1980年の夏にキングストンで催された研究集会で，"Haagerup case"という名のもとで上記のような条件を充すII_1型因子について触れ，"Haagerup case"II_1型因子の部分因子は全て"Haagerup case"（なぜならば，部分因子への条件付期待値とP_tとの合成を考えればよい）であると述べた。しかし発行された講演集録の中では，"Haagerup case"については何も記していない。ここではConnesの"Haagerup case"にちなんで，しかしその定義が同一か否か明確ではないので，Haagerup型と呼ぶことにする。Haagerup型の完全II_1型因子の類は，完全II_1型因子の集合の中で極小な類である。II_1型因子の代表例は一般にICC群Gに対する環$R(G)$として与えられる。ここでは，$R(G)$がHaagerup型になる為のICC群Gの必要十分条件を求める。

群Gに対して，次の条件①'～③'を充す関数の族$\{\varphi_t\}$が存在するとき，Gは<u>性質(H)をもつ</u>という；

① ' 各φ_tは正の定符号関数で，$\varphi_t(1)=1$である，
② ' 各φ_tは無限遠点で0になる（即ち，任意の$\varepsilon>0$に対しGの有限部分集合G_0が存在して$|\varphi_t(g)|<\varepsilon$ $(g\notin G_0)$），
③ ' 全ての$g\in G$に対して，$\varphi_t(g)\longrightarrow 1$である。

amenableな群は明らかに性質 (H) をもつ。又自由群F_2の元gに対して、$\varphi_t(g)=e^{-t|g|}$ ($|g|$は既約語gの長さ) とおけば、Haagerup [17] の結果により、$\{\varphi_t\}$は条件を充す。所が、GがKazhdanの性質 (T) をもてば、Akemann-Walter [1] の結果により、Gは性質 (H) をもたない。

ICC群Gに対して、$\tau(x)=\langle x\delta_1,\delta_1\rangle$ ($x\in R(G)$) で定義されたトレースτをとる。Gが性質 (H) をもつとき、各tと各$g\in G$に対し、$P_t(\lambda(g))=\varphi_t(g)\lambda(g)$となる写像$P_t$は、$R(G)$全体に拡張することができる。そのとき族$\{\varphi_t\}$の充す性質①'～③'に対応して、族$\{P_t\}$は性質①～③を充す。逆に$R(G)$がHaagerup型のとき、各$t$と各$g\in G$に対して、

$\varphi_t(g)=\tau(P_t(\lambda(g))\lambda(g^{-1}))$とおけば、族$\{P_t\}$の性質①②③に対応して、族$\{\varphi_t\}$の性質①'②'③'が導き出される。この事により、ICC群Gに対して、<u>$R(G)$がHaagerup型である為の必要十分条件は</u>、<u>Gが性質 (H) をもつことであるこ</u>とが判る([3])。従って、Gが性質 (T) をもつICC群ならば$R(G)$はHaagerup型でない完全II_1型因子である。$R(F_2)$と$R(SL(3,\mathbb{Z}))$のテンソル積$R(F_2)\otimes R(SL(3,\mathbb{Z}))$は、$R(SL(3,\mathbb{Z}))$を部分環として含むからHaagerup型ではなく (i) における$R(F_2)$の自己同型θに対して、$\{\theta^n\otimes 1\}_n$の部分列で恒等写像に収束する外部自己同型の列が取れること

により，$\mathrm{Int}(R(F_2)\otimes R(SL(3,\mathbb{Z})))$は閉集合でない。従って，$\{R(F_2),\ R(SL(3,\mathbb{Z})),\ R(F_2)\otimes R(SL(3,\mathbb{Z}))\}$ は互いに同型でない完全II_1型因子の組となる([3])。

最後にII_1型因子に対するHaagerup型という性質が，von Neumann環の操作に対してどの程度保たれるかについて，記しておく。Haagerup型因子同志のテンソル積，及び，Haagerup型因子上の$n\times n$-行列環は明らかにHaagerup型であるが，Haagerup型因子の群Gによる接合積は，もしGが，amenableであれば，Haagerup型になることを示すことができる。

文　　献

[1] C.A.Akemann and M.E.Walter, Unbounded negative definite functions, Can. J. Math., 33(1981), 862-872.

[2] H. Choda and M. Choda, Fullness, simplicity and inner amenability, Math. Japonica, 24(1979), 235-246.

[3] M. Choda, Group factors of the Haagerup type, Preprint.

[4] ________, The crossed product of a full II_1-factor by a group of outer automorphisms, Math. Japonica, 23(1978), 385-391.

[5] M. Choda and Y. Watatani, Fixed point algebra and proprty T, Math. Japonica, 27(1982), 263-266.

[6] M. Choda, Normality of invariant states under strongly ergodic actions, Math. Japonica, 27(1982), 293-300.

[7] M. Choda, Property T and fullness of the group measure space construction, Math. Japonica, 27(1982), 535-539.

[8] ______, Strong ergodicity and compact operators, Math. Japonica, 27 (1982), 639-643.

[9] ______, Effect of inner amenability on strong ergodicity, Math. Japonica, 28(1983), 109-115.

[10] ______, A condition to construct a full II_1-factor with an application to approximate normality, to appear in Math. Japonica.

[11] ______, Amenability and strong ergodicity, in preparation.

[12] A. Connes, Almost periodic states and factors of type III_1, J. Fnal. Analysis, 16(1974), 415-445.

[13] ______, Classification of injective factors, Ann. Math., 104(1976), 73-116.

[14] ______, A factor of type II_1 with countable fundamental groups, J. Operator Theory, 4(1980), 151-153.

[15] A. Connes and B. Weiss, Property T and asymptotically invariant sequences, Israel J. Math., 37(1980), 209-210.

[16] E.G.Effros, Property and inner amenability, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 483-486.

[17] U. Haagerup, An example of a non-nuclear C*-algebra, which has the metric approximation property, Invent. Math., 50(1978-1979), 279-293.

[18] V. F. R. Jones, Central sequences in crossed products of full factors, Duke Math.J., 49(1982), 29-33.

[19] R.V.Kadison, Normalicy in operator algebra, Duke Math. J., 29(1962), 459-464.

[20] D.A.Kazhdan, Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Functional Anal. Appl., 1(1967), 63-65.

[21] F.J.Murray and J.von Neumann, Rings of operators IV,Ann. of Math., 44(1943), 716-804.

[22] M.Nakamura and Z.Takeda, On certain examples of the crossed product of finite factors, I, Proc. Japan Acad., 34(1958), 495-499.

[23] J.Phillips, Automorphisms of full II_1 factors with applications to factors of type III, Duke Math.J., 43(1976), 375-385.

[24] S.Sakai, On automorphism groups of II_1-factors, Tohoku Math.J., 26 (1974), 423-430.

[25] K.Schmidt, Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group actions, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 1(1981),223-236.

[26] N. Suzuki, Certain types of groups of automorphisms of a factor, Tohoku Math. J., 11(1959), 314-320.